А. Н. КОСТОВСКИЙ
доцент

КВАДРИРУЕМОСТЬ НЕПРЕРЫВНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ, ЗАДАННЫХ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

В теории квадрируемости наиболее полные результаты получены московским математиком И. Я. Верченко для поверхностей вида: $z=f(x, y)$.

В настоящей работе исследованы поверхности вида: $\rho=f(\alpha, \beta)$, заданные в полярных координатах.

Получены следующие результаты:

I. Для того, чтобы непрерывная поверхность S, заданная в полярных (сферических) координатах системой уравнений:

$$\begin{aligned} x &= f(\alpha, \beta) \cos \alpha \cos \beta, \\ y &= f(\alpha, \beta) \cos \alpha \sin \beta, \\ z &= f(\alpha, \beta) \sin \alpha, \end{aligned}$$

где $(\alpha, \beta) \in I_0=\underset{\alpha, \beta}{E}[\alpha_1 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_2;\ \beta_1 \leqslant \beta \leqslant \beta_2]$, причем

$$\begin{aligned} &0 < m \leqslant f(\alpha_1\ \beta) \leqslant M, \\ &0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_2 < \frac{\pi}{2}, \\ &0 \leqslant \beta_1 \leqslant \beta \leqslant \beta_2 < 2\pi; \end{aligned}$$

имела конечную площадь в смысле Лебега на прямоугольнике I_0, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(\alpha, \beta)$ была ограниченной вариации в смысле Тонелли на прямоугольнике I_0.

II. Если это имеет место, то:

$$L(f, I_0) \geqslant \iint_{I_0} f(\alpha, \beta) \sqrt{f^2(\alpha, \beta)\cos^2\alpha + \left[\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right]^2 \cos^2\alpha + \left[\frac{\partial f}{\partial \beta}\right]^2}\, d\alpha\, d\beta.$$

III. Площадь поверхности $L(f, I)$ в смысле Лебега есть непрерывная и аддитивная функция прямоугольника $I \in I_0$.

IV. Почти во всех точках (α, β), принадлежащих прямоугольнику I_0, выполняется равенство

$$L'(\alpha, \beta)=f(\alpha, \beta) \sqrt{f^2(\alpha, \beta)\cos^2\alpha + \left[\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right]^2 \cos^2\alpha + \left[\frac{\partial f}{\partial \beta}\right]^2}.$$