А. Н. КОСТОВСКИЙ

ВЫРАЖЕНИЕ ДВОЙНЫМ ИНТЕГРАЛОМ ПЛОЩАДИ ПОВЕРХНОСТИ, ЗАДАННОЙ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

В работе «Квадрируемость непрерывных поверхностей, заданных в полярных координатах» автором статьи было получено необходимое и достаточное условие, чтобы непрерывная поверхность S имела конечную площадь в смысле Лебега, если поверхность в полярных координатах задана уравнением $\varrho = f\ (\alpha, \beta)$ Или

$$\begin{aligned} x &= f\ (\alpha,\ \beta) \cos \alpha \cdot \cos \beta \\ y &= f\ (\alpha,\ \beta) \cos \alpha \cdot \sin \beta \\ z &= f\ (\alpha,\ \beta) \cdot \sin \alpha \end{aligned} \qquad (1)$$

на прямоугольнике $I_0 = \underset{\alpha,\beta}{E}[\alpha_1 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_2; \beta_1 \leqslant \beta \leqslant \beta_2]$, причем

$$0 < m \leqslant f\ (\alpha,\ \beta) \leqslant M$$

$$0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_2 < \frac{1}{2}\ \pi$$

$$0 \leqslant \beta_1 \leqslant \beta \leqslant \beta_2 < 2\pi.$$

Обозначим площадь полиэдра P_n на прямоугольнике I_0 символом $L\ (P_n,\ I_0)$.

Точная нижняя грань чисел $\underline{\lim}_{n\to\infty} L\ (P_n,\ I_0)$ для всевозможных последовательностей полиэдров $\{P_n\}$, сходящихся к непрерывной поверхности S, называется п л о щ а д ь ю поверхности S в смысле Лебега и обозначается так: $L\ (S,\ I_0)$ или $L\ (f,\ I_0)$. Следовательно

$$L\ (f,\ I_0) = \inf_{\{P_n\}}\ [\underline{\lim}_{n\to\infty} L\ (P_n,\ I_0)].$$

Нами установлено необходимое и достаточное условие, чтобы площадь в смысле Лебега непрерывной поверхности, заданной системой уравнений (1), выражалась двойным интегралом

$$L\,(f,I_0) = \iint f(\alpha,\beta)\sqrt{f^2(\alpha,\beta)\cos^2\alpha + \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right)^2 \cos^2\alpha + \left(\frac{\partial f}{\partial \beta}\right)^2}\, d\alpha\, d\beta. \quad (2)$$

Для того, чтобы функции $f^2\ (\alpha,\ \beta)$ и $\varphi^2\ (\alpha,\ \beta) = f^2\ (\alpha,\ \beta) \cos \alpha + \int\limits_{\alpha_2}^{\alpha} f^2\ (t,\ \beta) \sin t dt$ удовлетворяли одновременно условиям:

а) почти для каждого значения $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$ и $\beta \in [\beta_1, \beta_2]$ функции $f^2(\bar{\alpha}, \beta)$ и $\varphi^2(\alpha, \bar{\beta})$ были абсолютно непрерывны соответственно по переменным $\beta \in [\beta_1, \beta_2]$ и $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$;

б) $\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} \overset{\beta_2}{\underset{\beta_1}{V}} (f^2\alpha), \, d\alpha < \infty$ и $\int\limits_{\beta_1}^{\beta_2} \overset{\alpha_2}{\underset{\alpha_1}{V}} (\varphi^2, \beta) \, d\beta < \infty$, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(\alpha, \beta)$ была абсолютно непрерывна в смысле Тонелли.

Исходя из этого, мы доказали следующую теорему.

Теорема.

Для того, чтобы площадь (в смысле Лебега) непрерывной поверхности, заданной в полярных координатах системой уравнений (1), где функция $f(\alpha, \beta)$ имеет ограниченную вариацию в смысле Тонелли (см. (1) стр. 251), выражалась двойным интегралом (2), необходимо и достаточно, чтобы функция $f(\alpha, \beta)$ была абсолютно непрерывной в смысле Тонелли на прямоугольнике I_0. Для этого, в свою очередь, необходимо и достаточно, чтобы площадь $L(f, I)$, рассматриваемая как функция прямоугольника $I \in I_0$ была абсолютно непрерывной функцией прямоугольника.

Полученные нами результаты для непрерывных поверхностей, заданных в полярных координатах, аналогичные результатам, полученным Л. Тонелли и И. Верченко для непрерывных поверхностей вида $f(x, y)$.

Л. М. ЛІСЕВИЧ

ДО ПИТАННЯ МАЙЖЕ-ПЕРІОДИЧНОСТІ РОЗВ'ЯЗКУ ЛІНІЙНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ 2-го ПОРЯДКУ В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ

1. Розглядається диференціальне рівняння

$$A\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + 2D\frac{\partial U}{\partial x} + 2E\frac{\partial U}{\partial y} + FU = 0, \tag{1}$$

в якому коефіцієнти A, B, C, D, E, F — сталі дійсні числа, а функція U є функція двох змінних x і y $(U = U(x, y))$. Задача полягає в тому, щоб дослідити, при яких значеннях коефіцієнтів A, B, C, D, E, F рівняння (1) буде мати майже періодичний розв'язок. Розв'язок рівняння (1) шукаємо у вигляді