а) почти для каждого значения $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$ и $\beta \in [\beta_1, \beta_2[$ функции $f^2(\bar{\alpha}, \beta)$ и $\varphi^2(\alpha, \bar{\beta})$ были абсолютно непрерывны соответственно по переменным $\beta \in [\beta_1, \beta_2]$ и $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$;

б) $\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} \overset{\beta_2}{\underset{\beta_1}{\mathrm{V}}} (f^2\alpha), \, d\alpha < \infty$ и $\int\limits_{\beta_1}^{\beta_2} \overset{\alpha_2}{\underset{\alpha_1}{\mathrm{V}}} (\varphi^2, \beta) \, d\beta < \infty$, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(\alpha, \beta)$ была абсолютно непрерывна в смысле Тонелли.

Исходя из этого, мы доказали следующую теорему.

Теорема.

Для того, чтобы площадь (в смысле Лебега) непрерывной поверхности, заданной в полярных координатах системой уравнений (1), где функция $f(\alpha, \beta)$ имеет ограниченную вариацию в смысле Тонелли (см. (1) стр. 251), выражалась двойным интегралом (2), необходимо и достаточно, чтобы функция $f(\alpha, \beta)$ была абсолютно непрерывной в смысле Тонелли на прямоугольнике I_0. Для этого, в свою очередь, необходимо и достаточно, чтобы площадь $L(f, I)$, рассматриваемая как функция прямоугольника $I \in I_0$ была абсолютно непрерывной функцией прямоугольника.

Полученные нами результаты для непрерывных поверхностей, заданных в полярных координатах, аналогичные результатам, полученным Л. Тонелли и И. Верченко для непрерывных поверхностей вида $f(x, y)$.

Л. М. ЛІСЕВИЧ

ДО ПИТАННЯ МАЙЖЕ-ПЕРІОДИЧНОСТІ РОЗВ'ЯЗКУ ЛІНІЙНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ 2-го ПОРЯДКУ В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ

1. Розглядається диференціальне рівняння

$$A \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + 2D \frac{\partial U}{\partial x} + 2E \frac{\partial U}{\partial y} + FU = 0, \tag{1}$$

в якому коефіцієнти A, B, C, D, E, F — сталі дійсні числа, а функція U є функція двох змінних x і y ($U = U(x, y)$). Задача полягає в тому, щоб дослідити, при яких значеннях коефіцієнтів A, B, C, D, E, F рівняння (1) буде мати майже періодичний розв'язок. Розв'язок рівняння (1) шукаємо у вигляді

$$U(x, y)\, e^{i(\lambda x + \mu y)}, \tag{2}$$

де $i = \sqrt{-1}$, λ і μ — дійсні числа.

Підставивши (2) в (1), одержуємо алгебраїчне рівняння відносно λ, μ:

$$A\lambda^2 + 2B\lambda\mu + C\mu^2 - 2iD\lambda - 2iE\mu - F = 0. \tag{3}$$

Рівняння (3) називатимемо «характеристичним» однорідного диференціального рівняння (1).

Можливі випадки:

а) Якщо $D \neq 0$, $E \neq 0$ і хоч один із коефіцієнтів A, B, C відмінний від нуля, то при умові $(AE^2 - 2BDE + CD^2)\,F > 0$ розв'язок рівняння (1) буде квазіперіодичний.

б) Якщо один із коефіцієнтів D або E дорівнює нулеві, то при умові $(AE^2 - 2BDE + CD^2)F > 0$ розв'язок рівняння (1) буде періодичний.

в) Якщо $D = E = 0$ і хоч два із коефіцієнтів A, B, C відмінні від нуля, або $A = B = C = F = 0$, а $D \neq 0$, $E \neq 0$, ми одержуємо неперервний спектр дійсних значень λ, μ.

Загальний розв'язок рівняння (1) у випадку в) матиме вигляд:

$$U(x, y) \sim \sum_{m,\, n} C_{m,\, n}\, e^{i(\lambda_m x + \mu_n y)}, \tag{4}$$

де $C_{m,n}$ — довільні сталі, λ_m, μ_n — дійсні числа, які задовольняють рівняння

$$A\lambda^2{}_m + 2B\lambda_m\mu_n + C\mu^2{}_n - F = 0,$$

якщо $A = B = C = F = 0$.

II. У випадку неоднорідного лінійного диференціального рівняння 2-го порядку

$$A\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + 2D\frac{\partial U}{\partial x} + $$

$$+ 2E\frac{\partial U}{\partial y} + FU + = f(x, y), \tag{5}$$

де A, B, C, D, E, F — дійсні числа, а $f(x, y)$ майже-періодична функція x, y, для якої ряд Фур'є має вигляд

$$f(x, y) = \sum_{\kappa,\, 1} A_{\kappa,\, 1} e^{i}(\lambda_\kappa x + \mu_1 y)$$

розв'язок рівняння (5) буде майже-періодична, якщо показники Фур'є функції $f(x, y)$ не є коренями «характеристичного» рівняння однорідного диференціального рівняння (1), і має вигляд

$$U(x, y) = \sum_{\kappa, 1} \frac{A_{\kappa, 1}}{P(\lambda_\kappa, \mu_1)} e^{i(\lambda_\kappa x + \mu_1 y)},$$

$$\text{де} \quad P(\lambda_\kappa \mu_1) = -A\lambda^2_\kappa - 1B\lambda_\kappa \mu_1 - C\mu^3{}_1 +$$

$$+ 2iD\lambda_\kappa + 2iE\mu_1 + F.$$

И. Н. ПЕСИН

О ДЛИНЕ ОДНОГО ВСЮДУ РАЗРЫВНОГО МНОЖЕСТВА ТОЧЕК

В одной из своих работ[1] В. В. Голубев указывает, что было бы интересно дать непосредственное геометрическое доказательство того, что плоское совершенное всюду разрывное канторово множество E (топологическое произведение линейных канторовых множеств) обладает бесконечной длиной[2]. Такое доказательство можно провести следующим образом. Прежде всего заметим, что E, расположенное в единичном квадрате плоскости (x, y), проектируется на всю диагональ этого квадрата. Это следует из того, что $E = \Pi E_n$, где $\{E_n\}$ — монотонно убывающая последовательность множеств, участвующих в построении множества E, каждое из которых проектируется в полную диагональ, что очевидно. Отсюда следует, что длина l множества E не может быть нулевой.

Пусть $\mathcal{E}$ — пересечение E с квадратом с вершинами $(0, 0)$, $(0, {}^1/_3)$, $({}^1/_3, {}^1/_3)$, $({}^1/_3, 0)$ l_1 — длина $\mathcal{E}$. Так как после первого разбиения единичного квадрата возникают четыре множества, конгруентные $\mathcal{E}$, то ясно, что $l = 4l_1$. С другой стороны, E получается из $\mathcal{E}$ преобразованием подобия с коэффициентом растяжения, равным 3; поэтому должно быть $l = 3l_1$ и $4l = 3l$, что невозможно при конечном нулевом l. Этим доказательство завершается.

---

[1] В. В. Голубев. Однозначные аналитические функции с совершенным множеством особых точек, 1916, стр. 149.

[2] Пусть E — всюду разрывное плоское множество; пусть σ — система простых контуров, расположенных вне друг друга, не имеющих с E общих точек и таких, что всякая точка E принадлежит внутренности одного из контуров. Длиной множества E называется нижний предел сумм длин контуров системы σ, когда диаметр контуров системы стремится к нулю.
