Доповіді та повідомлення
Львівського державного університету імені Ів. Франка
Випуск III, частина 2 1952

ФІЗИКА і МАТЕМАТИКА

В. Ф. РОГАЧЕНКО
старший преподаватель

К ВОПРОСУ ОБ ОТКРЫТИИ Н. И. ЛОБАЧЕВСКИМ МЕТОДА ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ЧИСЛЕННЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Долгое время лучший современный метод приближенного вычисления корней алгебраического уравнения с помощью последовательного возведения корней в квадрат неправильно назывался методом Греффе. Только в 1924—25 гг. Уиттекер и Робинсон, а также Н. Н. Парфентьев указали на то, что Лобачевский открыл и опубликовал его в 1834 г. — на три года ранее Греффе. Однако эти авторы, а вслед за ними и другие, указывали, что еще ранее (в 1826 г.) этот же метод был открыт бельгийским математиком Данделеном. Это указание не верно: приоритет в открытии метода полностью принадлежит Лобачевскому.

Теоретические основы для создания метода были подготовлены Лобачевским в 17-й главе его «Алгебры» (напечатана в 1834 г., была готова к печати не позднее конца 1831 г.). Сам метод был изложен в последней, 257-й статье этой главы. Исходя из общих соотношений между корнями и коэфициентами уравнения, Лобачевский дал выражения для коэфициентов уравнения, корни которого суть квадраты корней данного уравнения. Свой метод он основывает на том, что величина $\sqrt[2^p]{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^{2^p}}$ представляет собой верхнюю границу наибольшего по модулю корня данного уравнения. Чтобы найти сумму, стоящую под корнем, Лобачевский предложил составлять последовательность уравнений, корни каждого из которых суть квадраты корней предыдущего уравнения. Тогда коэфициент p-го уравнения, стоящий при x^{2^p-1}, взятый с обратным знаком, и дает подкоренное выражение.

В своей работе, вышедшей в 1826 г., Данделен высказал идею о последовательном возведении корней данного уравнения в квадрат. Однако эта идея возникла у него не в связи с общей теорией симметрических функций корней алгебраического уравнения, как это было у Лобачевского, а в связи с рассмотрением известных методов касательных и хорд. Это привело к тому, что метода решения уравнений как такового Данделен не создал, так как он не дал рекуррентных соотношений, с помощью которых можно было бы вычислять коэфициенты последовательности уравнений, а также не указал в явном виде тех выражений, из которых непосредственно получаются приближенные значения искомых корней данного уравнения.

Заслуга Лобачевского в том, что он, прийдя к идее метода совершенно самостоятельно и основываясь на общей теории, придал этой идее такую форму, которой сразу можно воспользоваться для вычисления корней, т. е., в отличие от Данделена, действительно создал практический метод, а не остановился на общих теоретических рассуждениях, лежащих в его основе.

Работа Лобачевского осталась незамеченной, и в 1837 г. Греффе издал работу, в которой дал метод, совпадающий с методом Лобачевского. В 1841 г. Энке, основываясь на работе Греффе, дал методу дальнейшее развитие, и с тех пор в литературе он стал известен под названием метода Греффе.

На самом же деле приоритет в открытии этого метода бесспорно и безраздельно принадлежит Н. И. Лобачевскому. Поэтому метод квадрирования корней с полным правом должен носить имя Лобачевского.

Ф. И. АЛЕМАЙКИН
преподаватель

ВЫРАЩИВАНИЕ КРИСТАЛЛОВ ОДНОЗАМЕЩЕННОГО ФОСФОРНОКИСЛОГО АММОНИЯ ИЗ РАСТВОРА

В технике слабых токов, кроме естественных кристаллов кварца и турмалина, большое применение получил искусственный кристалл сегнетовой соли. Выращиванием кристаллов сегнетовой соли в настоящее время занимаются целые «фабрики кристаллов».

Кристаллы аммония фосфорнокислого однозамещенного (АФО) обладают пьезоэлектрическими свойствами. Не имея кристализационной воды, кристаллы АФО могут иметь применение и при температуре до 100° С и даже выше. Применять же сегнетовую соль при этих температурных условиях нельзя.

Для выращивания кристаллов АФО употребляется методика скоростного выращивания, разработанная для сегнетовой соли. Поэтому мы и занялись изучением условий роста кристалла при воздействии различных факторов.

Выращивание производилось статическим методом как при постоянной температуре, так и путем постепенного снижения температуры. При этом выяснилось следующее:

а) Скорость роста кристалла в растворе из чистых солей АФО по направлению оси Z(c) 5—8 раза больше, чем по направлению оси X(a) или Y(b).

б) Прибавление до 15% к АФО солей двузамещенного фосфорнокислого аммония (АФД) увеличивает рост по направлению оси Z, а также несколько по направлению осей X и Y. Дальнейшее увеличение содержания АФД начинает несколько замедлять рост по оси Z, мало меняет рост по осям X и Y.

в) Прибавление небольшого количества бария увеличивает скорость роста вдоль оси Z, но не меняет скорость роста по направлению осей X и Y. Прибавление же железа, не меняя скорость роста вдоль оси Z, уменьшает скорость роста вдоль осей X и Y.

Обычно даже химически чистый материал для выращивания содержит примеси. Кроме того, для увеличения скорости роста приходится вводит искусственно примеси. Возникает вопрос, проникают ли эти посторонние примеси в растущий кристалл из раствора во время роста.

Для этой цели производился спектральный анализ кристалла и солей, находящихся в растворе. Сравнение спектральных снимков показало, что металлы находящиеся в растворе, не имеются в кристалле. Наличие посторонних примесей не превосходило до 0,1—0,5%. Точность измерения доходила до 0,001%.

Ф. И. АЛЕМАЙКИН
преподаватель

ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТЬ КРИСТАЛЛОВ ОДНОЗАМЕЩЕННОГО ФОСФОРНОКИСЛОГО АММОНИЯ (АФО)

Изучение электропроводности кристалла дает возможность использовать полученный результат непосредственно для технических целей, а также изучить механизм прохождения тока через кристалл и тем самым изучить структуру кристалла.

Электропроводность кристалла АФО измерялась в цепи постоянного тока гальванометром чувствительностью 10^{-9} A/m/mm и 10^{-10} A/m/mm. Кристалл находился в термостате в атмосфере сухого воздуха. Электроды наносились катодным распылением серебра. Температура в термостате менялась от 20 до 80° С с точностью до 0,5° С. Напряжение составляло от 50 в до 1200 вольт на пластинки толщиной в 1—2 мм, т. е. напряженность поля в кристалле создавалась порядка от 500 вольт/см до 12 кв/см. Источниками служили сухие батареи.

Измерения производились по остаточному току, а также с учетом поляризации; так как поляризация оказалась незначительной, то результаты измерения в обоих случаях практически совпадали.

Зависимость электропроводности от температуры измерялась при различных напряжениях. Результаты хорошо укладываются на прямую линию зависимости логарифма электропроводности от обратной величины температуры ($\lg \sigma = \frac{\alpha}{T} - \beta$), где σ — электропроводность, T — абс. температуры, α и β — константы. Электропроводность при температуре 20° С по оси $Z \sim 3.10^{-10}$ ом$^{-1}$ см$^{-1}$, а по направлении оси $X \sim 3.10^{-12}$, т. е. наблюдается анизотропия электропроводности.

Электропроводность также значительно меняется от напряженности приложенного поля, даже при тех небольших полях, которые мы прикладывали. Например, при увеличении поля в 6 раз электропроводность вдоль оси Z увеличивается в 1,5 раза, а по оси X в 2 раза.

Видимо, причиной отклонения от закона Ома является те примеси в кристалле, которые не удается определять и спектрографически, так как о закономерности Пула при этих напряженностях говорить нельзя.

В. П. ЦВЕТКОВ ст. преподаватель
А. Н. КОВАЛЕВСКИЙ ст. лаборант
Н. Ф. КРАВЦОВА ассистент

О НЕКОТОРЫХ ПРИМЕНЕНИЯХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФИЛЬТРОВ В РЕНТГЕНОСТРУКТУРНОМ АНАЛИЗЕ

Проведена проверка возможности получения монохроматических кривых интенсивности с помощью дифференциальных фильтров фотографическим методом и разработана методика изготовления и балансировки фильтров. Даются параметры фильтров для медного и молибденового излучения, конструкции камер и методика съемки.

Получалась кривая атомного распределения для стеклообразного селена на острофокусной трубке в монохроматическом излучении (Cu $K\alpha$) и в фильтрованном. На основании сравнения кривых интенсивности, полученных различными способами монохроматизации, сделано заключение о рациональности применения дифференциальных фильтров как сокращающих экспозиции в 10—40 раз.

Для Mo $K\alpha$ излучения получена кривая интенсивности для CCl_4 и после сравнения ее с кривой, полученной В. И. Даниловым в монохроматическом излучении, сделано заключение о пригодности методики и для Mo $K\alpha$ излучения.

В работе делается попытка применить счетчик Гейгера для исследования жидких веществ. Специально для этого был изготовлен усилитель с расчетом применения его для измерения интенсивности рассеянных рентгеновых лучей.

Даются рабочие характеристики установки со счетчиком. Кривые интенсивности снимались с циркониевым фильтром в Mo $K\alpha$ излучении.

Я. С. ПОДСТРИГАЧ
научный сотрудник

О РАСШИРЕНИИ ОБЛАСТЕЙ СХОДИМОСТИ РАЗЛОЖЕНИЙ КООРДИНАТ КЕПЛЕРОВА ДВИЖЕНИЯ

Одной из основных задач аналитической Небесной механики является разложение пертурбационной функции, входящей в правые части диференциальных уравнений движения. Одним из аргументов этого разложения обычно принимается эксцентриситет орбиты движущегося тела.

До сих пор в основном употреблялись маклореновские разложения по степеням эксцентриситета, которые сходятся только для значений эксцентриситета меньше, так называемого, предела Лапласа ($e = 0.6627...$), причем уже для $e > 0.2$ ряды сходятся медленно.

Впервые мысль о возможности замены этих рядов рядами Тейлора по степеням приращения эксцентриситета $e - e_0$ была высказана Шарлье в 1904 году. Позднее проф. Н. Д. Моисеевым были найдены первые члены этих рядов для радиуса-вектора и прямоугольных координат тела, движущегося по эллиптической орбите, и исследована их сходимость при помощи метода Эрмита.

Затем Н. Б. Еленевской были найдены общие члены рядов для радиуса-вектора, прямоугольных координат, логарифма радиуса-вектора, уравнения центра и других функций эксцентриситета, исследована их сходимость при помощи методов Шарлье и Эрмита, выяснена связь между этими двумя методами как для эллиптического, так и для гиперболического движений. Была построена особая кривая кеплерова движения в плоскости комплексного значения эксцентриситета, внутри которой всегда можно найти такое значение e_0, для которого радиус сходимости рядов по степеням $e-e_0$ будет отличен от нуля для любого значения средней аномалии. Однако при значениях эксцентриситета близких к единице эти радиусы очень малы. Поэтому Н. Б. Еленевской было предложено увеличивать радиусы сходимости этих рядов за счет ограничения угловой переменной, т. е. строить ряды, сходящиеся не для всех значений средней аномалии. Такие ряды были построены и исследованы для частного случая $e_0=1$.

В настоящей работе исследуется общий случай сходимости указанных разложений для любого e_0. Исследование ведется методом Эрмита, где радиус сходимости рассматривается как функция комплексного значения эксцентрической аномалии, проводится сравнение этого метода с методом Шарлье.

В работе получены формулы, при помощи которых для заданного интервала значений средней аномалии можно определить соответствующий радиус сходимости:

$$r^2 = \frac{(x - M - e_0 \sin x \operatorname{ch} y)^2 + (y - e_0 \cos x \operatorname{sh} y)^2}{\operatorname{ch}^2 y - \cos^2 x},$$

где M — заданное значение средней аномалии, а величины x, y определяются из уравнений:

$$\cos^2 x = \frac{\operatorname{sh} y \operatorname{ch} y - y \operatorname{sh}^2 y}{y},$$

$$\operatorname{ch}^2 y = \frac{\sin x \cos x - (x - M) \cos^2 x}{x - M},$$

и наоборот:

$$M = x - y \frac{\sin 2x}{\operatorname{sh} 2y},$$

где величины x и y для заданных r и e_0 определяются из уравнений:

$$y = \operatorname{sh} 2y \frac{{}^1/_2 d^2 + e_0^2 \operatorname{ch}^2 y \pm e_0 \operatorname{ch} y \sqrt{r^2 - (d^4 - e_0^2) \operatorname{sh}_2 y}}{1 + e_0^2 \operatorname{sh}^2 2y}; \quad d^2 = r^2 - e_0^2.$$

$$\cos^2 x = \frac{\operatorname{sh} y \operatorname{ch} y - y \operatorname{sh}^2 y}{y}.$$

Н. ЕЛЕНЕВСКАЯ
кандидат физ.-мат. наук

ПРИМЕНЕНИЕ НОВОГО МЕТОДА РАЗЛОЖЕНИЯ ПЕРТУРБАЦИОННОЙ ФУНКЦИИ К ОСРЕДНЕННЫМ ВАРИАНТАМ ЗАДАЧИ ТРЕХ ТЕЛ.

Главная часть пертурбационной функции, рассматриваемая как непрерывная периодическая функция своих аргументов: средней аномалии M, расстояния перигелия от узла ω, долготы узла Ω и наклонности i, может быть разложена в четырехкратный ряд Фурье по кратным этих элементов. Это разложение может быть написано в виде:

$$\frac{1}{r_j} = \frac{2}{a_j} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} b_{1}, l^{(k)} \sum_{p,q,r=k,}^{k} A_{p\,q\,r} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{n=p\mp s}^{p-s}$$

$$P_s(n, p, \varkappa)\, e^s \cos(nM + p\omega + q\bar{\Omega} + ri) \qquad (1)$$

Здесь a_j — расстояние возмущающей точки до центрального тела, $\bar{\Omega} = l_j - \Omega$ (e_j — долгота возмущающей точки) $b_1, l^{(k)}$, $A_{p,\,q,\,r}^{(k)}$, $P_s^{(r,\,p,\,x)}$ суть числовые коэфициенты.

Рассмотрим фактическое разложение $\frac{1}{r_j}$ в некоторых основных осредненных вариантах задачи трех тел.

а) Двукратно осредненная схема Гаусса.

В этой схеме среднее значение пертурбационной функции образуется по формуле:

$$\left[\frac{1}{r_j}\right] = \frac{1}{4\pi^2} \int_{M=0}^{2\pi} \int_{l_j-0}^{2\pi} \frac{1}{r_j}\, dM\, dl_j. \qquad (2)$$

Если подставить в формулу (2) разложение (1), то все интегралы обращаются в нули за исключением тех, для которых n=o, q=o, и разложение (1) принимает вид:

$$\left[\frac{1}{r_j}\right] = \frac{2}{a_j} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{p,\, r\,=\,-\,k}^{n} \sum_{s=0}^{\infty}$$

$$b_1, l^{(k)}\, A_{p,\,0,\,r}^{(k)}\, P_s\,(0,\ p,\ \varkappa)\, \cos\,(p\omega + r_i) \qquad (3)$$

Разложение (3) дает для любого к по i конечные полиномы.

б) Наружная однократно осредненная проблема Фату.

В этой схеме осредненная пертурбационная функция получается при помощи формулы:

$$\left[\frac{1}{r_j}\right] = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{l_j=\Omega}^{2\pi+\Omega} \frac{1}{r_j}\, dl_j. \tag{4}$$

Ее разложение имеет вид:

$$\left[\frac{1}{r_j}\right] = \frac{2}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{p,\, r=-k}^{k} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{n=p+s}^{p-s}$$

$$b_1,l^{(k)}\, A_{p,\, q,\, r}\, Ps\, (n,\, p,\, \varkappa) \cos\, (nM + p\omega + r_i). \tag{5}$$

в) Внутренняя однократно осредненная проблема.

$$\left[\frac{1}{r_j}\right] = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{M=0}^{2\pi} \frac{1}{r_j}\, dM. \tag{6}$$

В разложении (5) коэфициенты P будут иметь вид: $P_s\, (o,\, p,\, \varkappa)$, а косинусы заменятся на $\cos\, (p\omega + q\bar{\Omega} + r_i)$.

Указанные варианты используются сейчас автором при построении аналитической теории VI и VII спутников Юпитера. Для вычисления возмущений от четырех больших спутников используется схема Гаусса. Для вычисления возмущений от Солнца — схема Фату.

А. С. КОВАНЬКО
профессор

К ВОПРОСУ О СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ФУНКЦИЙ В НЕКОТОРЫХ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

Рассматриваются следующие метрики в пространстве функций класса (на интервале $(-\infty < x < +\infty)$).

$$D_{S_p}^{TE}(f\ \varphi) = \sup_{-\infty < a < +\infty} \left\{ \frac{1}{T} \int\limits_{E(a,\, a+T)} |f-\varphi|^p\, dx \right\}^{\frac{1}{p}} \text{ (метрика Степанова),}$$

$$D_{W_p}^{E}(f, \varphi) = \lim_{T \to \infty} D_{S_p}^{TE}(f, \varphi) \text{ (метрика Вейля).}$$

Автор вводит следующий вид сходимости.

Определение. Последовательность $\{f_n(x)\}(n=1,2,3,\ldots)$ сходится к $f(x)$ D_{w_p} — равномерно, если как бы мало ни было $\varepsilon > o$ существует число $T_0 > o$ такое, что

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} D_{S_p}^{T}(f, f_n) < \varepsilon, \text{ если } T \geqslant T_0.$$

Далее автор доказывает следующую теорему.

Теорема I. Дана система функций $\mathfrak{M}(f)$ w_p почти — периодических. Достаточным условием компактности этой системы в смысле D_{w_p} — равномерной сходимости состоит в следующем:

Как бы мало ни было $\varepsilon > o$, для всех функций $f(x)$ данной системы $\mathfrak{M}(f)$ выполняются условия:

1) Существует такое число $\sigma > o$ и число $T_1 > o$, что

$$D_{S_p}^{TE}(f(x), < \varepsilon,$$

если

$$D_{S_p}^{TE}(1,0) < \sigma.$$

2) Существует такое число $\eta > o$ и число $T_2 > o$, что

$$D_{S_p}^{TE}(f(x+h), f(x)) < \varepsilon.$$

если $|h| < \eta$ и $T > T_2$ и E любое.

3) Существует число $T_3 > o$ и относительно-плотное множество почти периодов $\{\tau\}$ таких, что

$$D_{S_p}^{TE}(f(x+\tau), f(x)) < \varepsilon.$$

если $T \geqslant T_3$ и E любое.

Теорема II. Необходимое и достаточное условие компактности системы $\{f(x+k)\}$ всех смещений функции $f(x)$ в смысле D_{w_p} равномерной сходимости состоит в том, чтобы $f(x)$ была бы функцией w_p — почти периодической.