Но модуль растяжения E имеет следующее выражение через упругие константы S_{ik} и направляющие косинусы углов [1]

$$\frac{1}{E}=s_{33}+\{2(s_{13}-s_{33})+s_{44}\}\sin^2\varphi+\{(s_{11}+s_{33}-2s_{33}-s_{44})+$$
$$+(2s_{12}+s_{66}-2s_{11})\sin^2\alpha+(2s_{11}-2s_{12}-s_{66})\sin^4\alpha\}\sin^4\varphi. \qquad (2)$$

Подставляя различные значения E в зависимости от α и φ в формулу (1), получим целую систему волновых коэффициентов $(N=\nu l)$.

Расчеты показывают, что минимальное значение волновых коэффициентов имеет место при $\alpha=45^\circ$ и $\varphi=90^\circ$ $N=1644\,kHz.\ мм.$ Сечение $45^\circ\ Z$ имеет волновой коэффициент $N=1793$ $kHz.\ мм.$ Составлены таблицы волновых коэффициентов для температур $\pm 20^\circ$C через 10° для значений α и φ.

При практическом использовании того или иного сечения большую роль играет значение *Ткч* (температурный коэффициент частоты).

Для расчета *Ткч* можно воспользоваться формулой (1). Из формулы (1) получим выражение для подсчета *Ткч*

$$Тkч=\frac{1}{\nu}\frac{d\nu}{dT}=(\alpha_x-\alpha_z)\cos^2\varphi+\frac{\alpha_z}{2}+\frac{1}{2E}\frac{dE}{dT}, \qquad (3)$$

где α_x и α_z коэффициенты линейного растяжения кристалла по осям X и Z, T — температура °C.

На основании формулы (3) составлена таблица значений *Ткч* для тех же температур и углов.

Таблица показывает, что нулевых значений *Ткч* стержня не существует. Минимальные значения *Ткч* при значении углов $\alpha=45^\circ$, $\varphi=0^\circ$, $Ткч=-40$, а для сечения $45^\circ z$ $Ткч=-314$.

Учитывая пьезоэлектрическую возбудимость стержня к продольным колебаниям можно указать, что практически, кроме сечения $45^\circ z$, можно употреблять сечение $\alpha=45^\circ$ и $\varphi=45^\circ$.

Для этого сечения $N=1731$ и $Ткч=-188$.

Ф. М. АЛЕМАЙКИН
ст. преподаватель

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ КРИСТАЛЛИЧЕСКИХ ПЛАСТИН ДИГИДРОФОСФАТА АММОНИЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ ПО ТОЛЩИНЕ

В пьезотехнике в настоящее время колебания кристаллических пластин дигидрофосфата аммония по толщине не применяются. Это вызвано тем, что у кристалла дигидрофосфата аммония имеются только пьезомодули d_{14}, $d_{25}=d_{14}$ и d_{36}. Причем d_{36} на много больше, чем d_{14} ($d_{36}=148\cdot 10^{-8}\ CGSE$, $d_{14}=5\cdot 10^{-8}\ CGSE$). Поэтому практически до сих пор возбуждались только сдвиговые колебания (или продольные колебания в направлении 45 между осями X и Y). По аналогии с кварцем следует произвести расчет собственных колебаний пластин по толщине [1].

Уравнения движения в анизотропной среде при отсутствии массовых сил имеют вид:

$$\begin{aligned}\rho\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}&=\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}\\ \rho\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}&=\frac{\partial Y_x}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}+\frac{\partial Y_z}{\partial z}\\ \rho\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}&=\frac{\partial Z_x}{\partial x}+\frac{\partial Z_y}{\partial y}+\frac{\partial Z_z}{\partial z}\end{aligned}\tag{1}$$

где U, V, W — компоненты смещения, $X_x\cdots Z_z\cdots X_y$ — компоненты напряжения, ρ — плотность кристалла.

Рассматривая плоские волны $s=lx+my+nz$, уравнение (1) можно привести к виду:

$$\begin{aligned}\rho\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}&=\Gamma_{11}\frac{\partial^2 U}{\partial s^2}+\Gamma_{12}\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}+\Gamma_{13}\frac{\partial^2 W}{\partial s^2}\\ \rho\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}&=\Gamma_{12}\frac{\partial^2 U}{\partial s^2}+\Gamma_{22}\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}+\Gamma_{23}\frac{\partial^2 W}{\partial s^2}\\ \rho\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}&=\Gamma_{13}\frac{\partial^2 U}{\partial s^2}+\Gamma_{23}\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}+\Gamma_{33}\frac{\partial^2 W}{\partial s^2}\end{aligned}\tag{2}$$

где

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}&=c_{11}l^2+c_{66}m^2+c_{44}n^2, &\quad \Gamma_{23}&=(c_{13}+c_{44})\,mn\\ \Gamma_{22}&=c_{66}l^2+c_{11}m^2+c_{44}n^2, &\quad \Gamma_{13}&=(c_{13}+c_{44})\,ln\\ \Gamma_{33}&=c_{44}l^2+c_{44}m^2+c_{33}n^2, &\quad \Gamma_{12}&=(c_{12}+c_{66})\,lm,\end{aligned}\tag{3}$$

а l, m, n — направляющие косинусы нормали к плоскости пластинки, c_{ik} — упругие модули кристалла.

Если результирующее смещение с компонентами U, V, W представить в виде $\xi=pU+qV+rW$, то уравнение (2) примет вид:

$$\rho\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=C\frac{\partial^2\xi}{\partial s^2}.\tag{4}$$

Постоянные p, q и r удовлетворяют линейную систему уравнений

$$\begin{aligned}p\Gamma_{11}+q\Gamma_{12}+r\Gamma_{13}&=pC\\ p\Gamma_{12}+q\Gamma_{22}+r\Gamma_{23}&=qC\\ p\Gamma_{13}+q\Gamma_{23}+r\Gamma_{33}&=rC.\end{aligned}\tag{5}$$

Чтобы p, q и r были отличны от нуля, детерминат системы (5) должен быть равен нулю. А именно:

$$\begin{vmatrix} \Gamma_{11}-C & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{22}-C & \Gamma_{23} \\ \Gamma_{13} & \Gamma_{23} & \Gamma_{33}-C \end{vmatrix} = 0. \tag{6}$$

Развертывая уравнение (6) получим:

$$C^3 - AC^2 + BC + D = 0 \tag{7}$$

A, B и D суть функции l, m, n и C_{ik}.

Решая уравнение (4), получим для собственной частоты выражение

$$\nu = \frac{n}{2d}\sqrt{\frac{C_\tau}{\rho}}, \tag{8}$$

где C_τ — корень уравнения (7), а n — порядковое число и d — толщина пластинки. Уравнение (7) дает три действительных корня. И, следовательно, в анизотропной пластинке имеем три частоты. Направления этих трех колебаний определяются постоянными p, q, z.

Произведены расчеты собственных частот колебаний для различных сечений кристалла (различных α и φ) через 10° для температур $\pm$ 20°C. Расчеты показывают, что волновые коэффициенты $(N=\nu d)$ в зависимости от α при $\varphi=45°$ меняются от $N=2512$ *к Hz·мм* $(\alpha=0)$ до $N=2117$ *к Hz·мм* $(\alpha=45°)$ и дальше при $\alpha=90°$ принимают значение при $\alpha=0°$. В зависимости от φ при $\alpha=45°$ волновой коэффициент меняется от

$N=2039$ *к Hz·мм* $(\varphi=0)$ до $N=2497$ *к Hz·мм* $(\varphi=90°)$.

Очень важно, что при колебании по толщине расчетами при помощи формулы температурного коэффициента частоты *Tkч*.

$$Tk\text{ч} = \frac{1}{\nu}\frac{d\nu}{dT} = (\alpha_x - \alpha_z)\cos^2\varphi + \frac{\alpha_z}{2} + \frac{1}{2c}\frac{\partial C}{\partial T} \tag{9}$$

найдены сечения с нулевыми значениями *Tkч*.

Здесь α_x и α_z — коэффициенты линейного расширения кристалла вдоль осей X и Z, C — корень уравнения (7).

Нулевые значения *Tkч* оказались между углами $\varphi=30°-70°$ и $\alpha=20°-70°$. При этих сечениях коэффициент электромеханической связи равен примерно коэффициенту электромеханической связи кварца X-сечения.

Отсюда можно сделать вывод, что пластинки дигидрофосфата аммония можно использовать для колебаний по толщине с нулевыми.