Н. Б. ЕЛЕНЕВСКАЯ
доцент

РАЗЛОЖЕНИЕ КООРДИНАТ КЕПЛЕРОВА ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ СЛУЧАЯ, КОГДА ЭКСЦЕНТРИСИТЕТ БЛИЗОК К ЕДИНИЦЕ

Задача определения траектории тел, движущихся под действием сил взаимного тяготения, как известно, до сих пор не имеет аналитического решения. Полагая в первом приближении движение невозмущенным, и, пользуясь методом вариации произвольных постоянных, получаем дифференциальные уравнения для оскулирующих элементов (уравнения Лагранжа).

Для решения этих уравнений необходимо иметь аналитические выражения пертурбационных функций через элементы кеплеровой орбиты. Эти выражения возможны только в виде бесконечных рядов.

Наибольшие трудности представляют разложения для больших наклонностей и эксцентриситетов, близких к единице.

Для больших наклонностей автором доклада был разработан метод разложения в тригонометрический ряд относительно наклонности. Что касается эксцентриситета, то рядом авторов (Шарлье, Моисеев, Еленевская) были получены ряды по степеням приращения эксцентриситета и исследована их сходимость. Оказалось, что такие ряды будут иметь отличные от нуля радиусы сходимости для любых значений e_0, кроме $e_0 = 1$ и для любых значений средней аномалии M.

Однако для значений e, близких к единице, эти ряды будут сходиться медленно. Автором доклада совместно с Я. С. Подстригачем была сделана попытка расширить области сходимости этих рядов путем ограничения угловой переменной M. Однако тогда выпадает из рассмотрения случай $\sin M = 0$, $e_0 = i$. Кроме того, для e, близких к единице, сходимость все же остается медленной.

Все вышеизложенное навело автора на мысль искать принципиально новые пути разложения функций эксцентриситета и угловых переменных. Именно, до сих пор связь полярной координаты v (истинной аномалии в невозмущенном движении) с временем давалась формулами:

$$\operatorname{tg}\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{E}{2}, \qquad (1)$$

$$E = M + e\sin E, \; M = n(t - t_0) \qquad (2)$$

Уравнение (2) есть известное уравнение Кеплера. Оно то и вводит трансцендентность в зависимость истинной аномалии от времени.

Введение промежуточной величины — средней аномалии M оправдывалось первоначально тем, что эксцентриситеты орбит рассматривались близкими к нулю. Для орбит же, эксцентриситет которых близок к единице, а тем более для гиперболических орбит, средняя аномалия теряет свой механический смысл. Это побудило нас ввести вместо средней аномалии другую промежуточную величину, физически более связанную с действительным движением.

Рассматривая семейство софокусных конических сечений, имеющих одно и то же перигельное расстояние, получаем, что при изменении эксцентриситета большая полуось эллипса будет расти, при $e=1$ она обращается в бесконечность, затем становится отрицательной.

Как было указано, средняя аномалия является искусственно введенной величиной, оправдывающей свое значение для эксцентриситетов, близких к нулю. При рассмотрении же всей совокупности движений, могущих быть при изменении эксцентриситета от нуля до бесконечности, естественнее взять за такую величину истинную аномалию одного из рассматриваемых движений, именно истинную аномалию параболического движения, так как она имеет наиболее простую связь с временем

$$\operatorname{tg}\frac{v}{2}+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{v}{2}=k\frac{t-t_0}{\sqrt{2}\,q^{3/2}}\,. \tag{3}$$

Истинная аномалия любого другого движения выразится через истинную аномалию параболического движения при помощи интегралов площадей:

$$r^2\frac{dv}{dt}=k\sqrt{q\,(1+e)}\quad\text{и}\quad r^2_{np}\frac{dv_{np}}{dt}=k\sqrt{2}\,\sqrt{q}\,. \tag{4}$$

Для степени радиуса-вектора мы можем написать выражение:

$$r^\alpha=\frac{p^\alpha}{[1+(1-\bar{q})\cos v]^\alpha}\,,\quad \bar{q}=\frac{q}{a}\,. \tag{5}$$

Разлагая в ряд Маклорена по степеням $\bar{q}$ получим

$$r^\alpha=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\alpha}(-1)\frac{l\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k+1)}{k!}\,\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-l+1)}{l!}$$

$$\frac{\cos^k v}{2^{k+l}\,a^{\alpha+k}}\;\frac{q^{\alpha+k}}{(1+\cos v)^{\alpha+k}}\,\bar{q}^l. \tag{6}$$

Величину $\frac{2q}{(1+\cos v)}$ мы можем рассматривать как выражение радиуса-вектора некоторого параболического движения, имеющего то же перигельное расстояние q. Обозначив его через r_{np}, получим выражение для r^{α}:

$$r^{\alpha}=\sum_{\chi=0}^{\infty}\sum_{\gamma=0}^{\infty}H_{\chi\gamma}\bar{r}_{np}{}^{\alpha+\gamma-\chi}\,\bar{q}^{\chi},\ \bar{r}_{np}=\frac{r_{np}}{a}, \tag{1}$$

где $H_{\chi\gamma}$ суть числовые коэффициенты.

Ряд (1) будет абсолютно сходиться относительно $\bar{q}$ в интервале

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant v_{np}\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

Подставляя ряд (1) в интегралы (4), получаем связь между v и v_{np} и пределы, в которых будет абсолютно сходится ряд относительно v.

Для большинства встречающихся на практике эксцентриситетов ряд (1) будет сходиться для значений v от $-2\pi\leqslant v\leqslant 2\pi$. В остальных случаях остающуюся часть траектории можно исследовать при помощи разложений применявшихся ранее.

Ф. М. АЛЕМАЙКИН
ст. преподаватель

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ КРИСТАЛЛИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ ПРОИЗВОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ ДИГИДРОФОСФАТА АММОНИЯ

Обычно в пьезотехнике в настоящее время употребляются кристаллические стержни дигидрофосфата аммония сечения 45° Z (сечение перпендикулярное оси Z и под углом 45° к осям X и Y) для продольных колебаний. Это делается потому, что пьезомодуль d_{36} имеет большее значение по сравнению с пьезомодулем d_{14}. А другие пьезомодули в этом кристалле отсутствуют.

Решая уравнение продольного колебания стержня, для частоты колебания стержня получим следующее выражение:

$$\nu=\frac{n}{2l}\sqrt{\frac{E}{\rho}}, \tag{1}$$

где ν — частота, l — длина стержня, ρ — плотность кристалла, n — порядковое число и E — модуль растяжения.