не залежить від $F(x)$ і при $n_1 \to \infty$ і $n_2 \to \infty$ має границею розподіл А. М. Колмогорова

$$K(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} (-1)^{\nu} e^{-2\nu^2 z^2}$$

Ось тому-то закон розподілу Колмогорова $K(z)$ може служити для того, щоб розсудити, чи дві незалежні вибірки об'єму n_1 і n_2 одержані з однієї і тієї ж генеральної сукупності з неперервним законом розподілу. А саме, при великих n_1 і n_2 можна написати таке наближене рівняння

$$P\left\{F_2(x) - \frac{z}{\sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}}} \leqslant F_1(x) \leqslant F_2(x) + \frac{z}{\sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}}}\right\} \approx K(z).$$

Міра відхилення в розподілі Колмогорова—Смірнова ставить в однакові умови довільні ділянки зміни аргумента x, що є тільки першим наближенням до істини. Другим наближенням є рішення задачі, яка розглядає розходження емпіричних кривих по ділянках. Узагальнення результатів Колмогорова—Смірнова в даному напрямі представляє зміст короткого повідомлення.

В. Я. СКОРОБОГАТЬКО
аспирант

ЯВНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ОБОБЩЕННОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ТРЕМЯ АРГУМЕНТАМИ

Рассмотрим уравнение:

$$\sum_{k_1 + k_2 + k_3 = n} a_{k_1 k_2 k_3} \frac{\partial^{k_1 + k_2 + k_3} u}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \partial t^{k_3}} = 0; \; a_{k_1 k_2 k_3} = \text{Const}, \; n = 2k \geqslant 4. \quad (1)$$

Предположим, что кривая:

$$H(\xi_1, \xi_2, 1) = \sum_{k_1 + k_2 + k_3 = n} a_{k_1 k_2 k_3} \xi_1^{k_1} \xi_2^{k_2} 1^{k_3} = 0 \quad (2)$$

распадается на $\frac{n}{2}$ овалов, охватывающих начало координат, которые могут и пересекаться между собой.

Построим решение уравнения (1) в виде:

$$\varphi(x_1, x_2, t+i\varepsilon) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\tau_1^2+\tau_2^2=1} \overline{d\tau} \int\limits_{\gamma} \frac{\beta^{n-2} d\beta}{\sum\limits_{k_1+k_2+k_3=n} a_{k_1k_2k_3} \tau_1^{k_1} \tau_2^{k_2} \beta^{k_3} (x_1\tau_1 + x_2\tau_2 + (t+i\varepsilon)\beta)} \quad (3)$$

$\overline{d\tau}$ — элемент длины окружности $\tau_1^2 + \tau_2^2 = 1$.
ε — параметр.
β — пробегает в комплексной плоскости контур γ, охватывающий корни $\beta > 0$ уравнения $\triangle(\tau_1, \tau_2, \beta) =$

$$= \sum_{k_1+k_2+k_3=n} a_{k_1k_2k_3} \tau_1^{k_1} \tau_2^{k_2} \beta^{k_3} = 0$$

и не охватывающий корней $x_1\tau_1 + x_2\tau_2 + (t+i\varepsilon)\beta = 0$.

Можно убедиться в том, что:

$$\varphi(x_a, t+i\varepsilon) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\substack{\tau_1^2+\tau_2^2=1\\ \tau_1>0}} \overline{d\tau} \int\limits_{\gamma_1} \frac{\beta^{k-2} d\beta}{\triangle(\tau_1, \tau_2, \beta)(x_1\tau_1 + x_2\tau_2 + (t+i\varepsilon)\beta)}. \quad (4)$$

Контур γ_1 охватывает все корни β_i уравнения $\triangle(\tau_1, \tau_2, \beta) = 0$ и не охватывает корней $x_1\tau_1 + x_2\tau_2 + (t+i\varepsilon)\beta = 0$.

Очевидно, что аналогично (3) и (4) можно построить формулы для $\varphi(x_a, t-i\varepsilon)$.

В том случае, когда прямая $x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + t = 0$ проходит через какую-либо точку, лежащую внутри всех овалов $H(\xi_1, \xi_2, 1) = 0$, имеет место:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{\varphi(x_a, t+i\varepsilon) + \varphi(x_a, t-i\varepsilon)}{2}\right] = u(x_a, t) = 0. \quad (5)$$

Действительно, несколько преобразовав выражения для $\varphi(x_a, t+i\varepsilon)$ и $\varphi(x_a, t-i\varepsilon)$, можно записать: $u(x_a, t) =$

$$= (-1) \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{1}{(t+i\varepsilon)^{n-1}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x_1+px_2)^{n-2} dp}{\triangle\left(1, p, -\dfrac{x_1+px_2}{t+i\varepsilon}\right)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(t-i\varepsilon)^{n-1}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x_1+px_2)^{n-2} dp}{\triangle\left(1, p, -\dfrac{x_1+px_2}{t-i\varepsilon}\right)}\right]. \quad (6)$$

Путь интегрирования в (6) разбивает комплексную плоскость на верхнюю часть и нижнюю.

При деформации пути интегрирования по p, сохраняющей разбиение плоскости на две части, соответствующие области будем также называть верхней и нижней полуплоскостями.

Путь интегрирования по p для $\varphi(x_a, t+i\varepsilon)$ деформируем с таким расчетом, чтобы все группы корней $\{\sigma_j = \rho_i^{(k)} + \sigma_j^{(k)}\}$ $\rho_j^{(k)} \to p_j$; $\sigma_j^{(k)} \gtrless 0$, $\sigma_j^{(k)} > 0$ уравнения $\triangle\left(1, p, -\frac{x_1 + px_2}{t + i\varepsilon}\right) = 0$ лежали в верхней полуплоскости.

Путь интегрирования для $\varphi(x_a, t - i\varepsilon)$ выбираем симметричным относительно действительной оси с путем интегрирования для $\varphi(x_a, t + i\varepsilon)$. Теперь легко можно увидеть, что (5) справедливо. Можно проверить, что:

$$\Phi(x_1, x_2, t) = \int_0^t u(x_a, s)\,(t-s)^n\,ds \tag{7}$$

есть решение уравнения (1).

Для дальнейшего нам потребуется величина:

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \Phi(x_1, x_2, t)\,dx_1\,dx_2 = -\frac{2\pi^2}{\triangle_0}\,\frac{t^{n+2}}{(n+1)(n+2)};\ \triangle_0 = \text{Const.} \tag{8}$$

Проверить (8) можно несложными вычислениями.

Очевидно, что $\frac{\partial^3 \Phi(x_1, x_2, t)}{\partial t^3} = \Phi^{(3)}(x_1, x_2, t) =$

$$= n(n-1)(n-2)\int_0^t u(x_a, s)\,(t-s)^{n-3}\,ds$$

есть также решение (1).

Если в последнем интеграле $u(x_a, s)$ заменить на $\varphi(x_a, s)$ (путь интегрирования лежит в верхней полуплоскости), затем переставить интегрирования, то можно записать, что:

$$\Phi^{(3)} = \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon \to 0}\left\{ n(n-1)(n-2)\int\limits_{\substack{\tau_1^2 + \tau_2^2 = 1\\ \tau_1 \geqslant 0}} \overline{d\tau}\right.$$

$$\int\limits_{\gamma_2} \frac{(x_1\tau_1 + x_2\tau_2 + (t+i\varepsilon)\beta)^{n-3}\ ln\,\frac{x_1\tau_1 + x_2\tau_2 + (t+i\varepsilon)\beta}{x_1\tau_1 + x_2\tau_2 + i\varepsilon\beta}}{\triangle(\tau_1, \tau_2, \beta)}\,d\beta +$$

$$+n(n-1)(n-2)\int\limits_{\substack{\tau_1^2+\tau_2^2=1\\ \tau_1\geqslant 0}} \overline{d\tau} \tag{9}$$

$$\left.\int\limits_{\gamma_2} \frac{(x_1\tau_1+x_2\tau_2+(t-i\varepsilon)\beta)^{n-3}\, ln\, \dfrac{x_1\tau_1+x_2\tau_2+(t-i\varepsilon)\beta}{x_1\tau_1+x_2\tau_2-i\varepsilon\beta}}{\triangle(\tau_1,\tau_2,\beta)}\, d\beta\right\}.$$

Контур γ_2 не охватывает корней подлогарифмического выражения. Проверяется свойство однородности, а именно:

$$\Phi^{(3)}(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda t) = \lambda^{h-3}\Phi^{(3)}(x_1, x_2, t).$$

Образуем еще одно решение уравнения (1).

$$F(x_1, x_2, t) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi^{(3)}(x_1-y_1, x_2-y_2, t)\, f(y_1, y_2)\, dy_1\, dy_2. \tag{10}$$

Предположим, что $f(y_1, y_2)$ непрерывно дифференцируема n раз по y_1 и y_2 и что $f(y_1, y_2)\equiv 0$ при $y_1^2+y_2^2\geqslant R^2$; $R=\mathrm{Const}$. Произведем замену переменных в (10):

$$\begin{matrix} x_1-y_1=tz_1 \\ x_2-y_2=tz_2 \end{matrix}, \text{ тогда}$$

$$F(x_1, x_2, t) = t^{h-1}\iint\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi^{(3)}(z_1, z_2, 1)\, f(x_1-tz_1, x_2-tz_2)\, dz_1\, dz_2.$$

Область интегрирования не зависит от t, ибо на основании (5) $\Phi^{(3)}(z_1, z_2, 1)\equiv 0$ вне некоторой конечной области. Нетрудно проверить, что:

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k}F(x_1, x_2, t)\Big|_{t=0} = 0, \quad k=0,\ldots,n-2$$

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}F(x_1, x_2, t)\Big|_{t=0} = (n-1)!\, f(x_1, x_2)\iint\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi^{(3)}(z_1, z_2, 1)\, dz_1\, dz_2 =$$

$$= -\frac{2\pi^2 n!}{\triangle_0} f(x_1, x_2)$$

$\triangle_0$ — коэффициент при β^h в $\triangle(\tau_1, \tau_2, \beta)=0$.

Функция $K(x_1, x_2, t) = -\frac{\triangle_0}{2\pi^2 n!}\Phi^{(3)}(x_1, x_2, t)$ дает разрешающее ядро задачи Коши.