Доповіді та повідомлення
Львівського державного університету ім. Ів. Франка
Випуск V, частина II 1955

# МЕХАНІКА І МАТЕМАТИКА

В. Ф. РОГАЧЕНКО

## ОСНОВНЫЕ ЭТАПЫ РАЗВИТИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПОСТРОЕНИЙ В ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО

На протяжении более чем 125-летнего периода своей истории неевклидова геометрия, созданная гением великого русского математика Н. И. Лобачевского, выросла в большую ветвь науки о пространстве, сыгравшую чрезвычайно важную роль в развитии не только геометрии и математики в целом, но также и физических наук. В самой неевклидовой геометрии Лобачевского выделился ряд самостоятельных разделов, имеющих свою проблематику и свои методы. К их числу относится раздел, посвященный решению различного рода конструктивных задач и исследованию возникающих в связи с этим вопросов. Этот раздел с полным правом можно назвать теорией геометрических построений в плоскости Лобачевского, так как усилиями большого количества ученых, особенно советских, к настоящему времени решение указанных вопросов продвинуто почти столь же далеко, как и решение соответствующих вопросов, составляющих предмет теории геометрических построений в плоскости Евклида.

Основные направления, по которым шло исследование построений в плоскости Лобачевского, следующие:

1. Элементарное решение конструктивных задач с помощью различных инструментов.

2. Привлечение алгебры и тригонометрии для установления критериев разрешимости конструктивных задач и исследования мощности различных инструментов.

3. Использование проективной метрики и различных интерпретаций геометрии Лобачевского для решения конструктивных задач и исследования общих вопросов теории.

В развитии теории геометрических построений в плоскости Лобачевского можно выделить три этапа.

*Первый этап* (1826 — начало 1870-х гг.) — от открытия неевклидовой геометрии Лобачевского до ее признания и введения в научный обиход. На этом этапе в решении конструктивных задач сделаны лишь первые шаги. Лобачевский не занимался непосредственным решением конструктивных задач. Его интересовал вопрос, если так можно выразиться, о доказательстве существования решения таких задач, но не конкретное выполнение построений с помощью чертежных инструментов. Однако, несмотря на это, ряд открытий Лобачевского сыграл первостепенную роль в исследовании и обосновании геометрических построений. К числу этих открытий относятся в первую очередь: исследования взаимного расположения прямых на плоскости, свойств параллельных и сверхпараллельных прямых; исследование свойств орицикла; вся неевклидова тригонометрия вообще; установление зависимости между прямоугольным треугольником и трипрямоугольником. Эти открытия Лобачевского послужили основой для создания теории геометрических построений, когда после всеобщего признания неевклидовой геометрии математики принялись усердно изучать сочинения ее создателя. Поэтому роль Лобачевского в подготовке создания теории геометрических построений в неевклидовой плоскости ни в коем случае нельзя недооценивать.

Начало исследованиям в области решения конкретных конструктивных задач в неевклидовой плоскости положил великий венгерский математик Янош Больаи, который в 1832 году в своем знаменитом «Аппендиксе» изложил основы неевклидовой геометрии, открытой им независимо от Лобачевского, хотя и несколькими годами позже. Больаи уделил много внимания решению основных задач на построение, связанных с постулатом параллельности — построению прямой, параллельной данной прямой, и построению отрезка параллельности, соответствующего данному острому углу, а также некоторых других конструктивных задач. Наиболее интересным результатом Больаи было установление им возможности (при некоторых условиях) квадратуры круга в неевклидовой геометрии при помощи линейки и циркуля. В связи с этой задачей Больаи выполнил для одного частного случая построение прямоугольного треугольника по двум данным углам. Большая заслуга Больаи состоит в том, что он поставил вопрос о решении конкретных конструктивных задач и указал пути к их решению. Это тем более замечательно, что ни Лобачевский, ни Больаи еще не знали конкретных реализаций неевклидовой геометрии.

*Второй этап* (начало 1870-х — конец 1910-х гг.).

В начале этого этапа круг задач на построение мало отличается от задач, которыми занимался Больаи. Усилия исследователей были направлены главным образом на осуществление решения основных задач без привлечения стереометрических соображений, в то время как Больаи этими соображениями широко пользовался. Кроме того, было обращено внимание на строгое обоснование этих построений, что соответствовало общему направлению исследований по основаниям геометрии того времени. Большинством исследователей (Энгель, Барбарен, Либман и другие) при построениях была широко использована установленная Лобачевским зависимость между прямоугольным треугольником и трипрямоугольником. Решались также задачи на построение треугольника по его углам и задачи, относящиеся к окружности и ее модификациям — орициклу и эквидистанте. Появляются исследования по построениям в плоскости Лобачевского средствами проективной геометрии. Первая работа в этом направлении принадлежит русскому геометру А. К. Власову. Наконец, появляются первые работы (Гроссман, Фреда), посвященные общим вопросам теории геометрических построений (критерий разрешимости задач, построения ограниченными средствами).

*Третий этап* (с начала 1920-х гг.).

Этот этап можно с полным правом назвать советским. Действительно, небывалый расцвет исследований во всех областях науки, начавшийся после Великой Октябрьской социалистической революции, привел, в частности, к значительному расширению и углублению исследований по неевклидовой геометрии. Это сказалось и на частной области этой науки — теории геометрических построений в плоскости Лобачевского. Работы советских ученых как по количеству, так и по качеству преобладают над работами иностранных ученых.

По сравнению с предыдущим этапом центр тяжести исследований переместился из области решения частных задач конструктивного характера и обоснования основных построений в область изучения общих вопросов теории. Первыми советскими работами, положившими начало исследованиям в этом направлении, были две статьи (1922 и 1927 гг.) профессора Ростовского университета Д. Д. Мордухай-Болтовского. В статьях дано строгое доказательство разрешимости циркулем и линейкой любой конструктивной задачи 2-й степени в плоскости Лобачевского. Затем последовал ряд работ Н. М. Несторовича, А. С. Смогоржевского и других, посвященных исследованию конструктивной мощности различных комплексов инструментов и установлению общих методов решения задач на построение. Наряду с этим, конечно, продолжалось также решение конкретных задач.

Преобладание исследований по общим вопросам привело к оформлению в работах советских ученых достаточно полной и стройной теории, едва ли на много уступающей в своей завершенности теории геометрических построений в евклидовой плоскости, — теории, основы которой были заложены более двух тысяч лет назад. Появляются монографии (А. С. Смогоржевский, Н. М. Несторович), специально посвященные теории геометрических построений в плоскости Лобачевского. В учебники (А. С. Смогоржевский, В. Ф. Каган) включаются отдельные главы, содержащие изложение основ этой теории, ставшей предметом университетского преподавания.

---

А. С. КОВАНЬКО

# О ПРИМЕНИМОСТИ ТЕОРЕМЫ ФИШЕРА-РИССА К ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИМ ФУНКЦИЯМ ВЕЙЛЯ

Пусть дана последовательность комплексных чисел $\{a_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ таких, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < +\infty$$

и последовательность действительных чисел $\{\lambda_n\}$ $(n=1, 2, 3 \ldots)$ таких, что величина

$$\sum_{\substack{(\kappa,\, l)\\(\kappa \neq l)}} \frac{a_\kappa \cdot \overline{a_l}}{\lambda_\kappa - \lambda_l} \left[ e^{i\,(\lambda_\kappa - \lambda_l)\,(a+T)} - e^{i\,(\lambda_\kappa - \lambda_l)\,T} \right]$$

остается ограниченной по модулю для любой области значений $k$ и $l$ $(k \neq l)$.

В этом случае имеет место теорема Фишера—Рисса в пространстве $W_2$, т. е. существует такая функция $f(x)$—$W_2$ почти-периодическая, что

$$a_n = \lim_{T \to \infty} \left[ \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(x)\, e^{-i\lambda_n x}\, dx \right] \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

и что

$$\lim_{T \to \infty} \left[ \frac{1}{T} \int_a^{a+T} |f(x)|^2 dx \right] = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2.$$

В частности, если $\sum\limits_{\substack{(\kappa, l)\\(\kappa \neq l)}} \frac{|a_\kappa|\ |a_l|}{|\lambda_\kappa - \lambda_l|}$ ограничена, то $f(x)$ оказывается $S_2$ — почти-периодической.

---

А. Н. КОСТОВСКИЙ

# ВЫРАЖЕНИЕ ДВОЙНЫМ ИНТЕГРАЛОМ ПЛОЩАДИ ПОВЕРХНОСТИ, ЗАДАННОЙ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

В работе «Квадрируемость непрерывных поверхностей, заданных в полярных координатах» автором статьи было получено необходимое и достаточное условие, чтобы непрерывная поверхность $S$ имела конечную площадь в смысле Лебега, если поверхность в полярных координатах задана уравнением $\varrho = f(\alpha, \beta)$ Или

$$\begin{aligned} x &= f(\alpha, \beta) \cos \alpha \cdot \cos \beta \\ y &= f(\alpha, \beta) \cos \alpha \cdot \sin \beta \\ z &= f(\alpha, \beta) \cdot \sin \alpha \end{aligned} \tag{1}$$

на прямоугольнике $I_0 = \underset{\alpha, \beta}{E}[\alpha_1 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_2; \beta_1 \leqslant \beta \leqslant \beta_2]$, причем

$$0 < m \leqslant f(\alpha, \beta) \leqslant M$$

$$0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_2 < \frac{1}{2} \pi$$

$$0 \leqslant \beta_1 \leqslant \beta \leqslant \beta_2 < 2\pi.$$

Обозначим площадь полиэдра $P_n$ на прямоугольнике $I_0$ символом $L(P_n, I_0)$.

Точная нижняя грань чисел $\varliminf_{n \to \infty} L(P_n, I_0)$ для всевозможных последовательностей полиэдров $\{P_n\}$, сходящихся к непрерывной поверхности $S$, называется площадью поверхности $S$ в смысле Лебега и обозначается так: $L(S, I_0)$ или $L(f, I_0)$. Следовательно

$$L(f, I_0) = \inf_{\{P_n\}} [\varliminf_{n \to \infty} L(P_n, I_0)].$$

Нами установлено необходимое и достаточное условие, чтобы площадь в смысле Лебега непрерывной поверхности, заданной системой уравнений (1), выражалась двойным интегралом

$$L(f, I_0) = \iint f(\alpha, \beta) \sqrt{f^2(\alpha, \beta) \cos^2 \alpha + \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right)^2 \cos^2 \alpha + \left(\frac{\partial f}{\partial \beta}\right)^2} \, d\alpha \, d\beta. \tag{2}$$

Для того, чтобы функции $f^2(\alpha, \beta)$ и $\varphi^2(\alpha, \beta) = f^2(\alpha, \beta) \cos \alpha + \int_{\alpha_2}^{\alpha} f^2(t, \beta) \sin t dt$ удовлетворяли одновременно условиям:

а) почти для каждого значения $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$ и $\beta \in [\beta_1, \beta_2[$ функции $f^2 (\overline{\alpha}, \beta)$ и $\varphi^2 (\alpha, \overline{\beta})$ были абсолютно непрерывны соответственно по переменным $\beta \in [\beta_1, \beta_2]$ и $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$;

б) $\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} \overset{\beta_2}{\underset{\beta_1}{\mathrm{V}}} (f^2\alpha),\, d\alpha < \infty$ и $\int\limits_{\beta_1}^{\beta_2} \overset{\alpha_2}{\underset{\alpha_1}{\mathrm{V}}} (\varphi^2, \beta)\, d\beta < \infty$, необходимо и достаточно, чтобы функция $f (\alpha, \beta)$ была абсолютно непрерывна в смысле Тонелли.

Исходя из этого, мы доказали следующую теорему.

Теорема.

Для того, чтобы площадь (в смысле Лебега) непрерывной поверхности, заданной в полярных координатах системой уравнений (1), где функция $f (\alpha, \beta)$ имеет ограниченную вариацию в смысле Тонелли (см. (1) стр. 251), выражалась двойным интегралом (2), необходимо и достаточно, чтобы функция $f (\alpha, \beta)$ была абсолютно непрерывной в смысле Тонелли на прямоугольнике $I_0$. Для этого, в свою очередь, необходимо и достаточно, чтобы площадь $L(f, I)$, рассматриваемая как функция прямоугольника $I \in I_0$ была абсолютно непрерывной функцией прямоугольника.

Полученные нами результаты для непрерывных поверхностей, заданных в полярных координатах, аналогичные результатам, полученным Л. Тонелли и И. Верченко для непрерывных поверхностей вида $f(x, y)$.

---

Л. М. ЛІСЕВИЧ

## ДО ПИТАННЯ МАЙЖЕ-ПЕРІОДИЧНОСТІ РОЗВ'ЯЗКУ ЛІНІЙНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ 2-го ПОРЯДКУ В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ

1. Розглядається диференціальне рівняння

$$A \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + 2D \frac{\partial U}{\partial x} + 2E \frac{\partial U}{\partial y} + FU = 0, \tag{1}$$

в якому коефіцієнти $A, B, C, D, E, F$ — сталі дійсні числа, а функція $U$ є функція двох змінних $x$ і $y$ $(U = U(x, y))$. Задача полягає в тому, щоб дослідити, при яких значеннях коефіцієнтів $A, B, C, D, E, F$ рівняння (1) буде мати майже періодичний розв'язок. Розв'язок рівняння (1) шукаємо у вигляді

$$U(x, y)\, e^{i(\lambda x + \mu y)}, \tag{2}$$

де $i = \sqrt{-1}$, $\lambda$ і $\mu$ — дійсні числа.

Підставивши (2) в (1), одержуємо алгебраїчне рівняння відносно $\lambda$, $\mu$:

$$A\lambda^2 + 2B\lambda\mu + C\mu^2 - 2iD\lambda - 2iE\mu - F = 0. \tag{3}$$

Рівняння (3) називатимемо «характеристичним» однорідного диференціального рівняння (1).

Можливі випадки:

а) Якщо $D \neq 0$, $E \neq 0$ і хоч один із коефіцієнтів $A$, $B$, $C$ відмінний від нуля, то при умові $(AE^2 - 2BDE + CD^2)F > 0$ розв'язок рівняння (1) буде квазіперіодичний.

б) Якщо один із коефіцієнтів $D$ або $E$ дорівнює нулеві, то при умові $(AE^2 - 2BDE + CD^2)F > 0$ розв'язок рівняння (1) буде періодичний.

в) Якщо $D = E = 0$ і хоч два із коефіцієнтів $A$, $B$, $C$ відмінні від нуля, або $A = B = C = F = 0$, а $D \neq 0$, $E \neq 0$, ми одержуємо неперервний спектр дійсних значень $\lambda$, $\mu$.

Загальний розв'язок рівняння (1) у випадку в) матиме вигляд:

$$U(x, y) \sim \sum_{m, n} C_{m, n}\, e^{i(\lambda_m x + \mu_n y)}, \tag{4}$$

де $C_{m,n}$ — довільні сталі, $\lambda_m$, $\mu_n$ — дійсні числа, які задовольняють рівняння

$$A\lambda^2_m + 2B\lambda_m\mu_n + C\mu^2_n - F = 0,$$

якщо $A = B = C = F = 0$.

II. У випадку неоднорідного лінійного диференціального рівняння 2-го порядку

$$A\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + 2D\frac{\partial U}{\partial x} + 2E\frac{\partial U}{\partial y} + FU + = f(x, y), \tag{5}$$

де $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$ — дійсні числа, а $f(x, y)$ майже-періодична функція $x$, $y$, для якої ряд Фур'є має вигляд

$$f(x, y) = \sum_{\kappa, 1} A_{\kappa, 1} e^{i}(\lambda_\kappa x + \mu_1 y)$$

розв'язок рівняння (5) буде майже-періодична, якщо показники Фур'є функції $f(x, y)$ не є коренями «характеристичного» рівняння однорідного диференціального рівняння (1), і має вигляд

$$U(x, y) = \sum_{\kappa, 1} \frac{A_{\kappa, 1}}{P(\lambda_\kappa, \mu_1)} e^{i(\lambda_\kappa x + \mu_1 y)},$$

$$\text{де} \quad P(\lambda_\kappa \mu_1) = -A\lambda^2_\kappa - 1B\lambda_\kappa\mu_1 - C\mu^3{}_1 +$$

$$+ 2iD\lambda_\kappa + 2iE\mu_1 + F.$$

---

**И. Н. ПЕСИН**

## О ДЛИНЕ ОДНОГО ВСЮДУ РАЗРЫВНОГО МНОЖЕСТВА ТОЧЕК

В одной из своих работ[1] В. В. Голубев указывает, что было бы интересно дать непосредственное геометрическое доказательство того, что плоское совершенное всюду разрывное канторово множество $E$ (топологическое произведение линейных канторовых множеств) обладает бесконечной длиной[2]. Такое доказательство можно провести следующим образом. Прежде всего заметим, что $E$, расположенное в единичном квадрате плоскости $(x, y)$, проектируется на всю диагональ этого квадрата. Это следует из того, что $E = \Pi E_n$, где $\{E_n\}$ — монотонно убывающая последовательность множеств, участвующих в построении множества $E$, каждое из которых проектируется в полную диагональ, что очевидно. Отсюда следует, что длина $l$ множества $E$ не может быть нулевой.

Пусть $\mathcal{E}$ — пересечение $E$ с квадратом с вершинами $(0, 0)$, $(0, {}^1/_3)$, $({}^1/_3, {}^1/_3)$, $({}^1/_3, 0)$ $l_1$ — длина $\mathcal{E}$. Так как после первого разбиения единичного квадрата возникают четыре множества, конгруентные $\mathcal{E}$, то ясно, что $l = 4l_1$. С другой стороны, $E$ получается из $\mathcal{E}$ преобразованием подобия с коэффициентом растяжения, равным 3; поэтому должно быть $l = 3l_1$ и $4l = 3l$, что невозможно при конечном нулевом $l$. Этим доказательство завершается.

---

[1] В. В. Голубев. Однозначные аналитические функции с совершенным множеством особых точек, 1916, стр. 149.

[2] Пусть $E$ — всюду разрывное плоское множество; пусть $\sigma$ — система простых контуров, расположенных вне друг друга, не имеющих с $E$ общих точек и таких, что всякая точка $E$ принадлежит внутренности одного из контуров. Длиной множества $E$ называется нижний предел сумм длин контуров системы $\sigma$, когда диаметр контуров системы стремится к нулю.

---