

МАТЕМАТИКА, МЕХАНІКА, ФІЗИКА

А. С. КОВАНЬКО

ЗАМЕТКА ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ B_p — РАВНОМЕРНО СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим функциональное пространство со следующей метрикой

$$D_{B_p}^E(f, \varphi) = \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2T} \int_{E(-T, +T)} |f(x) - \varphi(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \quad (p \geq 1).$$

$$D_{B_p}^E(f, \varphi) = D_{B_p}(f, \varphi), \text{ если } E = (-\infty, +\infty).$$

Введем следующую величину „плотности“ множества

$$\bar{\delta}E = \overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{|E(-T, +T)|}{2T}.$$

Определение. $f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) называется B_p — равномерно суммируемой, если как бы мало ни было $\epsilon > 0$ существует такое число $\eta > 0$, что

$$D_{B_p}^E(f, 0) < \epsilon, \text{ когда } \bar{\delta}E < \eta.$$

Из данного определения вытекает, что если $f(x)$ B_p — равномерно суммируема, то $D_{B_p}^E(f, 0) = 0$, когда $\bar{\delta}E = 0$. Мы ставим себе задачу доказать обратное, а именно:

Теорема 1. Если $f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) обладает тем свойством, что $D_{B_p}^E(f, 0) = 0$, когда $\bar{\delta}E = 0$, то $f(x)$ есть B_p — равномерно суммируемая функция.

Доказательство. Предположим, что теорема не верна. Тогда можно найти такое число $A > 0$ и такую бесконечную последовательность множеств $\{E_m\}$ ($m = 1, 2, 3, \dots$), что $\lim_{m \rightarrow \infty} \bar{\delta}E_m = 0$ и что

$$D_{B_p}^{E_m}(f, 0) > A \quad (m = 1, 2, 3, \dots).$$

Предположим, что $\bar{\delta}E_m < \frac{1}{4^m}$. По смыслу сделанных предположений мы сможем построить бесконечную последовательность положительных чисел $\{T_m\}$ ($m = 1, 2, 3, \dots$), что $\lim_{m \rightarrow \infty} T_m = \infty$, которая обладает следующими свойствами:

1)

$$T_m \geq 2 T_{m+1}.$$

2)

$$|E_m(-T, -T_m)| + |E_m(+T_m, +T)| < \\ < \frac{1}{4^m} 2(T - T_m), \text{ когда } T \geq T_{m+1}.$$

3)

$$\int_{E_m(-T, -T_m)} |f(x)|^p dx + \int_{E_m(+T_m, +T)} |f(x)|^p dx > 2A^p (T - T_m), \text{ когда } T \geq T_{m+1}.$$

Построим теперь следующее множество:

$$E = E_1(-T_1, +T_1) + \sum_{m=1}^{\infty} [E_m(-T_{m+1}, -T_m) + \\ + E_m(+T_m, +T_{m+1})].$$

Вычислим $\bar{\delta}E$. Для этого рассмотрим множество $E(-T, +T)$ и будем считать, что $T_n \leq T < T_{n+1}$. Очевидно, имеем тогда, что

$$|E(-T_1, +T)| \leq |E_1(-T_1, +T_1)| + \\ + \sum_{m=1}^{m=n} \{|E_m(-T_{m+1}, -T_m)| + |E_m(+T_m, +T_{m+1})|\} \leq \\ \leq 2T_1 + 2 \sum_{m=1}^{m=n} (T_{m+1} - T_m) \frac{1}{4^m} < 2T_1 + 2 \sum_{m=1}^{m=n} T_{m+1} \cdot \frac{1}{4^m}.$$

Если $\frac{T_{m-1}}{T_m} \leq \frac{1}{2}$, то и $\frac{T_{m+1}}{T_n} \leq \frac{1}{2^{n-m+1}}$, отсюда

$$T_{m+1} \leq \frac{T_n}{2^{n-m+1}} \text{ и } T_1 \leq \frac{T_n}{2^{n-1}}.$$

Следовательно

$$|E(-T, +T)| < \frac{2T_n}{2^{n-1}} + 2T_n \sum_{m=1}^{m=n} \frac{1}{4^m} \cdot \frac{1}{2^{n-m-1}} < \\ < 2T_n \left(\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{m=1}^{m=n} \frac{1}{2^m} \right) < 2T_n \left(\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}} \right) = 2T_n \frac{1}{2^{n-2}}.$$

Поэтому

$$\frac{|E(-T, +T)|}{2T} = \frac{T_n}{T} \cdot \frac{1}{2^{n-2}} \leq \frac{1}{2^{n-2}}.$$

Отсюда очевидно, что

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|E(-T, +T)|}{2T} = 0,$$

следовательно $\overline{\delta}E = 0$.

С другой стороны, рассмотрим величину интеграла

$$\int_{E(-T_n, +T_n)} |f(x)|^p dx.$$

Имеем:

$$\int_{E(-T_n, +T_n)} |f(x)|^p dx = \int_{E_1(-T_1, +T_1)} |f(x)|^p dx + \sum_{m=1}^{m=n-1} \left\{ \int_{E_m(-T_{m+1}, -T_m)} |f(x)|^p dx \right\} + \\ + \sum_{m=1}^{m=n-1} \left\{ \int_{E_m(+T_m, +T_{m+1})} |f(x)|^p dx \right\} > 2A^p \sum_{m=1}^{m=n-1} (T_{m+1} - T_m) = \\ = 2A^p (T_n - T_1) \geq 2A^p \left(T_n - \frac{T_n}{2^{n-1}} \right) = 2T_n \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right) \cdot A^p.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{2T_n} \int_{E(-T_n, +T_n)} |f(x)|^p dx > A^p \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right),$$

откуда видно, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2T_n} \int_{E(-T_n, +T_n)} |f(x)|^p dx \geq A^p,$$

а потому тем более

$$\overline{\lim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{E(-T, +T)} |f(x)|^p dx \geq A^p,$$

или, что то же

$$D_{B_p}^E(f, 0) \geq A > 0,$$

причем $\bar{\delta}E = 0$. Мы пришли к противоречию с условиями нашей теоремы. Итак теорема доказана.

Теорема II. Если $D_{B_p}^E(f, 0) = 0$, когда $\bar{\delta}E = 0$, то $D_{B_p}(f, 0) < +\infty$.

Доказательство. В силу теоремы I вытекает, что $f(x)$ — функция B_p — равномерно суммируемая. Возьмем числа ε и η из определения B_p — равномерной суммируемости. Тогда интервал $(-\infty, +\infty)$ мы сможем разбить на такое число множеств $E_1, E_2, E_3, \dots, E_n$, чтобы $\bar{\delta}E_i < \eta$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n$), и потом

$$D_{B_p}^{E_i}(f, 0) < \varepsilon.$$

Поэтому $D_{B_p}(f, 0) \leq \sum_{i=1}^{i=n} D_{B_p}^{E_i}(f, 0) < \varepsilon \cdot n < +\infty$, что и требовалось доказать. Теорема II не имеет обратной, что видно из следующего примера.

Пример. Пусть $f(x) = 2^n$ на отрезках $I_n = \left(n-1 \leq x \leq n-1 + \frac{1}{2^n} \right)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). Вне этих отрезков

$$f(x) = 0.$$

Пусть

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} I_n.$$

Имеем

$$|E| = \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1,$$

откуда ясно, что $\bar{\delta}E = 0$.

С другой стороны, взяв $T > 0$ таким, что $(n \leq T < n+1)$, имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |f(x)| dx &\geq \frac{1}{2(n+1)} \int_{-n}^{+n} |f(x)| dx = \\ &= \frac{1}{2(n+1)} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{2^k} \cdot 2^k = \frac{1}{2\left(1 + \frac{1}{n}\right)}. \end{aligned}$$

Точно так же

$$\begin{aligned} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |f(x)| dx &\leq \frac{1}{2^n} \int_{-n-1}^{+n+1} |f(x)| dx = \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{k=n+1} \frac{1}{2^k} \cdot 2^k = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Отсюда ясно, что

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |f(x)| dx = \frac{1}{2}.$$

Значит

$$D_{B_1}(f, 0) = \frac{1}{2}.$$

Но

$$D_{B_1}^E(f, 0) = D_{B_1}(f, 0) = \frac{1}{2}$$

при условии, что $\overline{\delta E} = 0$; значит условия теоремы II не имеют места, хотя

$$D_{B_1}^E(f, 0) < +\infty.$$

А. Н. КОСТОВСКИЙ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ АРГУМЕНТОВ КОМПЛЕКСНЫХ КОРНЕЙ ПРИ ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ЛОБАЧЕВСКОГО

Пусть дано уравнение

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (1)$$

с действительными коэффициентами. Если уравнение имеет

кратные или равные по модулю корни, то предварительно от таких корней освобождаемся [см. 1].

Допустим, что корни x_{l_i} и x_{l_i+1} ($i = 1, 2, \dots, q$) — комплексные $x_{l_i} = \rho_i (\cos \varphi_i + \sqrt{-1} \sin \varphi_i)$, $x_{l_i+1} = \rho_i (\cos \varphi_i - \sqrt{-1} \sin \varphi_i)$, тогда

$$|x_1| > |x_2| > \dots > |x_{l_1}| = |x_{l_1+1}| > |x_{l_1+2}| > \dots > |x_{l_i}| = \\ = |x_{l_i+1}| > \dots > |x_{l_q}| = |x_{l_q+1}| > \dots > |x_n|. \quad (2)$$

Сделаем последовательно h известных преобразований в методе Лобачевского данного уравнения (1), получим уравнение:

$$f_h(x) = x^n + A_1^h x^{n-1} + \dots + A_{n-1}^h x + A_n^h = 0, \quad (3)$$

корни которого суть $-x_1^m, -x_2^m, \dots, -x_n^m$, где $m = 2^h$. В коэффициентах A_k^h — индекс, а не степень.

Из этого уравнения следует

$$A_k^h = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq 2p} (x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k})^m = \\ = (x_1 x_2 \dots x_k) \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq 2p} \left(\frac{x_{i_1}}{x_1}\right)^m \left(\frac{x_{i_2}}{x_2}\right)^m \dots \left(\frac{x_{i_k}}{x_k}\right)^m, \quad (4) \\ \text{где } (k = 1, 2, \dots, n).$$

Подставляя значения комплексных корней в (4), получим:

$$A_k^h = (x_1 x_2 \dots x_k)^m (1 + \varepsilon_k^h), \text{ если } k \neq l_i \ (i = 1, 2, \dots, q) \quad (5)$$

и

$$A_{l_i}^h = (x_1 x_2 \dots x_{l_i} \rho_i)^m (2 \cos m\varphi_i + \varepsilon_{l_i}^h) \ (i = 1, 2, \dots, q). \quad (6)$$

Сделав достаточное количество преобразований h данного уравнения, величины $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ можно сделать как угодно малыми и в коэффициентах A_k^h , ($k \neq l_i$) (из (5)) ими можно пренебречь.

Величина $2 \cos m\varphi_i$ может оказаться равной нулю или очень малой по абсолютной величине (последнее может случиться, если аргумент искомого корня φ_i равен или весьма близок

к значению $\frac{1}{2}\pi + \pi r$, поэтому величина $(x_1 x_2 \dots x_{l_i} \rho_i)^m \cdot (\varepsilon_{l_i}^h)$ может оказывать существенное влияние на величину $(x_1 x_2 \dots x_{l_i} \rho_i)^m (2 \cos m \varphi_i)$ и, следовательно, в пределах заданной точности первой величиной, а значит и $\varepsilon_{l_i}^h$, пренебрегать нельзя. Этот исключительный случай легко обнаружить проверкой, подставляя $\rho_i^m (\cos m \varphi_i \pm \sqrt{-1} \sin m \varphi_i)$ в уравнение (3), где ρ_i и $\cos m \varphi_i$ определяются из равенств (5) и (6) по формулам

$$\rho_i^m = \sqrt{\frac{A_{l_i+1}^h}{A_{l_i-1}^h}}, \quad \cos m \varphi_i = \frac{A_{l_i}^h}{2 A_{l_i-1}^h}, \quad (i=1, 2, \dots, q). \quad (7)$$

Если данный корень уравнению (3) не удовлетворяет с принятой при вычислении точностью или теряется большое количество верных знаков, то это служит явным признаком того, что аргумент φ_i равен или весьма близок

к величине $\frac{1}{2}\pi + \pi r$, $m=2^h$. Следовательно, $\cos m \varphi_i$ опре-

делять по формуле (7) нельзя. Тогда очевидно, что, сделав еще одно $h+1$ преобразование данного уравнения, получим уравнение $f_{n+1}(x)=0$, в котором $(\cos 2m \varphi_i)$ будет весьма близко к единице (аргумент $2m \varphi_i$ будет равен или весьма близок к $\pi + 2\pi r$). Теперь величиной $\varepsilon_{l_i}^{h-1}$ можно пренебречь и $\cos 2m \varphi_i$ мы определим по формуле

$$\cos 2m \varphi_i = \cos 2^{h+1} \varphi_i = 2 \frac{A_{l_i}^{h-1}}{A_{l_i-1}^{h+1}}.$$

Пусть корень $\rho_i^m (\cos m \varphi_i \pm \sqrt{-1} \sin m \varphi_i)$ с принятой при вычислении точностью удовлетворяет уравнению (3).

Вычисляем

$$\cos 2^{h-1} \varphi_i = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos 2^h \varphi_i}{2}} \quad (8)$$

или $\lg \cos 2^{h-1} \varphi_i = \frac{1}{2} [\lg(1 + \cos 2^h \varphi_i) - \lg 2]$, где значение $\lg(1 + \cos 2^h \varphi_i)$ лучше вычислять, пользуясь гауссовыми логарифмами сумм и разностей. Затем из уравнения $f_{h-1}(x)=0$

определяем величину $\frac{A_{l_i}^{h-1}}{2 A_{l_i-1}^{h-1}}$. Если эта величина совпадает

или незначительно отличается от значения корня в (8) (т. е. теряется несколько верных знаков), то берем значение $\cos 2^{h-1}\varphi_i$ в (8) со знаком, совпадающим со знаком коэффициента $A_{l_i}^{h-1}$, в противном случае знак $\cos 2^{h-1}\varphi_i$ устанавливаем проверкой, подставляя $\rho_i^{2^{h-1}}(\cos 2^{h-1}\varphi_i \pm \sqrt{-1} \sin 2^{h-1}\varphi_i)$ в уравнение $f_{n-1}(x) = 0$, где ρ_i определяется из (8).

Дальше аналогично определяется $\cos 2^{h-2}\varphi_i$ и т. д. Прделаав h шагов, найдем $\cos \varphi_i$, а следовательно, и аргумент пары сопряженных комплексных корней данного уравнения (1) x_{l_i} и x_{l_i+1} .

Предложенный способ определения аргументов комплексных корней существенно отличается от известных уже способов, например, от способа, предложенного Энке (2), в котором приходится составлять два многочлена, соответственно степеней $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ и $\left[\frac{n+1}{2}\right] - 1$, находить их общий наибольший делитель и, наконец, приравняв последний нулю, решать полученное уравнение. Так как коэффициенты составленных многочленов, вообще говоря, будут несоизмеримы, то нахождение общего наибольшего делителя вызывает значительные трудности. Трудность определения аргументов методом Энке будет тем больше, чем выше степени данного уравнения (1). Трудность определения аргументов способом, предложенным в настоящей статье, зависит от количества преобразований данного уравнения и не зависит от степени n данного уравнения (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Крылов. Лекции о приближенных вычислениях, Гостехиздат, 1950.

J. F. Encke. Allgemeine Auflösung der numerischen Gleichungen, „Berliner astronomisches Jahrbuch für 1841“, 1839, 66, стр. 281-338, то же в „Journal für die reine und angewandte Mathematik“ 1841, 22, стр. 193-248, то же в кн. „Gesammelte mathematische und astronomische Abhandlungen von J. F. Encke“ т. 1. Берлин, 1888.

А. Н. КУЛИК

УПРУГОЕ РАВНОВЕСИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНКИ С КРУГОВЫМ ВЫРЕЗОМ, ПОДКРЕПЛЕННЫМ ТОНКИМ УПРУГИМ КОЛЬЦОМ

Рассмотрим плоскую задачу о напряженном состоянии эллиптической пластинки с круговым вырезом, подкрепленным тонким кольцом. Центр кольца и центр симметрии

эллипса совпадают. По внешнему контуру пластинки приложено гидростатическое давление интенсивности p . Другой вид нагрузки несущественно отражается на решении задачи. Напряженное состояние в пластинке определяется функциями $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ голоморфными в двухсвязной области S , ограниченной окружностью γ радиуса R и контуром L , и удовлетворяющими граничным условиям [1]:

$$\varphi(t) + \overline{t\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = -pt + \text{const} \quad \text{на } L \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} x\overline{\varphi'(t)} - \varphi'(t) + e^{2i\alpha}\{\overline{t\varphi''(t)} + \psi'(t)\} &= 2\mu(\varepsilon_0 - i\Theta) \\ \overline{\varphi'(t)} + \varphi'(t) - e^{2i\alpha}\{\overline{t\varphi''(t)} + \psi'(t)\} &= e^{i\alpha}(X_n - iY_n) \end{aligned} \right\} \quad \text{на } \gamma \quad (2)$$

μ — модуль сдвига пластинки, α — угол между нормалью к окружности и положительным направлением оси x , ε_0 — относительное удлинение осевой линии подкрепляющего кольца. Θ — угол поворота подкрепляющего кольца в плоскости xOy . За начало отсчета дуг выберем точку $(R, 0)$, где R — радиус средней линии подкрепляющего кольца.

Раскладывая проекции напряжений X_n и Y_n в ряды Фурье:

$$X_n = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sigma^k + \overline{\alpha_k} \sigma^{-k}, \quad Y_n = \beta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sigma^k + \overline{\beta_k} \sigma^{-k}, \quad (3)$$

из равенства нулю главного вектора усилий, приложенных к контуру γ , получим, что $\alpha_0 = \beta_0 = 0$, и из равенства нулю главного момента этих усилий следует $\alpha_1 + i\beta_1 = \overline{\alpha_1} - i\overline{\beta_1}$. Из условий (2) на контуре γ найдем

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \frac{1}{z+1} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (k+2) [(\alpha_k - i\beta_k) C_k + (\alpha_{k+2} + \right. \\ &+ i\beta_{k+2}) D_{k+2}] \left(\frac{t}{R}\right)^{k+1} - \sum_{k=1}^{\infty} k [(\overline{\alpha_k} + i\overline{\beta_k}) A_k + (\overline{\alpha_{k+2}} - \\ &- i\overline{\beta_{k+2}}) B_{k+2}] \left(\frac{R}{t}\right)^{k+1} + \left[\frac{2\mu R}{g_1} + 1\right] (\alpha_2 + i\beta_2) \frac{t}{R} + \\ &+ \left[\frac{2\mu R^3}{g_1 R^2 + g_2} + 1\right] (\alpha_1 + i\beta_1) + 2\mu i (C_u + \Theta_0) \Big\}, \\ \psi'(t) &= \frac{1}{z+1} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} k [(\alpha_k - i\beta_k) F_k - (\alpha_{k+2} + i\beta_{k+2}) L_{k+2}] \left(\frac{t}{R}\right)^{k-1} - \right. \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{k=1}^{\infty} (k+2) [(\bar{\alpha}_k + i\bar{\beta}_k)M_k + (\bar{\alpha}_{k+2} - i\bar{\beta}_{k+2})N_{k+2}] \left(\frac{R}{t}\right)^{k+3} + \\
& + \left[\frac{4\mu R^3}{g_1 R^2 + g_2} + 1 - \kappa \right] (\alpha_1 + i\beta_1) \left(\frac{R}{t}\right)^2 + \left[\frac{2\mu R}{g_1} - \kappa \right] (\alpha_2 - \\
& - i\beta_2) \left(\frac{R}{t}\right)^3 \}.
\end{aligned} \quad (5)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
A_k &= \frac{\mu R g_2 k^2 + \mu R^3 g_1 - g_1 g_2 k(k+1)^2}{g_1 g_2 k^2 (k+1)^2}, \\
B_{k+2} &= \frac{\mu R^3 g_1 - \mu R g_2 k(k+2)}{g_1 g_2 k(k+1)^2 (k+2)}, \\
C_k &= \frac{\mu R^3 g_1 - \mu R g_2 k(k+2)}{g_1 g_2 k(k+1)^2 (k+2)}, \\
D_{k+2} &= \frac{g_1 g_2 (k+1)^2 (k+2) + \mu R g_2 (k+2)^2 + \mu R^3 g_1}{g_1 g_2 (k+1)^2 (k+2)^2}, \\
M_k &= \frac{\mu R g_2 k(k+2) + \mu R^3 g_1 - g_1 g_2 k(k+1)(k+2)}{g_1 g_2 k(k+1)(k+2)}, \\
N_{k+2} &= \frac{\mu R^3 g_1 + \kappa g_1 g_2 (k+1)(k+2) - \mu R g_2 (k+2)^2}{g_1 g_2 (k+1)(k+2)^2}, \\
F_k &= \frac{\mu R g_2 k^2 - \mu R^3 g_1 - g_1 g_2 \kappa k(k+1)}{g_1 g_2 k^2 (k+1)}, \\
L_{k+2} &= \frac{g_1 g_2 k(k+1)(k+2) + \mu R^3 g_1 + \mu R g_2 k(k+2)}{g_1 g_2 k(k+1)(k+2)},
\end{aligned}$$

где g_1 — жесткость подкрепляющего кольца на растяжение, g_2 — жесткость на изгиб, C_u — действительная постоянная интегрирования, Θ_o — угол поворота кольца в точке (R, o) . В формулах (5) и (4) комплексную величину $\alpha_k - i\beta_k$ обозначим через $a_k + ib_k$ и $\alpha_{k+2} + i\beta_{k+2}$ через $c_{k+2} + id_{k+2}$. Положим, что в области S искомые функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$ имеют вид

$$\begin{aligned}
\varphi(z) &= \frac{1}{z+1} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} [(a_k - ib_k)A_k + (c_{k+2} - id_{k+2})B_{k+2}] \frac{R^{k+1}}{z^k} + \right. \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} [(a_k + ib_k)C_k + (c_{k+2} + id_{k+2})D_{k+2}] \frac{z^{k+2}}{R^{k+1}} + \\
& + \left[\frac{2\mu R}{g_1} + 1 \right] \frac{(c_2 + id_2)}{2} \frac{z^2}{R} + \left[\frac{2\mu R^3}{g_1 R^2 + g_2} + 1 \right] (\alpha_1 + i\beta_1) z + \\
& \left. + 2\mu i(C_u + \Theta_o)z \right\} + A_o,
\end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \psi(z) = & \frac{1}{z+1} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} [(a_k + ib_k)F_k + (c_{k+2} + id_{k+2})L_{k+2}] \frac{z^k}{R^{k-1}} + \right. \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} [(a_k - ib_k)M_k + (c_{k+2} - id_{k+2})N_{k+2}] \frac{R^{k+3}}{z^{k+2}} - \\ & - \left[\frac{4\mu R^3}{g_1 R^2 + g_2} + 1 - \chi \right] (a_1 + i\beta_1) \frac{R^2}{z} - \\ & \left. - \left[\frac{2\mu^2}{g_1} - \chi \right] \frac{c_2 - id_2}{2} \frac{R^3}{z^2} \right\} + B_o, \end{aligned} \quad (7)$$

где A_o, B_o — комплексные постоянные, выражающиеся через неизвестные $a_k, b_k, c_{k+2}, d_{k+2}$. При таком задании функций $\varphi(z), \psi(z)$ граничные условия на γ удовлетворяются тождественно, независимо от вида коэффициентов $a_k, b_k, c_{k+2}, d_{k+2}$. Как видно из (6) и (7), искомые функции можно представить как сумму двух функций, одна из которых имеет действительные коэффициенты a_k, c_{k+2} , а другая — чисто мнимые ib_k, id_{k+2} .

$$\varphi(z) = \varphi_o(z) + \varphi_m(z); \quad \psi(z) = \psi_o(z) + \psi_m(z) \quad (8)$$

$$A_o = A^* + iA^{**}, \quad B_o = B^* + iB^{**}.$$

Подставляя формулы (8) в условие (1), получим для определения неизвестных коэффициентов $a_k, c_{k+2}, b_k, d_{k+2}$ два граничных равенства [2]:

$$\varphi_o(t) + t \cdot \overline{\varphi'_o(t)} + \overline{\psi_o(t)} = -pt + C^*, \quad \text{на } L \quad (9)$$

$$\varphi_m(t) + t \overline{\varphi'_m(t)} + \overline{\psi_m(t)} = iC^{**}, \quad (10)$$

где $\text{const} = C^* + iC^{**}$ — постоянная, подлежащая определению. Взяв в рядах для $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ конечное число членов s , подставим значения $\varphi_o(z), \psi_o(z)$ в (9). Переходя к переменной $\sigma: t = A\left(\sigma + \frac{m}{\sigma}\right)$, введем обозначения $\lambda = \frac{R}{A}$ и

$$g_1(n, k) = (-1)^{\frac{n-k}{2}} \frac{\frac{n+k}{2}!}{\frac{n-k}{2}! k!} m^{\frac{n-k}{2}},$$

$$g(n, k) = \frac{k!}{\frac{n+k}{2}! \frac{k-n}{2}!} m^{\frac{n+k}{2}}.$$

Меняя порядок суммирования и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях σ , для определения a_k и c_{k+2} получим систему:

$$\begin{aligned}
& \sum_{\kappa=0}^{s'} \alpha_{2\kappa+1}^{2n+1} a_{2\kappa+1} + \beta_{2\kappa+3}^{2n+1} c_{2\kappa+3} = \\
& = \begin{cases} -p(\kappa+1) - (\alpha_1 + i\beta_1) \left[\frac{4\mu R^3}{g_1 R^2 + g_2} + 2 \right] - \left[\frac{4\mu R^3}{g_1 R^2 + g_2} + \right. \\ \left. - 1 - \kappa \right] \lambda^2 g_1(0,0) \} & \text{при } n=0 \\ \left[\frac{4\mu R^3}{g_1 R^2 + g_2} + 1 - \kappa \right] \lambda^2 (\alpha_1 + i\beta_1) g_1(2n, 0) & \text{при } n=1, \dots, s' \end{cases} \\
& \sum_{\kappa=0}^{s'} \gamma_{2\kappa+1}^{2n+1} a_{2\kappa+1} + \delta_{2\kappa+3}^{2n+1} c_{2\kappa+3} = \\
& = \begin{cases} -p(\kappa+1)m - \left[\frac{4\mu R^3}{g_1 R^2 + g_2} + 2 \right] (\alpha_1 + i\beta_1)m & \text{при } n=0, \\ 0 & \text{при } n=1, 2, \dots, s', \end{cases}
\end{aligned}$$

где известные коэффициенты имеют вид:

$$\begin{aligned}
\alpha_{2\kappa+1}^{2n+1} &= \frac{C_{2\kappa+1}}{\lambda^{2\kappa+2}} [g(-2n-1, 2\kappa+3) + (2\kappa+3)g(2n, 2\kappa+2) + \\
&+ m \cdot (2\kappa+3)g(2n+2, 2\kappa+2)] - \\
&- (2\kappa+1)\lambda^{2\kappa+2} A_{2\kappa+1} [g_1(2n-1, 2\kappa+1) + mg_1(2n+ \\
&+ 1, 2\kappa+1)] + M_{2\kappa+1} \lambda^{2\kappa+4} g_1(2n, 2\kappa+2) + \\
&+ \frac{F_{2\kappa+1}}{\lambda^{2\kappa}} g(2n+1, 2\kappa+1); \\
\beta_{2\kappa+3}^{2n+1} &= \frac{D_{2\kappa+3}}{\lambda^{2\kappa+2}} [g(-2n-1, 2\kappa+3) + (2\kappa+3)g(2n, 2\kappa+2) + \\
&+ m(2\kappa+3)g(2n+2, 2\kappa+2)] - \\
&- (2\kappa+1)\lambda^{2\kappa+2} B_{2\kappa+3} [g_1(2n-1, 2\kappa+1) + \\
&+ mg_1(2n+1, 2\kappa+1)] + N_{2\kappa+3} \lambda^{2\kappa+4} g_1(2n, 2\kappa+2) - \\
&- \frac{L_{2\kappa+3}}{\lambda^{2\kappa}} g(2n+1, 2\kappa+1); \\
\gamma_{2\kappa+1}^{2n+1} &= A_{2\kappa+1} \lambda^{2\kappa+2} g_1(2n, 2\kappa) + \frac{C_{2\kappa+1}}{\lambda^{2\kappa+2}} [g(2n+1, 2\kappa+3) + \\
&+ (2\kappa+3)g(-2n-2, 2\kappa+2) + m(2\kappa+3)g(-2n, 2\kappa+2)] + \\
&+ \frac{F_{2\kappa+1}}{\lambda^{2\kappa}} g(-2n-1, 2\kappa+1);
\end{aligned}$$

$$\delta_{2k+3}^{2n+1} = B_{2k+3} \lambda^{2k+2} g_1(2n, 2k) + \frac{D_{2k+3}}{\lambda^{2k+2}} [g(2n+1, 2k+3) + \\ + (2k+3)g(-2n-2, 2k+2) + m(2k+3)g(-2n, 2k+2)] - \\ - \frac{L_{2k+3}}{\lambda^{2k}} g(-2n-1, 2k+1).$$

Для коэффициентов b_n , d_n получим однородную систему с детерминантом, отличным от нуля, поэтому все $b_n = d_n = 0$. Из сравнения коэффициентов при σ^0 следует, что $C^* = A^* + B^*$. Из условия сходимости рядов для X_n и Y_n , задавшись величиной s' , приравняем нулю коэффициент $c_{2s'+3}$. Получим систему уравнений, из которой определяется $\alpha_1 + i\beta_1$. Проведен подсчет функций и напряжений при отношении полуосей эллипса $\frac{b}{a} = \frac{3}{4}$. Для $s' = 2$ граничное условие проверялось в двух точках: на концах горизонтального и вертикального диаметра. Ошибка в выполнении граничного условия для $s' = 2$ не превосходит 1,5%. Для достижения большей точности выполнения граничных условий следует увеличить число s' . В таблице приведены значения напряжений по контуру спая в кольце и пластинке.

Таблица

	В пластинке			В кольце
	$\frac{\widehat{\theta\theta}}{p}$	$\frac{\widehat{rr}}{p}$	$\frac{\widehat{r\theta}}{p}$	$\frac{\widehat{\theta\theta}}{p}$
0°	— 1,990	— 0,656	0,0000	— 7,044
15°	— 1,986	— 0,654	— 0,0102	— 7,029
30°	— 1,970	— 0,647	— 0,0306	— 6,975
45°	— 1,935	— 0,635	— 0,0563	— 6,852
60°	— 1,884	— 0,620	— 0,0675	— 6,669
75°	— 1,837	— 0,607	— 0,0470	— 6,501
90°	— 1,818	— 0,603	0,0000	— 6,432

ЛИТЕРАТУРА

1. М. П. Шереметьев. Пластинка, край которой подкреплён упругим кольцом постоянного сечения. ДАН УССР №1. 1952.
2. М. З. Народецкй. Растяжение квадратной пластинки, ослабленной круговым вырезом в центре. Инж. сборник, т. 14. 1953.

КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ ВОЗЛЕ КРУГОВОГО ОТВЕРСТИЯ, ПОДКРЕПЛЕННОГО ТОНКИМ УПРУГИМ КОЛЬЦОМ

Пусть в изотропной плоскости сделано отверстие, в которое впаяно тонкое упругое кольцо, радиус осевой линии которого R . На бесконечности к плоскости приложена какая-то система нагрузок, при которой функция напряжений Эри для плоскости без отверстия имеет вид полинома степени $n+2$:

$$U_0(x, y) = C_{n+2,0} x^{n+2} + C_{n+1,1} x^{n+1} y + \dots + C_{1,n+1} x y^{n+1} + \\ + C_{0,n+2} y^{n+2} + C_{n+1,0} x^{n+1} + \dots + C_{0,n-1} y^{n+1} + \dots + \\ + C_{2,0} x^2 + C_{1,1} xy + C_{0,2} y^2.$$

Нетрудно определить по $U_0(x, y)$ соответствующие ей функции напряжений Колосова-Мусхелишвили, а по ним их производные $\Phi_0(z) = \frac{d}{dz} \frac{\partial U_0}{\partial x}$, $\Psi_0(z) = \frac{d}{dz} \frac{\partial U_0}{\partial y}$. Их общий вид будет [1]

$$\Phi_0(z) = \frac{A_n}{R^n} z^n + \frac{A_{n-1}}{R^{n-1}} z^{n-1} + \dots + \frac{A_2}{R^2} z^2 + \frac{A_1}{R} z + A_0; \\ \Psi_0(z) = \frac{B_n}{R^n} z^n + \frac{B_{n-1}}{R^{n-1}} z^{n-1} + \dots + \frac{B_2}{R^2} z^2 + \frac{B_1}{R} z + B_0.$$

Здесь коэффициенты A_j, B_j — вообще комплексные. R — пока произвольная вещественная постоянная. Так как влияние подкрепленного отверстия на напряженное состояние плоскости должно сказываться только вблизи подкрепленного выреза, то функции напряжений имеют вид:

$$\Phi_1(z) = \Phi_0(z) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{R^k}{z^k}, \quad \Psi_1(z) = \Psi_0(z) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{R^k}{z^k}.$$

Эти функции должны быть определены из граничных условий, которые относим к осевой линии подкрепляющего кольца. Делая замену $z = R\zeta$ и вводя обозначения

$$\Phi_1[z(\zeta)] = \Phi_1(\zeta), \quad \Psi_1[z(\zeta)] = \Psi_1(\zeta), \quad \Phi_0[z(\zeta)] = \Phi_0(\zeta), \\ \Psi_0[z(\zeta)] = \Psi_0(\zeta), \quad \Phi[z(\zeta)] = \Phi(\zeta), \quad \Psi[z(\zeta)] = \Psi(\zeta);$$

запишем граничные условия задачи:

$$z \overline{\Phi(\sigma)} - \Phi(\sigma) + \sigma^2 \left\{ \frac{1}{\sigma} \Phi'(\sigma) + \Psi(\sigma) \right\} = 2\mu(\varepsilon_0 - i\theta) -$$

$$\begin{aligned}
& -\kappa \sum_{k=0}^n \bar{A}_k \sigma^{-k} - \sum_{k=0}^n (\kappa-1) A_k \sigma^k - \sum_{k=0}^n B_k \sigma^{k+2}; \\
& \overline{\Phi(\sigma)} + \Phi(\sigma) - \sigma^2 \left\{ \frac{1}{\sigma} \Phi'(\sigma) + \Psi(\sigma) \right\} = \sigma [X_n(\vartheta) - i Y_n(\vartheta)] - \\
& - \sum_{k=0}^n \bar{A}_k \sigma^{-k} + \sum_{k=0}^n (k-1) A_k \sigma^k + \sum_{k=0}^n B_k \sigma^{k+2}.
\end{aligned}$$

Разложим проекции усилий X_n , Y_n в ряды Фурье

$$X_n = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sigma^k + \bar{\alpha}_k \sigma^{-k}, \quad Y_n = \beta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sigma^k + \bar{\beta}_k \sigma^{-k}.$$

Главный вектор и главный момент усилий, передаваемых на упругую плоскость, со стороны кольца равны нулю, что дает:

$$\alpha_0 = \beta_0 = 0, \quad \alpha_1 + i\beta_1 = \bar{\alpha}_1 - i\bar{\beta}_1.$$

Применяя известный способ [2], определим растягивающую силу и изгибающий момент в подкрепляющем кольце:

$$\begin{aligned}
N &= (V_{oy} + R D_\beta) \frac{1}{2} \left(\sigma + \frac{1}{\sigma} \right) + \frac{i}{2} (V_{ox} + R D_\alpha) \left(\sigma - \frac{1}{\sigma} \right) + \\
&+ R(\alpha_1 + i\beta_1) - \frac{R}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (\gamma_{k+1} \sigma^{k+1} + \bar{\gamma}_{k+1} \sigma^{-(k+1)}) + \\
&+ \frac{R}{4} [(\alpha_2 + i\beta_2) \sigma + (\bar{\alpha}_2 - i\bar{\beta}_2) \sigma^{-1}]; \\
M &= \frac{R^2}{4} [(\alpha_2 + i\beta_2) \sigma + (\bar{\alpha}_2 - i\bar{\beta}_2) \sigma^{-1}] - \frac{R}{2} \left(\sigma + \frac{1}{\sigma} \right) (V_{oy} + \\
&+ R D_\beta) - \frac{i}{2} R \left(\sigma - \frac{1}{\sigma} \right) (V_{ox} + R D_\alpha) + \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty} (\delta_{k+1} \sigma^{k+1} + \bar{\delta}_{k+1} \sigma^{-(k+1)}) + C,
\end{aligned}$$

где V_{ox} , V_{oy} , M_{oz} — проекции главного вектора и главного момента, действующих в сечении $s=0$ на оси координат. D_α и D_β — постоянные интегрирования.

$$\gamma_{k+1} = (\alpha_k - i\beta_k) \frac{1}{k} - (\alpha_{k+2} + i\beta_{k+2}) \frac{1}{k+2}; \quad (1)$$

$$\delta_{k+1} = \frac{\alpha_k - i\beta_k}{k(k+1)} + \frac{(\alpha_{k+2} + i\beta_{k+2})}{(k+1)(k+2)}; \quad (2)$$

$$C = M_{oz} + R V_{oy} - R^2(\alpha_1 + i\beta_1) + \frac{R^2}{2}(C_\alpha - iC_\beta); \quad (3)$$

C_α и C_β — постоянные интегрирования. Определив относительное удлинение оси кольца ϵ_o и Θ — угол поворота его, из условия однозначности угла поворота Θ получим

$$\frac{R^4 g_1}{g_1 R^2 + g_2} (\alpha_1 + i\beta_1) = M_{oz} + R V_{oy} + \frac{R^2}{2}(C_\alpha - iC_\beta). \quad (4)$$

Условие однозначности смещений для кольца дает:

$$(V_{oy} + R D_\beta) - i(V_{ox} + R D_\alpha) - \frac{R}{2}(\bar{\alpha}_2 - i\bar{\beta}_2) = 0. \quad (5)$$

Подставив значения ϵ_o и Θ в граничные условия задачи и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z , получим ряд соотношений для определения неизвестных величин a_k , b_k , $\alpha_k - i\beta_k$, $\alpha_{k+2} + i\beta_{k+2}$. Так как A_o есть свободный член функции $\Phi_o(z)$, который при отсутствии на бесконечности вращения действителен, то $\bar{A}_o = A_o$, и из полученных соотношений, исключая $\alpha_k - i\beta_k$, $\alpha_{k+2} + i\beta_{k+2}$, для каждой пары a_k , b_{k+2} получим свою систему уравнений, из которой найдем:

$$\begin{aligned} a_k = & \frac{\bar{A}_k}{\Delta} [\mu R g_2 (z-1)(k-1)^2(k+1) + 4\mu^2 R^4 (k-1) - \\ & - \mu R^3 g_1 (z-1)(\kappa-1) - g_1 g_2 (\kappa-1)^2 \kappa^2 (\kappa+1)] + \\ & + \frac{\bar{B}_{\kappa-2}}{\Delta} [4\mu^2 R^4 + 2\mu R^3 g_1 - 2\mu R g_2 (\kappa^2-1) - g_1 g_2 \kappa^2 (\kappa^2-1)]; \quad (6) \\ b_{k+2} = & \frac{\bar{A}_k}{\Delta} [4\mu^2 R^4 \kappa^2 - (\kappa^2-1)\kappa^2 (\kappa^2-1 + z^2) g_1 g_2 - \\ & - 2\kappa^2 \mu R^3 g_1 + 2\kappa^2 (\kappa^2-1) \mu z R g_2] + \\ & + \frac{\bar{B}_{\kappa-2}}{\Delta} [4(\kappa+1)\mu^2 R^4 - (\kappa+1)(z-1)\mu R^3 g_1 - \\ & - (\kappa-1)\kappa^2 (\kappa+1)^2 g_1 g_2 + \mu R g_2 (z-1)(\kappa-1)(\kappa+1)^2]; \\ & \text{при } \kappa \geq 1; \\ \Delta = & \mu R g_2 (\kappa^2-1)[(\kappa-1) + z(\kappa+1)] + \mu R^3 g_1 [(\kappa+1) + \\ & + z(\kappa-1)] + 4\mu^2 R^4 + z g_1 g_2 (\kappa^2-1)\kappa^2. \end{aligned}$$

Отдельно находим

$$b_2 = \frac{4\mu R^3 - (z-1)(g_1 R^2 + g_2)}{2\mu R^3 + g_1 R^2 + g_2} A_o, \quad b_3 = \frac{2\mu R - z g_1}{2\mu R + g_1} \bar{A}_1. \quad (7)$$

Для определения a_k, b_{k+2} ($k = n+3, n+4, \dots$) получим систему двух однородных уравнений с определителем Δ , который не равен нулю, поэтому все коэффициенты a_k, b_{k+2} при $k \geq n+3$ равны нулю, и задачу о напряженном состоянии плоскости решают функции

$$\begin{aligned}\Phi_1(z) &= \sum_{k=0}^n \frac{A_k}{R^k} z^k + \sum_{k=2}^{n+2} a_k \frac{R^k}{z^k}, \\ \Psi_1(z) &= \sum_{k=0}^n \frac{B_k}{R^k} z^k + \sum_{k=2}^{n+4} b_k \frac{R^k}{z^k},\end{aligned}\quad (8)$$

где a_k, b_k определяются по формулам (6), (7). Чтобы определить напряженное состояние кольца, из соотношений, полученных при сравнении коэффициентов при одинаковых степенях z , следует исключить a_k, b_k . Для каждой пары неизвестных $\bar{\alpha}_{k-1} + i\bar{\beta}_{k-1}, \bar{\alpha}_{k+1} - i\bar{\beta}_{k+1}$ получим свою систему. Рассмотрим частные случаи:

1) Чистый изгиб балки с отверстием, подкрепленным кольцом, когда размеры отверстия малы по сравнению с размерами балки. В этом случае, как известно,

$$\Phi_0(z) = \frac{A_1}{R} z, \quad \Psi_0(z) = \frac{B_1}{R} z,$$

где

$$A_1 = \frac{iM^*R}{4I}, \quad B_1 = -\frac{iM^*R}{4I}.$$

Из формул (6), (7) и (8) имеем

$$\Phi_1(z) = \frac{A_1}{R} z + a_3 \frac{R^3}{z^3}, \quad \Psi_1(z) = \frac{B_1}{R} z + b_3 \frac{R^3}{z^3} + b_5 \frac{R^5}{z^5},$$

где

$$a_3 = \frac{iM^*R}{4I} \cdot \frac{2\mu^2 R^4 + \mu R^3 g_1 - 8\mu R g_2 - 36g_1 g_2}{8\mu R g_2 (1 + 2z) + \mu R^3 g_1 (2 + z) + 2\mu^2 R^4 + 36z g_1 g_2};$$

$$b_3 = -\frac{iM^*R}{4I} \cdot \frac{2\mu R - z g_1}{2\mu R + g_1};$$

$$b_5 = \frac{iM^*R}{4I} \cdot \frac{8\mu^2 R^4 - 2(z-1)\mu R^3 g_1 - 144g_1 g_2 + 16(z-1)\mu R g_2}{8\mu R g_2 (1 + 2z) + \mu R^3 g_1 (2 + z) + 2\mu^2 R^4 + 36z g_1 g_2}.$$

Напряженное состояние кольца определяется следующими значениями M и N :

$$N = -\frac{R}{2} (\gamma_3 \sigma^3 + \bar{\gamma}_3 \bar{\sigma}^{-3})$$

$$M = \frac{R^2}{2} (\delta_3 \sigma^3 + \bar{\delta}_3 \bar{\sigma}^{-3}) + C,$$

где

$$\gamma_3 = \frac{1}{4} [2(\alpha_2 - i\beta_2) - (\alpha_4 + i\beta_4)],$$

$$\delta_3 = \frac{1}{12} [2(\alpha_2 - i\beta_2) + (\alpha_4 + i\beta_4)],$$

причем

$$\alpha_2 - i\beta_2 = (\kappa + 1) \frac{iM^*R}{4I} \cdot$$

$$\frac{2\mu R^3 g_1 + 32\mu R g_2 + 72g_1 g_2}{2\mu R^3 g_1(2 + \kappa) + 4\mu^2 R^4 + 16\mu R g_2(1 + 2\kappa) + 72\kappa g_1 g_2};$$

$$\alpha_4 + i\beta_4 = (\kappa + 1) \frac{iM^*R}{4I} \cdot$$

$$\frac{32\mu R g_2 - 4\mu R^3 g_1}{2\mu R^3 g_1(2 + \kappa) + 4\mu^2 R^4 + 16\mu R g_2(1 + 2\kappa) + 72\kappa g_1 g_2}.$$

Для определения постоянных V_{ox} , V_{oy} , M_{oz} используем условия (3), (4), (5).

2) Изгиб балки при постоянной поперечной силе. В этом случае

$$\Phi_0(z) = \frac{A_1}{R} z + \frac{A_2}{R^2} z^2; \quad \Psi_0(z) = B_0 + \frac{B_1}{R} z + \frac{B_2}{R^2} z^2;$$

где

$$A_1 = -\frac{iRQ}{4I} (l - a), \quad A_2 = \frac{iR^2Q}{8I}, \quad B_0 = -\frac{iQh^2}{2I},$$

$$B_1 = \frac{iRQ}{4I} (l - a), \quad B_2 = -\frac{iR^2Q}{4I}.$$

Напряженное состояние балки определяют функции

$$\Phi_1(z) = \frac{A_1}{R} z + \frac{A_2}{R^2} z^2 + a_2 \frac{R^2}{z^2} + a_3 \frac{R^3}{z^3} + a_4 \frac{R^4}{z^4};$$

$$\Psi_1(z) = B_0 + \frac{B_1}{R} z + \frac{B_2}{R^2} z^2 + b_4 \frac{R^4}{z^4} + b_5 \frac{R^5}{z^5} + b_6 \frac{R^6}{z^6},$$

где коэффициенты имеют значения

$$a_2 = -\frac{iR^2Q}{8I\Delta_2} [3\mu R g_2(\kappa - 1) + 4\mu^2 R^4 - \mu R^3 g_1(\kappa - 1) - 12g_1 g_2] +$$

$$+ \frac{iQh^2}{2I\Delta_2} [4\mu^2 R^4 + 2\mu R^3 g_1 - 6\mu R g_2 - 12g_1 g_2],$$

$$a_3 = -\frac{iRQ}{4I\Delta_3} (l - a) [2\mu^2 R^4 + \mu R^3 g_1 - 8\mu R g_2 - 36g_1 g_2];$$

$$\begin{aligned}
a_4 &= \frac{iR^2Q}{4\Delta_4} (4\mu^2R^4 + 2\mu R^3g_1 - 30\mu Rg_2 - 240g_1g_2), \\
b_4 &= -\frac{iR^2Q}{8\Delta_2} [16\mu^2R^4 - 12(3 + \kappa^2)g_1g_2 - 8\mu\kappa R^3g_1 + 24\mu\kappa Rg_2] + \\
&+ \frac{iQh^2}{2\Delta_2} [12\mu^2R^4 - 3(\kappa - 1)\mu R^3g_1 - 36g_1g_2 + 9(\kappa - 1)\mu Rg_2]; \\
b_5 &= -\frac{iRQ}{4\Delta_3} (l - a)[8\mu^2R^4 - 2(\kappa - 1)\mu R^3g_1 - \\
&- 144g_1g_2 + 16\mu Rg_2(\kappa - 1)]; \\
b_6 &= \frac{iR^2Q}{4\Delta_4} [20\mu^2R^4 - 5(\kappa - 1)\mu R^3g_1 - \\
&- 1200g_1g_2 + 75(\kappa - 1)\mu Rg_2]; \\
\Delta_2 &= 3\mu Rg_2(1 + 3\kappa)\mu R^3g_1(3 + \kappa) + 4\mu^2R^4 + 12\kappa g_1g_2; \\
\Delta_3 &= 8\mu Rg_2(1 + 2\kappa) + \mu R^3g_1(2 + \kappa) + 2\mu^2R^4 + 36\kappa g_1g_2; \\
\Delta_4 &= 15\mu Rg_2(3 + 5\kappa) + \mu R^3g_1(5 + 3\kappa) + 4\mu^2R^4 + 240\kappa g_1g_2.
\end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Г. Савин. Концентрация напряжений около отверстий. ГИТТЛ. 1951.
2. М. П. Шереметьев. Пластика, край которой подкреплён упругим кольцом постоянного сечения. ДАН УССР, № 1, 1952.

Н. П. ФЛЕЙШМАН

УПРУГОЕ РАВНОВЕСИЕ ПЛАСТИН, УСИЛЕННЫХ КРИВОЛИНЕЙНЫМИ РЕБРАМИ ЖЕСТКОСТИ

Рассмотрим первую основную задачу изгиба изотропной тонкой плиты, срединная плоскость которой занимает некоторую конечную многосвязную область S плоскости $z = x + iy$ с границей L , состоящей из совокупности $m + 1$ простых замкнутых кривых L_j ($j = 1, 2, \dots, m + 1$). Плита усилена l кольцевыми ребрами жесткости из другого материала, осевые линии которых обозначены через $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_l$. Области, заключенные внутри контуров γ_k ($k = 1, 2, \dots, l$), предполагаются, для простоты, односвязными. Линии $\Gamma = \sum_{k=1}^l \gamma_k$ и L не касаются и не пересекают друг друга.

Ребра жесткости рассматриваются как упругие тонкие кольца, одна из главных осей инерции поперечных сечений

которых лежит в плоскости xoy . Предполагается, что сопряжение между областями плиты расположенными внутри и вне ребер жесткости, происходит соответственно по кривым γ_k .

Принимая во внимание, что при переходе через γ_k внутренние усилия (изгибающий момент и поперечная сила) в плите претерпевают неизвестные скачки, сводим поставленную задачу к определению двух функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, кусочно-голоморфных в области S с линией скачков Γ , и l функций $I_k(t)$, определенных на контурах γ_k ($k=1, 2, \dots, l$) соответственно. Для нахождения этих функций получены граничные условия:

$$-\kappa\overline{\varphi(\sigma)} + \overline{\sigma\varphi'(\sigma)} + \psi(\sigma) = \Phi(\sigma) - iC_{1j}\overline{\sigma} + C_{2j} \text{ на } L_j \quad (1)$$

$$(j=1, 2, \dots, m+1),$$

$$-\kappa\overline{\varphi^+(t)} + \overline{t\varphi'^+(t)} + \psi^+(t) = -\kappa\overline{\varphi^-(t)} + \overline{t\varphi'^-(t)} + \psi^-(t) + F(t) \text{ на } \Gamma, \quad (2)$$

$$\overline{\varphi^+(t)} + \overline{t\varphi'^+(t)} + \psi^+(t) = \overline{\varphi^-(t)} + \overline{t\varphi'^-(t)} + \psi^-(t) + F^0(t) \text{ на } \Gamma, \quad (3)$$

$$\overline{\varphi^-(t)} + \overline{t\varphi'^-(t)} + \psi^-(t) = P(t) \text{ на } \Gamma, \quad (4)$$

где $F(t)$ и $P(t)$ — неизвестные функции, принимающие на каждом контуре γ_k соответствующие значения

$$F_k(t) = -\frac{1}{2D(1-\nu)}I_k(t) + f_k^0(t),$$

$$P_k(t) = \frac{1}{4i} \int_{\gamma_k} J_k(t) d\bar{t} + \frac{1}{2i} C_{3k} + P_k^0(t).$$

Здесь

$$J_k(t) = I_k^*(t) \left(\frac{1}{C_k} + \frac{1}{A_k} \right) + \overline{I_k^*(t)} \left(\frac{1}{C_k} - \frac{1}{A_k} \right),$$

$$I_k^*(t) = t[I_k(t) - iV_{bk}^0(t - \bar{t}_0) + C_{4k}];$$

$\Phi(\sigma)$, $F^0(t)$, $f_k^0(t)$ и $P_k^0(t)$ — известные функции, зависящие от заданной внешней нагрузки; $t = \frac{ds}{ds}$, s — дуга контура γ_k ; t и

z — аффиксы точек на Γ и L , t_0 — аффикс точки $s=0$; C_{1j} , C_{2j} , C_{3k} — константы, определяющиеся из решения задачи; A_k и C_k — жесткости кольца на изгиб и кручение, ν — коэффициент Пуассона, D — цилиндрическая жесткость плиты, $\kappa = \frac{3+\nu}{1-\nu}$.

Вещественная постоянная V_{bk}'' и комплексная постоянная C_{4k} определяются из условий однозначности прогибов и деформаций кольца, имеющих вид

$$\int_{\Gamma_k} J_k(t) d\bar{t} = 0, \quad \operatorname{Im} \int_{\Gamma_k} t J_k(t) d\bar{t} = 0, \quad (k=1, 2, \dots, l).$$

Граничное условие (4) впервые было получено другим способом М. П. Шереметьевым [1].

При определении искомых функций по граничным условиям (1) — (4) следуем приему Д. И. Шермана [2]. Из (2) и (3) легко вывести, что

$$\begin{aligned} \varphi^+(t) - \varphi^-(t) &= -g(t) \quad \text{на } \Gamma, \\ \psi^+(t) - \psi^-(t) &= h(t) \quad \text{на } \Gamma, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$g(t) = \frac{1}{\kappa+1} [\overline{F(t)} - F^\circ(t)],$$

$$h(t) = \overline{g(t)} + t\overline{g'(t)} + F^\circ(t), \quad g'(t) = \frac{dg(t)}{dt}.$$

Решая задачи линейного сопряжения (5), находим

$$\varphi(z) = \varphi^\circ(z) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g(t) dt}{t-z}, \quad (6)$$

$$\psi(z) = \psi^\circ(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{h(t) dt}{t-z},$$

где $\varphi^\circ(z)$ и $\psi^\circ(z)$ — неизвестные функции, голоморфные во всей области S и подлежащие определению.

Подставляя функции (6) в (1), приходим к первой основной задаче изгиба плиты, ограниченной контуром L . Решая эту задачу, выражаем функции $\varphi^\circ(z)$ и $\psi^\circ(z)$, а затем и кусочно-голоморфные функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ (6) через неизвестные функции $I_k(t)$ ($k=1, 2, \dots, l$). Для определения последних используем условие (4), в которое подставляем функции

$\varphi(z)$ и $\psi(z)$ и получаем l уравнений — по одному на каждом контуре γ_k ($k=1, 2, \dots, l$). Зная $I_k(t)$, определяем окончательно функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$. Задача решена.

Указанный выше алгоритм решения задачи остается таким же и при решении других основных задач изгиба плит, усиленных ребрами жесткости, а также при решении аналогичных задач плоской теории упругости. Интересно отметить, что для определения внутренних (изгибающего L_{nk} и крутящего $L_{\tau k}$) моментов в кольце γ_k нет надобности определять напряженное состояние плиты. Для этого достаточно найти функции $I_k^*(t)$, через которые указанные величины определяются по формуле

$$L_{\tau k} - iL_{nk} = I_k^*(t). \quad (7)$$

Те же моменты в кольце выражаются через прогиб w или через изгибающие (M_n и M_τ) и крутящие ($H_{n\tau}$) моменты в плите на γ_k по формуле

$$\begin{aligned} \frac{L_{nk}}{A_k} + i \frac{L_{\tau k}}{C_k} &= -\frac{1}{2} \left(\Delta w + 4t^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) = \\ &= \frac{1}{D(1-\nu^2)} [M_\tau - \nu M_n + i(1+\nu)H_{n\tau}]. \end{aligned} \quad (8)$$

Принимая во внимание физический смысл левой части (8), заключаем, что правая часть этой формулы остается инвариантной при переходе через γ_k из одной области плиты в другую. Другими словами, имеет место равенство

$$\left[\frac{M_\tau - \nu M_n + i(1+\nu)H_{n\tau}}{D(1-\nu^2)} \right]^+ = \left[\frac{M_\tau - \nu M_n + i(1+\nu)H_{n\tau}}{D(1-\nu^2)} \right]^-, \quad (9)$$

из которого легко можно непосредственно вывести граничные условия (5). Формула (9), очевидно, сохраняет силу и при отсутствии кольца, т. е. для ступенчатых плит, для которых такой результат получен другим путем М. П. Шереметьевым [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. М. П. Шереметьев Украинский математический журнал, т. V, № 1, стр. 58 — 78, 1953.
2. Д. И. Шерман. ДАН СССР, т. XXVII, № 9 1940.

О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ ТЕОРИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПОВЕРХНОСТЯХ

Мы будем придерживаться символики, приведенной нами в [1], а также используем определенные там понятия (поверхности, ковариантного равенства и др.) и терминологию.

1. На произвольной поверхности R рассмотрим поля следующих геометрических объектов: двух относительных инвариантов a и f , т. е. величин со следующим законом трансформации при замене $\tilde{z} = \tilde{z}(z)$ локального параметра z на $\tilde{z}$:

$$\tilde{a}(\tilde{z}) = J_{z/\tilde{z}} \cdot a(z(\tilde{z})), \quad \tilde{f}(\tilde{z}) = J_{z/\tilde{z}} \cdot f(z(\tilde{z})), \quad (1)$$

где $z = x^1 + ix^2$, $\tilde{z} = \tilde{x}^1 + i\tilde{x}^2$, а $J_{z/\tilde{z}}$ есть функциональный определитель замены; двувалентной контравариантной тензорной плотности a^{ij} :

$$\tilde{a}^{ij} = J_{z/\tilde{z}} \cdot a^{ke} \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^e} \quad (2)$$

и „вектора“ a^i с законом трансформации:

$$\tilde{a}^i = J_{z/\tilde{z}} \cdot a^{kl} \frac{\partial^2 \tilde{x}^i}{\partial x^k \partial x^l} + J_{z/\tilde{z}} \cdot a^j \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}. \quad (3)$$

Можно проверить, что формула (3) обладает групповым свойством; этим же свойством, как известно, обладают и формулы (1), (2).

Под дифференциальным уравнением второго порядка на поверхности R будем понимать равенство:

$$a^{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} + a^i \frac{\partial u}{\partial x^i} = au + f, \quad (4)$$

имеющее ковариантный характер, как это следует из формул (1), (2), (3). В частности, сопряженные квазигармонические функции u , u' удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} b^{js} \frac{\partial^2 u}{\partial x^j \partial x^s} + b^i \frac{\partial u}{\partial x^i} &= 0, \\ b'^{js} \frac{\partial^2 u'}{\partial x^s \partial x^j} + b'^i \frac{\partial u'}{\partial x^i} &= 0, \end{aligned} \quad (4')$$

¹ Все встречающиеся индексы принимают значения 1, 2.

где обозначено:

$$b^{js} = \frac{1}{2} (\tilde{b}^{js} + \tilde{b}^{sj}), \quad \tilde{b}^{js} = \epsilon^{ij} \alpha_i^s, \quad b^i = \epsilon^{sr} \frac{\partial \alpha_r^i}{\partial x^s},$$

$$b'^{js} = \frac{1}{2} (\tilde{b}'^{js} + \tilde{b}'^{sj}), \quad \tilde{b}'^{js} = \epsilon^{ij} \alpha_i'^s, \quad b'^i = \epsilon^{sr} \frac{\partial \alpha_r'^i}{\partial x^s}. \quad (5)$$

Здесь $\alpha_i'^j$ есть H -непрерывно дифференцируемое¹ тензорное поле, введенное в [1], а α_i^j — поле ему сопряженного тензора. Легко проверяется, что величины (5) имеют законом трансформации формулы (2) и (3). Все наши рассуждения относятся к случаю, когда величины (2) и (3) определены по формулам (5). Указанные ограничения вызваны, вероятно, скорее используемым методом, в основе которого лежат предложения, доказанные для квазигармонических функций (см. [1]), чем существом вопроса. Кроме того, всегда предполагается выполненным неравенство $a(P) \geq 0$, $P \in R$.

2. Пусть D — область на поверхности R , ограниченная конечным числом замкнутых кривых Жордана Γ_κ , $\kappa = 1, 2, \dots, n$, причем множество $D + \Gamma$ компактно на R . Функцией Грина $G(P, Q)$ уравнения (4) (при $f \equiv 0$) в области D будем называть функцию, определяемую следующими условиями: 1) $G(P, Q)$ есть решение (по P) уравнения (4) при $f \equiv 0$ в D ; 2) $G(P, Q) \equiv 0$ при $P \in \Gamma$, $Q \in D$, исключая конечное число точек $P \in \Gamma$, $\nu = 1, 2, \dots, q$; 3) $G(P, Q)$ непрерывна в D , исключая точку $P = Q$, где она обладает логарифмическим полюсом. Если построить (монотонное) исчерпание поверхности R ее компактными частями и определить принадлежащие этим последним функции Грина, то естественно можно прийти к понятию функции Грина всей поверхности R , совершив предельный переход.

Пусть γ — часть границы Γ области D . Регулярная квазигармоническая функция $\omega(P)$, $P \in D$, исчезающая (исключая конечное число точек) на $\Gamma - \gamma$ и равная (тоже исключая конечное число точек) единице на γ , называется квазигармонической мерой дуги γ относительно D в точке P . Вышеописанный предельный переход приводит нас к понятию квазигармонической меры „идеальной“ границы произвольной открытой поверхности R .

С помощью квазигармонической меры, существование которой (в области) доказывается альтернирующим методом Шварца, обоснованным для квазигармонических функций в [1], легко доказывается, что условия 1 — 3 однозначно определяют функцию Грина в области D . Единственность функции Грина, принадлежащей всей поверхности, устанавливается.

¹ Под H -непрерывностью мы понимаем непрерывность в смысле Гельдера.

дывается с помощью характеристического ее свойства: она есть наименьшая из всех неотрицательных решений уравнения (4), при $f \equiv 0$, достаточно гладких на всей поверхности, исключая точку $Q \in R$, где они имеют логарифмический полюс (ср. [2], а также [3], гл. IV).

Теорема 1. Для того, чтобы (открытая) поверхность R обладала (единственной) квазигармонической функцией Грина, необходимо и достаточно, чтобы поверхность имела идеальную границу положительной квазигармонической меры.

Ограничения на меру идеальной границы поверхности отпадают, если в уравнении (4) $a \neq 0$ на R . В этом случае справедлива следующая теорема:

Теорема 2. На всякой открытой поверхности R существует однозначно определенная функция Грина уравнения (4) (при $f \equiv 0$).

Доказательство проводится методом, обобщающим на рассматриваемый вид дифференциальных уравнений метод Мирберга (см. его статью [2]).

Как следствие из теоремы 2 получаем следующее утверждение:

Теорема 3. На всякой замкнутой поверхности существует неотрицательное решение $G(P, Q)$ уравнения (4) (при $f \equiv 0$) с полюсом в произвольной точке $Q \in R$, однозначно определяемое условиями:

- 1) $G(P, Q)$ на $R - Q$ непрерывна вместе с первыми и вторыми производными.
- 2) $G(P, Q)$ имеет в точке Q логарифмический полюс.
3. Имеет место следующая теорема:

Теорема 4. На произвольной поверхности R , обладающей идеальной границей положительной квазигармонической меры, существует частное решение u_0 уравнения (4).

Построение искомого решения проводится в два приема. Основываясь на теореме 2, строится неотрицательное решение u_1 уравнения (4), при $f \equiv 0$, следуя статье [4]; если же использовать некоторые факты из теории гильбертова пространства квазигармонических функций, рассмотренного нами в [1], то, следуя статье [5], можно построить частное решение уравнения (4) при $a \equiv 0$: $u_2(P)$. Тогда можно положить $u_0 = u_1 + u_2$. Очевидно, что общее решение уравнения (4) дается формулой $u = u_0 + h$, где h — произвольная регулярная квазигармоническая функция на поверхности.

В качестве приложения решим следующую задачу. Пусть на поверхности R задано H -непрерывно дифференцируемое ковариантное поле v_i , обладающее некоторыми вообще отличными от нуля ротором и дивергенцией в римановой метрике, определяемой положительно определенным метрическим тензором g_{ij} , заданным на R и H -непрерывно диф-

ференцируемым. Требуется разложить поле $v^i = g^{ij} v_j$, где тензор g^{ij} определяется из (однозначно разрешимой) системы $g^{is} g_{sj} = \delta^j_i$ (δ^j_i — символ Кронекера), на сумму трех полей u^i , $\tilde{u}^i$, u'^i , подчиненных следующим условиям:

$$u^i_{,i} = v^i_{,i}, \text{ rot } u_i = 0;$$

$$\tilde{u}^i_{,i} = 0, \text{ rot } \tilde{u}_i = \text{rot } v_i;$$

$$u'^i_{,i} = 0, \text{ rot } u'_i = 0,$$

где $u^i_{,i}$ означает упомянутую дивергенцию:

$$u^i_{,i} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g} g^{ij} u_j) = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (u^i \sqrt{g}).$$

Здесь $g > 0$ есть определитель тензора g_{ij} .

Теорема 5. Сформулированная задача, в условиях теоремы 4, всегда имеет H -непрерывно дифференцируемое разложение.

ЛИТЕРАТУРА.

1. Данилюк И. И. О некоторых вопросах теории эллиптических систем дифференциальных уравнений первого порядка на поверхностях (в печати).
2. Myrberg L. Über die Existenz der breenschen Funktion der Gleichung $\Delta u = c(P)$. u auf Riemannschen Flächen, Ann. Acad. Scient. Fennicae, Helsinki, 1954.
3. Неванlinna. Униформизация, М. 1955.
4. Myrberg L. Über die Integration der Differentialgleichung $\Delta u = c(P)$. u auf offenen Riemannschen Flächen, Math. Scand., 2 (1954), 142 — 152.
5. Myrberg L. Über die Integration der Poissonschen Gleichung auf offenen Riemannschen Flächen, Ann. Acad. Scient. Fennicae, Helsinki, 1953.

А. Б. ДРАПКИН

ФУНКЦИОНАЛЬНО-ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВЕННОГО СЛУЧАЯ

В. И. Смирнов и С. Л. Соболев ввели понятие функционально-инвариантного решения волнового уравнения [1].

Функцию $W(x, y, z, t)$, являющуюся решением уравнения

$$\square W \equiv W_{xx} + W_{yy} + W_{zz} - W_{tt} = 0, \quad (1)$$

называют функционально-инвариантным решением этого уравнения в некоторой области D изменения действительных переменных x, y, z, t , если произвольная функция $f(W)$, дважды дифференцируемая вдоль совокупности значений W , соответствующих действительным x, y, z, t из области D , является также решением $\square W = 0$.

Н. П. Еругин [2] обобщил результаты Смирнова-Соболева на четырехмерный случай и дал общий вид функционально-инвариантного решения уравнения $\square W = 0$.

Обобщая понятие функционально-инвариантного решения, Я. Б. Лопатинский рассмотрел семейство решений волнового уравнения вида $U\Phi(V)$, где Φ — произвольная, нужное число раз дифференцируемая функция, а $U(x, y, z, t)$ и $V(x, y, z, t)$ подлежат определению, и нашел функции $U; V$ в конечном виде для случая трех измерений [3].

С помощью метода Я. Б. Лопатинского [3] для широкого класса случаев, охватывающих случай Н. П. Еругина, удается получить семейство решений $\square W = 0$ вышеуказанного вида $U\Phi(V)$ и определить функции $U; V$ в конечном виде для четырехмерного случая.

Задача нахождения функционально-инвариантных решений уравнения $\square W = 0$ сводится к интегрированию следующей системы уравнений:

$$U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} - U_{tt} = 0, \quad (2)$$

$$U_x V_x + U_y V_y + U_z V_z - U_t V_t + \frac{1}{2} U(V_{xx}^2 + V_{yy}^2 + V_{zz}^2 - V_{tt}^2) = 0, \quad (3)$$

$$V_x^2 + V_y^2 + V_z^2 - V_t^2 = 0. \quad (4)$$

1. Интегрируя (4) методом Коши, получим:

$$\left. \begin{aligned} V &= \varphi(\alpha, \beta, \gamma) \\ (x - \alpha)V \sqrt{\varphi_\alpha^2 + \varphi_\beta^2 + \varphi_\gamma^2} + \varphi_\alpha t &= 0 \\ (y - \beta)V \sqrt{\varphi_\alpha^2 + \varphi_\beta^2 + \varphi_\gamma^2} + \varphi_\beta t &= 0 \\ (z - \gamma)V \sqrt{\varphi_\alpha^2 + \varphi_\beta^2 + \varphi_\gamma^2} + \varphi_\gamma t &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (5)$$

где α, β, γ — параметры, $V_x = \varphi_\alpha$; $V_y = \varphi_\beta$; $V_z = \varphi_\gamma$; $V_t = \sqrt{\varphi_\alpha^2 + \varphi_\beta^2 + \varphi_\gamma^2}$; $\varphi_\alpha^2 + \varphi_\beta^2 + \varphi_\gamma^2 \neq 0$ а φ — произвольная функция. Положив

$$V_x = V_t \sin \Theta \cos \omega; \quad V_y = V_t \sin \Theta \sin \omega; \quad V_z = V_t \cos \Theta, \quad (6)$$

имеем

$$\left. \begin{aligned} x - \alpha + t \sin \Theta \cos \omega &= 0 \\ y - \beta + t \sin \Theta \sin \omega &= 0 \\ z - \gamma + t \cos \Theta &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (7)$$

При этом предполагается, что $V_t \neq 0$ и $\varphi_\alpha^2 + \varphi_\beta^2 \neq 0$. Случай $\varphi_\alpha^2 + \varphi_\beta^2 = 0$ рассмотрен в работе отдельно, причем и в этом случае функции U ; V определены в конечном виде.

Производные функций Θ и ω по x, y, z, t выражаются через производные от тех же функций по параметрам α, β, γ . Дифференцируя систему (7) полным образом, получим систему уравнений, определяющих $dx; d\beta; d\gamma$. Ее определитель Δ вычисляется непосредственно.

Учитывая условие полноты системы (6), которое в предположении, что $\Theta_x \sin \omega - \Theta_\beta \cos \omega = 0^*$ имеет вид

$$\omega_x \cos \Theta \cos \omega + \omega_\beta \cos \Theta \sin \omega - \omega_\gamma \sin \Theta = 0 \quad (8)$$

и положив

$$\left. \begin{aligned} \Theta_x \cos \Theta \cos \omega + \Theta_\beta \cos \Theta \sin \omega - \Theta_\gamma \sin \Theta &= \lambda \\ -\omega_x \sin \Theta \sin \omega + \omega_\beta \sin \Theta \cos \omega &= z \end{aligned} \right\}, \quad (9)$$

получим выражение определителя $\Delta(t)$.

$$\Delta = -1 + (\lambda^2 + z)t - \lambda z t^2. \quad (10)$$

От характера корней $\Delta(t)$ существенно зависит вид решения.

2. Пусть корни $\Delta(t)$ бесконечны, т.е. пусть $\lambda = z = 0$. Тогда из (8) и (9) с помощью (7) и учитывая зависимость функций Θ и ω имеем уравнения, определяющие V как функцию от x, y, z, t .

$$\left. \begin{aligned} x \sin \Theta \cos \omega + y \sin \Theta \sin \omega + z \cos \Theta + t &= f(\omega); \\ \Theta &= \phi(\omega); \quad V = \omega \end{aligned} \right\}, \quad (1.1)$$

где $f; \phi$ — произвольные функции V .

Легко подсчитать, что $\square \omega = 0$, и уравнение (3) принимает вид

$$U_x \sin \Theta \cos \omega + U_y \sin \Theta \sin \omega + U_z \cos \Theta - U_t = 0. \quad (3')$$

Общее решение (3') имеет вид

$$U = U[\omega; A(\omega, x, y); B(\omega, x, y, z)].$$

Вид функции $U(\omega, A, B)$ определяется из (2); оказывается, что

$$U = \frac{\varphi_1[A + iB \sin \Theta; \omega] + \varphi_2[A - iB \sin \Theta; \omega]}{A + B\psi'(\omega) - f'(\omega)}, \quad (1.2)$$

где φ_1 и φ_2 — произвольные аналитические функции.

$$A = -x \sin \Theta \sin \omega + y \sin \Theta \cos \omega;$$

* В этом предположении проведено все дальнейшее исследование.

$$B = x \cos \Theta \cos \omega + y \cos \Theta \sin \omega - z \sin \Theta.$$

Если же в частности

$$\varphi_1 = \frac{C(\omega)}{2i \sin \Theta} [i \sin \Theta + \psi'(\omega)] (A + iB \sin \Theta) - \frac{C(\omega)}{2} f'(\omega),$$

$$\varphi_2 = \frac{C(\omega)}{2i \sin \Theta} [i \sin \Theta - \psi'(\omega)] (A - iB \sin \Theta) - \frac{C(\omega)}{2} f'(\omega),$$

где $C(\omega)$ — произвольная функция, то $U = C(\omega)$ и мы получаем случай, рассмотренный Н. П. Еругиным [2].

3. Если корни $\Delta(t)$ конечны, т. е. если $\lambda \neq 0$, $\kappa \neq 0$; то принимая V, Θ, ω, t за новые независимые переменные (в области, где $\Delta \neq 0$ они независимы), получим

$$\square V = -\frac{V_t}{\Delta} (\lambda + \kappa - 2\lambda\kappa t). \quad (11)$$

Уравнение (3) сводится к обыкновенному уравнению и его общее решение таково:

$$U = \frac{f(V, \Theta, \omega)}{V^{\Delta}}, \quad (12)$$

где f — произвольная функция своих аргументов. В уравнении (2) переходим также к переменным V, Θ, ω, t (для этого вычисляем $\square \Theta$ и $\square \omega$).

4. Пусть корни $\Delta(t)$ не только конечны, но и различны ($\lambda \neq \kappa$); учитывая, что (2) есть тождество относительно t , получим $\lambda_0 = \kappa_0 = 0$.

На основании (5) и очевидных равенств $\Theta = \Theta$ и $\omega = \omega$ получаем дифференцированием шесть соотношений, определяющих $\alpha_0; \beta_0; \gamma_0$ и $\alpha_\omega; \beta_\omega; \gamma_\omega$, из которых, учитывая полностью системы (6), находим, что $\lambda_\omega = 0$ и получаем

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \Phi(V) \sin \Theta \cos \omega + \eta(V) \cos \omega + \chi(V) \\ \beta &= \Phi(V) \sin \Theta \sin \omega + \eta(V) \sin \omega + \psi(V) \\ \gamma &= \Phi(V) \cos \Theta + \xi(V) \\ \lambda &= \frac{1}{\Phi(V)} \\ \kappa &= \frac{\sin \Theta}{\Phi(V) \sin \Theta + \eta(V)} \end{aligned} \right\}, \quad (13)$$

где $\Phi(V); \chi(V); \psi(V); \xi(V); \eta(V)$ — произвольные функции. Из (7) и (13) имеем соотношение, определяющее $V(x, y, z, t)$:

$$(x - \chi - \eta \cos \omega)^2 + (y - \psi - \eta \sin \omega)^2 + (z - \xi)^2 - (t - \Phi)^2 = 0. \quad (11.1)$$

Интегрируя уравнение (2) и учитывая (12), получим

$$U = \frac{\varepsilon(V; \Theta) \sin \frac{\omega}{2} + \xi'(V; \Theta) \cos \frac{\omega}{2}}{(\chi' \sin \Theta \cos \omega + \psi' \sin \Theta \sin \omega + \eta' \sin \Theta + \xi' \cos \Theta + \Phi')} \sqrt{-1 + \frac{2\Phi \sin \Theta + \eta}{\Phi(\Phi \sin \Theta + \eta)} t - \frac{\sin \Theta}{\Phi(\Phi \sin \Theta + \eta)} t^2}, \quad (\text{II. } 2)$$

$\varepsilon(V; \Theta)$ и $\xi(V; \Theta)$ — произвольные функции.

5. Если же корни $\Delta(t)$ конечны и совпадают ($\lambda = \kappa$), то для α, β, γ получаем совершенно аналогично соотношение (13), причем $\lambda = \kappa = \frac{1}{\Phi(V)}$.

Аналогично предыдущему функция $V(x, y, z, t)$ определяется из соотношения

$$[x - \chi(V)]^2 + [y - \psi(V)]^2 + [z - \xi(V)]^2 - [t - \Phi(V)]^2 = 0. \quad (\text{III. } 1)$$

Интегрируя (2), получаем:

$$U = \frac{\varphi_1 \left(\omega + i \ln \operatorname{tg} \frac{\Theta}{2} \right) + \varphi_2 \left(\omega - i \ln \operatorname{tg} \frac{\Theta}{2} \right)}{(\chi' \sin \Theta \cos \omega + \psi' \sin \Theta \sin \omega + \eta' \sin \Theta + \xi' \cos \Theta + \Phi') (\Phi - t)i} \cdot \Phi, \quad (\text{III. } 2)$$

где φ_1 и φ_2 — произвольные функции.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Л. Соболев. Функционально-инвариантные решения волнового уравнения. Труды физ.-мат. и-та им. Стеклова, т. V, 1934.
2. Н. П. Еругин. О функционально-инвариантных решениях, ДАН, т. 42, 1944.
3. Я. Б. Лопатинский и Т. Ибадов. Об одном семействе решений волнового уравнения. Труды Аз. госуниверситета им. Кирова, т. V, 1945.

К ВОПРОСУ ОБ ИЗМЕРЕНИИ ДЕФОРМАЦИЙ ТЕНЗОДАТЧИКАМИ С БОЛЬШОЙ БАЗОЙ

Для разрешения сложных актуальных технических задач по расчету деталей машин и элементов сооружений за последнее десятилетие стали широко внедрять для измерения деформаций проволочные тензометры омического сопротивления (тензодатчики) с различными базами.

Искажения в показаниях тензодатчиков, как известно, зависят от многих факторов—от дефекта в их изготовлении, от качества клея, способа наклеивания и наконец от самой базы датчика.

Все перечисленные факторы, кроме последнего, влияют на показания тензодатчика независимо от степени концентрации напряжений.

В соответствии с этим предлагается общий метод расчета для определения влияния базы тензодатчика при прочих равных данных на экспериментальное подтверждение теоретических результатов задач теории упругости в плитах и пластинках.

Так как тензодатчики могут быть размещены на плоскости плиты или пластины произвольно, то в общем случае рассмотрим подвижную систему координатных осей x' , y' , которые мы будем направлять соответственно параллельно направлению датчика и перпендикулярно к нему. Важно отметить, что показания датчиков, размещенных в радиальном и тангенциальном направлениях, фактически соответствуют величинам следующих интегралов:

$$\frac{1}{l} \int_r^{r+l} \varepsilon_{x'} dx' = \varepsilon_{x'}^0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{l} \int_{\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}+l} \varepsilon_{y'} dy' = \varepsilon_{y'}^0, \quad (2)$$

где $\varepsilon_{x'}$ и $\varepsilon_{y'}$ — относительные удлинения по направлениям осей x' , y' ; $\varepsilon_{x'}^0$ и $\varepsilon_{y'}^0$ — средние относительные деформации по длине базы датчика, соответственно размещенного по направлению оси ox' или oy' ; l — искомая база датчика; r — расстояние от начала координат до начальной точки тензодатчика.

Для определения теоретически средней деформации по длине базы датчика необходимо вычислить значения этих интегралов, для чего предлагается два способа. Первый, — когда заданная задача решена в напряжениях. В этом случае по закону Гука определяем компоненты деформации $\varepsilon_{x'}$ и $\varepsilon_{y'}$:

$$\varepsilon_{x'} = \frac{1}{E} (\sigma_{x'} - \mu \sigma_{y'}) \quad (3)$$

$$\varepsilon_{y'} = \frac{1}{E} (\sigma_{y'} - \mu \sigma_{x'}) \quad (4)$$

и затем, проинтегрировав их по длине базы тензодатчика, найдем величины интегралов $\varepsilon_{x'}^0$ и $\varepsilon_{y'}^0$. Второй способ — когда решение задачи дано в перемещениях. Тогда

$$\varepsilon_{x'} = \frac{\partial u}{\partial x'}$$

$$\varepsilon_{y'} = \frac{\partial v}{\partial y'}$$

где X' и Y' — независимые координаты.

u и v — компоненты перемещения точек по направлениям осей ox' и oy' .

Таким образом,

$$\varepsilon_{x'}^0 = \frac{1}{l} \int \frac{\partial u}{\partial x'} dx' = \frac{1}{l} (u_A - u_B). \quad (5)$$

Аналогично

$$\varepsilon_{y'}^0 = \frac{1}{l} \int \frac{\partial v}{\partial y'} dy' = \frac{1}{l} (v_C - v_D), \quad (6)$$

где u_A , u_B , v_C и v_D — перемещения крайних точек датчиков, соответственно размещенных в радиальном и тангенциальном направлениях.

Рассмотрим в качестве примера изгиб круглой пластинки, ослабленной отверстием в центре, нагруженной равномерно — распределенными изгибающими моментами по внешнему контуру.

Допустим, что решение задачи дано в напряжениях для нижней поверхности плиты в полярной системе координат в следующем виде [1]:

$$\sigma_r = -\frac{6M}{h^2(1-\beta^2)} \left(\frac{a^2}{r^2} - 1 \right),$$

$$\sigma_\theta = \frac{6M}{h^2(1-\beta^2)} \left(\frac{a^2}{r^2} + 1 \right),$$

где h — толщина пластинки, β — отношение радиуса отверстия к наружному радиусу пластинки, M — изгибающий

момент на единицу длины, $r = \rho a$ — радиус-вектор, a — радиус ослабленного отверстия.

На основании формул (3) и (4) найдем значения относительных удлинений в полярной системе координат. Приведем их в окончательном виде:

$$\varepsilon_r = -\frac{6M}{Eh^2(1-\beta^2)} A_r \quad (7)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{6M}{Eh^2(1-\beta^2)} A_\theta, \quad (8)$$

где

$$A_r = \left[\left(\frac{a^2}{r^2} - 1 \right) + \mu \left(\frac{a^2}{r^2} + 1 \right) \right],$$

$$A_\theta = \left[\left(\frac{a^2}{r^2} + 1 \right) + \mu \left(\frac{a^2}{r^2} - 1 \right) \right],$$

μ — коэффициент Пуассона.

На основании формул (1) и (2) найдем значение интегралов

$$\varepsilon_r^0 = \frac{6M}{Eh^2(1-\beta^2)} A_r^0 \quad (9)$$

$$\varepsilon_\theta^0 = \frac{6M}{Eh^2(1-\beta^2)} A_\theta^0, \quad (10)$$

где

$$A_r^0 = \left[\frac{(n^2\lambda + n)(1-\mu) - \lambda(1+\mu)}{n(n\lambda + 1)} \right],$$

$$A_\theta^0 = \left[\frac{(4n^2\lambda^2 + 1)(1-\mu) + 4\lambda^2(1+\mu)}{(4n^2\lambda^2 + 1)} \right],$$

где

$$\lambda = \frac{a}{l}.$$

Для иллюстрации применения метода перемещений конечных точек датчика допустим, что решение этой задачи дано уравнением изогнутой поверхности плиты (2) с точностью до постоянной в следующем виде:

$$w = -\frac{c_1 r^2}{4} - c_2 \ln \frac{r}{b},$$

где

$$c_1 = \frac{2 b^2 M}{(1+\mu) D (b^2 - a^2)},$$

$$c_2 = \frac{a^2 b^2 M}{(1-\mu) D (b^2 - a^2)}.$$

Здесь $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ — цилиндрическая жесткость пластинки при изгибе, $r = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}$ — радиус-вектор, b — наружный радиус пластинки.

Из теории упругости известно, что $u = -\frac{h}{2} \frac{\partial w}{\partial x}$, а $v = -\frac{h}{2} \frac{\partial w}{\partial y}$. Следовательно:

$$u = \frac{6M}{Eh^2(1-\mu^2)} \left[r(1-\mu) + \frac{a^2(1+\mu)}{r} \right],$$

$$v = \frac{6M}{Eh^2(1-\mu^2)} \left[r(1-\mu) \operatorname{tg} \Theta + \frac{\sin 2\Theta(1+\mu)}{2r} \right],$$

где Θ — угол между осью ox' и произвольно взятой точкой на датчике.

Зная теперь значения u и v по формулам (5) и (6), найдем значения интегралов, а именно:

$$\varepsilon_{x'}^0 = \frac{6M}{Eh^2(1-\mu^2)} \left[\left(\frac{\lambda^2}{n\lambda+1} - \frac{\lambda}{n} \right) (\mu+1) + (1-\mu) \right], \quad (11)$$

$$\varepsilon_{y'}^0 = \frac{6M}{Eh^2(1-\mu^2)} \frac{\lambda}{n} [(1+\mu) \sin 2\varphi + 2n^2 \operatorname{tg} \varphi (1-\mu)], \quad (12)$$

где 2φ — угол обхвата датчика.

Нетрудно убедиться, как и следовало ожидать, что формулы (9) и (10) полностью совпадают с результатами (11) и (12).

Для определения влияния базы тензодатчика при прочих равных условиях на погрешность эксперимента служат следующие формулы:

$$\frac{A_r^0 - A_r}{A_r} 100 = m_r^0, \quad (13)$$

$$\frac{A_\Theta^0 - A_\Theta}{A_\Theta} 100 = m_\Theta^0, \quad (14)$$

где m_r и m_Θ — величины погрешностей для датчиков наклеенных в радиальном и тангенциальном направлениях.

Так, например, для случая, когда тензодатчики размещены на контуре отверстия ($n=1$) при $\lambda=1$, тогда $m_r=108,3\%$, а $m_\Theta=13\%$. При $\lambda=30$, $m_r=7\%$, а $m_\Theta=0,0155\%$. Для случая, когда датчики расположены на расстоянии $r=2a$, т. е. $n=2$ при $\lambda=1$, $m_r=28,9\%$, а $m_\Theta=0,07\%$.

Таким образом, расчетное показание тензодатчика выражается интегралом от соответствующей деформации по базе датчика или разностью составляющих перемещения конеч-

ных точек данного тензодатчика. Теоретически возможно также определить погрешность при постановке эксперимента в зависимости от соответствующей базы датчика, заданных размеров детали (модели) и от места расположения датчика.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Н. Савин. Концентрация напряжений около отверстий. Госиздат технико-теоретической литературы, 1951.
2. С. Л. Тимошенко. Пластинки и оболочки. Госиздат технико-теоретической литературы, 1948.

В. Я. СКОРОБОГАТЬКО

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ ПРИЗНАК РАЗРЕШИМОСТИ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА¹

Рассмотрим уравнение эллиптического типа

$$Lu = \sum_{k,l=1}^n a_{kl} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l} + 2 \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + cu = f. \quad (1)$$

В уравнении (1), a_{kl} , b_j , c , f — действительные функции аргументов, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \bar{D}$. D — конечная область. Известно, что первая краевая задача для уравнений вида (1) не всегда разрешима в D (при $c > 0$), если даже данные функции и граница S области D достаточно гладкие.

Укажем один признак единственности решения первой краевой задачи при следующих предположениях относительно границы S , области D и данных функций:

1. Граница S может быть представлена в виде конечного числа таких ее частей S_j , что каждая точка границы S находится внутри одной из этих частей; каждая часть S_j может быть задана уравнением $x_k = f_k(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n)$ (k — одно из чисел $1, \dots, n$), причем вторые производные f_k удовлетворяют условию Липшица (L).

2. Вторые производные коэффициентов a_{kl} , первые производные b_j и коэффициент c удовлетворяют условию (L); кроме того, четвертые производные коэффициентов a_{kl} и вторые производные коэффициентов b_j удовлетворяют условию (L) на границе S , $f \in (L)$; $u|_S = \varphi$, где φ — непрерывная функция.

¹ Результаты этой работы обобщают исследования автора, опубликованные в Украинском математическом журнале, № 1, 1955.

$$\sum_{j=1}^n B_j \cos(n, x_j) = 0,$$

Если в области $\bar{D}$ выполняется неравенство

$$I = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} A_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} A_n \\ A_1 & \cdots & A_n R \end{vmatrix} \geq 0, \quad (2)$$

$$A_l = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{\partial a_{kl}}{\partial x_k} - b_l + B_l, \quad l = 1, \dots, n$$
$$R = \sum_{i=1}^n \frac{\partial B_i}{\partial x_i} = C,$$

Доказательство. Пусть $Lu=0$ и $u|_S=0$. Составим выражение

$$\int_D (n) \int u \left[\sum_{\kappa, l=1}^n a_{\kappa l} \frac{\partial^2 u}{\partial x_{\kappa} \partial x_l} + 2 \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + \right. \\ \left. + \left(c_0 + \sum_{j=1}^n \frac{\partial B_j}{\partial x_j} \right) u \right] d\tau = 0, \quad (3)$$

$$c_0 = c - \sum_{j=1}^n \frac{\partial B_j}{\partial x_j}.$$

Интегрируя в (3) по частям члены вида $a_{kl} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l}$ и $\frac{\partial B_j}{\partial x_j} u^2$, преобразуем это выражение к виду

$$\int_D (n) \int \left(\sum_{k,l=1}^n a_{kl} \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_l} + 2u \sum_{j=1}^n A_j \frac{\partial u}{\partial x_j} - c_0 u^2 \right) d\tau = 0. \quad (4)$$

Интегрирование по частям членов $a_{kl} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l}$ законно, так как из теорем Жиро [2] (стр. 181, 185) следует, что решение уравнения $Lu=0$, $u|_S=0$, дважды непрерывно дифференцируемое в D и непрерывное в $\bar{D}$, имеет также непрерывные первые производные в $\bar{D}$.

Далее, при помощи подстановки $\frac{\partial u}{\partial x_k} = w_k + p_k u$, $k = 1, \dots, n$ (p_k определяется из системы уравнений $\sum_{l=1}^n a_{kl} p_l = -B_k$, $k = 1, \dots, n$) выражение (4) преобразуется в

$$\int_D (n) \int \left[\sum_{k,l=1}^n a_{kl} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} - p_k u \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x_l} - p_l u \right) + \frac{1}{\det A} u^2 \right] d\tau = 0; \quad A = \| a_{ij} \|_{i,j=1}^n. \quad (5)$$

Из формулы (5) уже легко усматривается справедливость леммы.

З а м е ч а н и е. На основании теоремы Жиро [2] (стр. 208) из единственности следует и существование решения первой краевой задачи. Итак, выполнение неравенства (2) является признаком не только единственности, но и разрешимости первой краевой задачи.

Неравенство (2) может быть мажорировано неравенством

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial B_j}{\partial x_j} > \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial^2 a_{kl}}{\partial x_k \partial x_l} - \sum_{l=1}^n \frac{\partial b_l}{\partial x_l} + c + N \left(\sum_{i=1}^n B_i^2 \right). \quad (6)$$

В формуле (6) $N = \max_{x \in D} (\max_{\varphi_1^2 + \dots + \varphi_n^2 = 1} \varphi' A^{-1} \varphi)$, $x \in D$, A^{-1} — матрица обратная к матрице $\| a_{ij} \|_{i,j=1}^n$.

$$\varphi = \|\varphi_1, \dots, \varphi_n\|, \quad \varphi' = \left\| \begin{array}{c} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{array} \right\|.$$

Если некоторая совокупность функций $B_1, \dots, B_n$ удовлетворяет неравенству (6), то эти функции также удовлетворяют и неравенству (2).

Положив $B_i = \frac{\omega_i}{N}$, приводим неравенство (6) к простому виду:

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial \omega_n}{\partial x_n} > c^* + \omega_1^2 + \dots + \omega_n^2. \quad (7)$$

В формуле (7) $c^* = N \left(\frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial^2 a_{kl}}{\partial x_k \partial x_l} - \sum_{l=1}^n \frac{\partial b_l}{\partial x_l} + c \right)$.

Введем понятие о внутреннем диаметре области, необходимое в дальнейшем. Обозначим через $r(x)$ расстояние от точки x до границы этой области. Величину $d = 2 \max_{x \in D} r(x)$, назовем внутренним диаметром области D .

Признак разрешимости (теорема о внутреннем диаметре).

Если $\frac{\pi^2}{d^2} > \max_{x \in D} c^*(x)$, то 1-я краевая задача, поставленная для уравнения (1), разрешима в области D .

Укажем основные моменты доказательства для двух аргументов. Построим такой полигон D' , содержащий D , чтобы его граница S' не касалась S и чтобы расстояние $\rho(y, S')$ от любой точки $y \in S$ до S' было достаточно мало. (Можно

считать $\rho(y, S') < \frac{\pi}{2\sqrt{\max_x c^*}} - \frac{d}{2}$ при $\max_x c^* > 0$ и $\rho(y, S') < \infty$ при $\max_x c^* \leq 0$).

Опишем из точки $x \in D'$ окружность $M'(x)$ радиусом $r'(x)$ ($r'(x)$ — расстояние от точки x до S').

Множество точек $x \in D'$, для которых окружности $M'(x)$ касаются S' более чем в одной точке, является кусочно непрерывной кривой.

Отметим, что никакая кривая $\delta \subset \mathfrak{M}'$ не может ограничивать в D' область, гомеоморфную кругу. Кривую $\mathfrak{M}'$ назовем биссектрисой полигона D' . Радиусы окружностей $M'(x)$ при $x \in \mathfrak{M}'$, содержащие точки S' , образуют в D поле α , которое имеет разрывы только на $\mathfrak{M}'$. Обозначим через $\bar{D}_i$ замыкание области, состоящей из всех точек, расстояния от которых до звена $l_i \in S'$ совпадают с расстоянием от этих точек до S' .

Все точки x , для которых вершина O_i ломаной S' является ближайшей точкой, принадлежащей S' , образуют

область D_{o_i} (звенья S' , выходящие из O_i , образуют со стороны D' угол $\lambda_i > \pi$). Нетрудно доказать, что $\bar{D}'$ составляется из замыканий вида $\bar{D}_{l_i}$ и D_{o_i} .

В каждой области D_{o_i} и D_{l_i} переходим к новым координатам t, σ . Величина t в D_{l_i} означает расстояние от точки x до звена l_i ломаной S' , в D_{o_i} — расстояние от точки x до вершины O_i . Величины σ в D_{l_i} отсчитываются вдоль l_i от некоторой точки, положение которой несущественно, а в D_{o_i} σ — длины дуг концентрического семейства окружностей с центром O_i . Отсчет дуг σ производится от какого-либо луча, исходящего из вершины O_i ломаной S' . Ищем функции ω_i , удовлетворяющие неравенству (7) в виде $\omega_i = \omega \cos(t, x_i)$, где (t, x_i) — угол между направлением поля α в точке x и осью ox_i . Неравенство (7) тогда записывается в виде

$$\frac{d\omega}{dt} + \omega \frac{d}{dt} \ln \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(t, \sigma)} > c^* + \omega^2. \quad (8)$$

Производная $\frac{d}{dt} \ln \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(t, \sigma)} = 0$, так как якобиан $\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(t, \sigma)} = \text{const.}$

Полагаем $\omega = \frac{\pi}{2r''(x)} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2r''(x)} t$, где $r''(x)$ — длина радиуса той окружности $M'(y)$, $y \in \mathfrak{M}'$, один из радиусов которой содержит точку x и принадлежит полю α .

В результате подстановки так выбранной функции ω в (8) получаем, что $\frac{\pi^2}{4r''^2(x)} > c^*(x)$, так как, согласно условию теоремы, даже $\frac{\pi^2}{a^2} > \max_x c^*(x)$. Отметим еще, что при интегрировании по частям выражения

$$\iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \omega \cos(t, x_1) + \frac{\partial}{\partial x_2} \omega \cos(t, x_2) \right] u^2 d\sigma$$

интеграл, взятый по биссектрисе $\mathfrak{M}'$, обращается в нуль (за счет $\omega \equiv 0$ на $\mathfrak{M}'$). Итак, подобраны функции ω_i , удовлетворяющие неравенству (7) в области $\bar{D}$.

Отсюда уже следует, на основании леммы и замечания к ней, разрешимость 1-ой краевой задачи в области D . Теорема верна и для n -аргументов.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Г. Петровский. Лекции об уравнениях с частными производными, стр. 284—287, 1950.
2. Ж. Жиро (G. Giraud). Sur le problème de Dirichlet généralisé. Annales scientifiques de l'Ecole normale supérieure. 46, p. 131—245, 1929.

О КОНФОРМНОМ ОТОБРАЖЕНИИ БЛИЗКИХ ОБЛАСТЕЙ

1. ОДНОСВЯЗНЫЕ ОБЛАСТИ

1. Круг. Пусть функция $w = f(z)$, $f(0) = 0$, $f'(0) > 0$ конформно отображает круг $|z| < 1$ на „почти-круг“ D , ограниченный кривой $\Gamma: \rho = e^{\psi(\theta)}$. Применяя формулу Шварца к функции $F(z) = \ln \frac{f(z)}{z}$, получаем:

$$\ln \frac{f(z)}{z} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi[\Theta(t)] \frac{e^{it} + re^{i\varphi}}{e^{it} - re^{i\varphi}} dt + iC. \quad (1)$$

Отделяя действительную и мнимую части, совершая предельный переход $r \rightarrow 1$ и беря $C = 0$, получаем:

$$\Theta(\varphi) - \varphi = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Psi[\Theta(t)] \operatorname{ctg} \frac{t-\varphi}{2} dt, \quad (2)$$

$$\Psi[\Theta(\varphi)] - \Psi_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\Theta(t) - t] \operatorname{ctg} \frac{t-\varphi}{2} dt, \quad (3)$$

где интеграл (2) — сингулярный. Если функция $f(z)$ неизвестна, то нелинейное сингулярное интегральное уравнение (2), выведенное Теодорсеном и Гарриком (3), служит для определения $\Theta(\varphi)$, следовательно и $f(z)$. Оно решается по методу последовательных приближений (4).

Если уравнение Γ имеет вид $\rho = 1 - \delta(\theta)$, где $|\delta(\theta)| < \varepsilon$, $|\delta'(\theta)| < \varepsilon$, $|\delta''(\theta)| < \varepsilon$, то

$$W(z) = z \left\{ 1 - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 + re^{-it}}{1 - ze^{-it}} \delta(t) dt \right\} + O(\varepsilon^2). \quad (4)$$

Эта формула, полученная М. А. Лаврентьевым [1] методом локальных вариаций, следует также из (1), если там положить $\Theta(\varphi) = \varphi$, $\psi(\theta) = -\delta(\theta)$, что соответствует первому приближению в решении (2) по методу последовательных приближений.

1.2 Полуплоскость. Аналогично если $w = f(z)$, $f(\infty) = \infty$ отображает полуплоскость $Im z > 0$ на „почти-полукруглость“ D , ограниченную кривой $\Gamma: v = v(u)$, $|v(u)| < \varepsilon$, $|v'(u)| < \varepsilon$, $|v''(u)| < \varepsilon$, то, применяя форму Шварца

$$F(z) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Re F(t) \frac{dt}{t-z}, \quad (1)$$

к функции $F(z) = i[f(z) - z]$, отделяя действительную и мнимую части и совершая предельный переход $y \rightarrow 0$, получаем

$$U(x) - x = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} v[u(t)] \frac{dt}{t-x}, \quad (2)$$

где интеграл в (2) — сингулярный, существующий при известных ограничениях на $v(u)$. Нелинейное сингулярное уравнение (2) служит для определения $u(x)$, следовательно и $f(z)$; оно также решается по методу последовательных приближений.

Если уравнение Γ имеет вид $y = y(u)$, где $|y(u)| < \varepsilon$, $|y'(u)| < \varepsilon$, $|y''(u)| < \varepsilon$, то, по М. А. Лаврентьеву [1],

$$W(t) = z + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y(t)}{z-t} dt + O(\varepsilon^2). \quad (3)$$

Эта формула также следует из (1), если положить $u(x) = x$, $v(u) = y(u)$, что соответствует первому приближению в решении (2) по методу последовательных приближений.

1.3 Полоса. Аналогично, если $w = f(z)$, $Re f(\pm \infty) = \pm \infty$ отображает полосу $0 \leq Im z \leq 1$ на „почти-полосу“ D , ограниченную кривыми $\Gamma_i: v_i = v_i(u_i)$, $|v_i(u_i)| < \varepsilon$, $|v_2(u_2) - 1| < \varepsilon$, $|v_i'(u_i)| < \varepsilon$, $|v_i''(u_i)| < \varepsilon$ ($i = 1, 2$), то, применяя формулу Шварца

$$f(z) = -\frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{+\infty} u_1(t) \operatorname{cth} \frac{\pi(z-t)}{2} dt + \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{+\infty} u_2(t) \operatorname{th} \frac{\pi(z-t)}{2} dt \quad (1)$$

к функции $F(z) = i[f(z) - z]$, получаем

$$\begin{aligned} f(z) - z &= \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{+\infty} Re F(t) \operatorname{cth} \frac{\pi(z-t)}{2} dt + \\ &+ \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{+\infty} Re F(t) \operatorname{th} \frac{\pi(z-t)}{2} dt. \end{aligned} \quad (2)$$

Отделяя действительную и мнимую части и совершая предельный переход при $y \rightarrow 0$, $y \rightarrow 1$, получаем

$$u_1(x) - x = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} v_1[u_1(t)] \operatorname{cth} \frac{\pi(x-t)}{2} dt + \\ + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} v_2[u_2(t)] \operatorname{th} \frac{\pi(x-t)}{2} dt, \quad (3)$$

$$u_2(x) - x = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} v_1[u_1(t)] \operatorname{th} \frac{\pi(x-t)}{2} dt + \\ + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} v_2[u_2(t)] \operatorname{cth} \frac{\pi(x-t)}{2} dt,$$

где интегралы в (3) — сингулярные, существующие при соответствующих ограничениях на $v_i(u_i)$ ($i=1,2$). Они также могут служить для определения $u_1(x)$, $u_2(x)$, следовательно, и $f(z)$.

II. ДВУСВЯЗНЫЕ ОБЛАСТИ

2.1 Кольцо. Если функция $w=f(z)$ отображает круговое кольцо $h < |z| < 1$ на „почти-круговое кольцо“ D , ограниченное $\Gamma_1: \rho_1 = e^{\psi_1(\theta)}$ и $\Gamma_2: \rho_2 = h e^{\psi_2(\theta)}$, то, предполагая выполненным условие

$$\int_0^{2\pi} \psi_1[\Theta_1(s)] ds = \int_0^{2\pi} \psi_2[\Theta_2(s)] ds,$$

где $\Theta_1(s)$, $\Theta_2(s)$ определены из соответствия границ, и применяя формулу Вилля (см. [2], стр. 226, где $\omega = \pi$, ω' определяется через h по формуле $h = e^{i\pi \frac{\omega'}{\omega}}$), имеем

$$F(z) = 1 \frac{f(z)}{z} = \frac{i}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi_1[\Theta_1(s)] \zeta(-i \ln z - s) ds - \\ - \frac{i}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi_2[\Theta_2(s)] \zeta(-i \ln z - s - \omega') ds + iC. \quad (1)$$

Отделяя действительную и мнимую части и совершая предельный переход $r \rightarrow 1$, получаем:

$$\begin{aligned}\Theta_1(\varphi) - \varphi &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi_1[\Theta_1(s)] \zeta(\varphi - s) ds - \\ &- \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi_2[\Theta_2(s)] \zeta[(\varphi - s) + \omega'] ds + C,\end{aligned}\quad (2)$$

$$\begin{aligned}\psi_1[\Theta_1(\varphi)] - \psi_{01} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [\Theta_1(s) - s] \zeta(\varphi - s) ds - \\ &- \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [\Theta_2(s) - s] \zeta[(\varphi - s) + \omega'] ds,\end{aligned}\quad (3)$$

или

$$\begin{aligned}\Theta_1(\varphi) - \varphi &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi_1[\Theta_1(s)] Z_1(\varphi - s) ds - \\ &- \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi_2[\Theta_2(s)] Z(\varphi - s) ds,\end{aligned}\quad (2')$$

$$\begin{aligned}\psi_1[\Theta_1(\varphi)] - \psi_{01} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [\Theta_1(s) - s] Z_1(\varphi - s) ds - \\ &- \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [\Theta_2(s) - s] Z(\varphi - s) ds,\end{aligned}\quad (3')$$

где

$$Z_1(\varphi - s) = \zeta(\varphi - s) - \frac{\eta_1}{\pi}(\varphi - s),$$

$$Z(\varphi - s) = \zeta[(\varphi - s) + \omega'] - \frac{\eta_1}{\pi}(\varphi - s) - \eta_1'$$

известные функции Якоби и постоянная C выбрана так, что

$$C = \frac{\eta_1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} [\psi_1[\Theta_1(s)] - \psi_2[\Theta_2(s)]] s ds,$$

и при $r \rightarrow h$ получаем аналогичные уравнения для 2-го контура

$$\begin{aligned}\Theta_2(\varphi) - \varphi &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi_1[\Theta_1(s)] \zeta(\varphi - s - \omega') ds - \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi_2[\Theta_2(s)] \zeta(\varphi - s) ds,\end{aligned}\quad (4)$$

$$\begin{aligned}\psi_2[\Theta_2(\varphi)] - \psi_{02} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [\Theta_1(s) - s] \zeta(\varphi - s - \omega') ds - \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [\Theta_2(s) - s] \zeta(\varphi - s) ds,\end{aligned}\quad (5)$$

или

$$\begin{aligned}\Theta_2(\varphi) - \varphi &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi_1[\Theta_1(s)] Z(\varphi - s) ds - \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \psi_2[\Theta_2(s)] Z_1(\varphi - s) ds,\end{aligned}\quad (4')$$

$$\begin{aligned}\psi_2[\Theta_2(\varphi)] - \psi_{02} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [\Theta_1(s) - s] Z(\varphi - s) ds - \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [\Theta_2(s) - s] Z_1(\varphi - s) ds.\end{aligned}\quad (5')$$

Если отображающая функция неизвестна, то (2), (4) или (2'), (4') представляют систему двух нелинейных сингулярных интегральных уравнений, позволяющих определить $\Theta_1(\varphi)$, $\Theta_2(\varphi)$, а следовательно, и отображающую функцию $f(z)$.

Если уравнения контуров Γ_1 , Γ_2 , имеют вид:

$$\rho_1 = 1 - \bar{\partial}_1(\Theta), \quad \rho_2 = h [1 + \bar{\partial}_2(\Theta)],$$

где

$$|\bar{\partial}_i(\Theta)| < \varepsilon, \quad |\bar{\partial}_i'(\Theta)| < \varepsilon, \quad |\bar{\partial}_i''(\Theta)| < \varepsilon,$$

то из формулы Вилля получаем

$$W = z \left\{ 1 - \frac{i}{\pi} \int_0^{2\pi} Z_1 [-i \ln z - s] \delta_1(s) ds - \right. \\ \left. - \frac{i}{\pi} \int_0^{2\pi} Z(i \ln z + s) \delta_2(s) ds \right\} + O(\varepsilon^2), \quad (6)$$

что представляет обобщение формулы М. А. Лаврентьева для кольца.

Эта формула может быть также получена методом локальных вариаций. Для получения ее поступаем следующим образом. Пусть локальная вариация представляет собой малую выброшенную луночку (двуугольник) с одной из вершин в точке $e^{i\varphi}$. Тогда при помощи вспомогательных конформных отображений переводим кольцо $\frac{1}{\mu} < |z| < 1$ на верхнюю полуплоскость с выброшенной луночкой и, используя формулу Лаврентьева, отображаем ее на верхнюю полуплоскость, а затем на кольцо $\frac{1}{\mu_1} < |w| < 1$. Тогда получаем следующую вариационную формулу:

$$w = z \left\{ 1 + i\sigma' \frac{\pi}{K} Z_1 \left(-i \frac{K}{\pi} \ln z - \frac{K}{\pi} \varphi \right) \right\} + O(\varepsilon^2), \quad (7)$$

где $\sigma' = \frac{K^2}{\pi^2} \sigma_z$. При этом для модуля μ_1 имеет место следующее соотношение

$$\mu_1 = \mu \left(1 - \frac{\sigma_z}{2\pi} \right).$$

Если одна из вершин луночки находится в точке $\frac{1}{\mu} e^{i\varphi}$, то аналогично получаем

$$w = z \left\{ 1 - i\sigma' \mu^2 \frac{\pi}{K} \left[Z \left(i \frac{K}{\pi} \ln z + \frac{K}{\pi} \varphi \right) + \frac{i\pi}{2K} \right] \right\} + O(\varepsilon^2)$$

и

$$\mu_1 = \mu \left(1 - \frac{\mu^2}{2\pi} \sigma_z \right).$$

Представляя σ_z в виде $\int_0^{2\pi} \delta(s) ds$ и производя формальное интегрирование по обеим окружностям, получаем указанную

выше вариационную формулу для „почти-кругового“ кольца с контурами $\rho_1 = 1 - \delta_1(\theta)$, $\rho_2 = \frac{1}{\mu} [1 + \delta_2(\theta)]$ (проверка — как в односвязном случае).

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Лаврентьев. Конформные отображения, Гостехиздат, 1946.
2. Н. И. Ахиезер. Элементы теории эллиптических функций, Гостехиздат, 1948.
3. T. Theodorsen and Garrick. General potential theory of arbitrary wing sections, NACA Rep. № 452, 1933.
4. S. E. Warschawski. On Theodorsen's method of conformal mapping of nearly circular regions, Quart of Appl. Math. 3, № 1, 1945.

Г. В. СИРЫК

ОБ ОДНОМ ПРИБЛИЖЕННОМ МЕТОДЕ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

1. Рассматривается конформное отображение круга $|z| < 1$ на область D в z' плоскости, ограниченную звездным контуром C :

$$z' = ae^{\psi + i\theta}, \quad a > 0. \quad (1)$$

Звездный контур C , заданный уравнением $\psi(\theta)$, называется почти-окружностью или почти-круговым контуром, если выполняются следующие условия:

$$|\psi(\theta)| < \varepsilon, \quad |\psi'(\theta)| < \varepsilon, \quad (2)$$

где $0 < \varepsilon < 1$. Область I , ограниченная контуром C , называется „почти-кругом“.

Для определения функции

$$z' = f(z), \quad f(0) = 0, \quad f'(0) > 0,$$

отображающей круг $|z| < 1$ на область D , ее представляют в виде

$$\ln \frac{f(z)}{z} \sum_{v=0}^{\infty} (a_v + ib_v) z^v = \psi(r, \varphi) + i\Theta(r, \varphi) \quad (3)$$

и определяют

$$\Theta(1, \varphi) = \Theta(\varphi), \quad \psi(1, \varphi) = \tilde{\psi}(\varphi) = \psi[\Theta(\varphi)].$$

Определение $\Theta(\varphi)$ приводится к решению следующего нелинейного сингулярного интегрального уравнения;

$$\Theta(\varphi) = \varphi + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{\psi[\Theta(t)] - \psi[\Theta(\varphi)]\} \operatorname{ctg} \frac{t-\varphi}{2} dt. \quad (4)$$

Как показал Варшавский [3], уравнение (4) имеет единственное непрерывное решение, которое находится методом последовательных приближений:

$$\Theta_0(\varphi) = \varphi, \quad \Theta_n(\varphi) = \varphi + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{\psi[\Theta(t)] - \psi[\Theta(\varphi)]\} \operatorname{ctg} \frac{t-\varphi}{2} dt, \\ (n = 1, 2, \dots) \quad (5)$$

и имеют место следующие утверждения:

I. Если C — почти-круговой контур и $\Theta_n(\varphi)$, $\Theta(\varphi)$ определены соответственно из (5) и (4), то

$$|\Theta_n(\varphi) - \Theta(\varphi)| \leq 2 \left(\frac{\pi^2}{1-\varepsilon^2} \right)^{\frac{1}{2}} \varepsilon^{\frac{n+2}{2}}. \quad (6)$$

II. Если C — почти-круговой контур и выполняется условие

$$|\psi'(\Theta_2) - \psi'(\Theta_1)| \leq \varepsilon |\Theta_2 - \Theta_1|, \quad (7)$$

то

$$|\Theta_n(\varphi) - \Theta(\varphi)| \leq (2\pi A(n+1))^{\frac{1}{2}} \varepsilon^{n+1}, \quad (8)$$

где $A = 4^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}}$.

III. Если C — почти-круговой контур и, кроме условия (7), выполняется условие

$$|\psi''(\Theta_2) - \psi''(\Theta_1)| \leq \varepsilon |\Theta_2 - \Theta_1|, \quad (9)$$

то

$$|\Theta'_n(\varphi) - \Theta'(\varphi)| \leq \sqrt{2\pi \tau_n} (A(n+1))^{\frac{3}{2}} \varepsilon^{n+1}, \quad (10)$$

где

$$\tau_1 = 1 + \varepsilon, \quad \tau_n = (1 + \varepsilon) \prod_{k=2}^n (1 + \varepsilon^k \sqrt{2\pi A k}).$$

Далее, если $\varepsilon < 0,295$, то функция

$$z' = F_n(z), \quad F_n(0) = 0, \quad F'_n(0) > 0,$$

отображает круг $|z| < 1$ на „почти-круг“, ограниченный контуром C_n :

$$z' = F_n(e^{i\varphi}), \quad \ln F_n(e^{i\varphi}) = \tilde{\psi}(\varphi) + i[\Theta_n(\varphi) - \varphi].$$

2. Пусть теперь контур C разбит на части C_k ($k=1, 2$) с центральными углами α_k и условия (2), (7), (9), выполняются на C_k с постоянными ε_k ($\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2$), и пусть $\tilde{C}_{nk} = F_n^{-1}(C_k)$, $\tilde{C}_k = F^{-1}(C_k)$ и $\tilde{\alpha}_{nk}$, α_k соответствующие центральные углы на окружности $|z| < 1$. Тогда $\tilde{C}_{nk} \rightarrow \tilde{C}_k$ и, если C_k^* означает пересечение всех дуг $\tilde{C}_{nk}$, $\tilde{C}_k$, а α_k^* — соответствующий центральный угол, то, как нетрудно подсчитать (см. [1], лемма на стр. 307),

$$|\alpha_k^* - \alpha_k| < 8\varepsilon_1.$$

Пользуясь методом Варшавского, получаем в этом случае следующие дифференцированные оценки:

$$I \quad |\Theta_n(\varphi) - \Theta(\varphi)| \leq 2^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^2 \beta_k \varepsilon_k^{2(n+1)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^2 \frac{\beta_k \varepsilon_k^2}{1 - \varepsilon_k^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (6')$$

$$II \quad |\Theta'_n(\varphi) - \Theta'(\varphi)| \leq (n+1)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^2 \beta_k \varepsilon_k^{2(n+1)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^2 A_k^2 \beta_k \varepsilon_k^{2(n+1)} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (8')$$

$$III \quad |\Theta'_n(\varphi) - \Theta'(\varphi)| \leq (n+1)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^2 A_k^2 \beta_k \varepsilon_k^{2(n+1)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^2 A_k^2 \sigma_{nk} \beta_k \varepsilon_k^{2(n+1)} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (10')$$

где A_k — абсолютные постоянные, $\sigma_{1k} = 1 + \varepsilon_k$,

$$\sigma_{nk} = (1 + \varepsilon_k) \prod_{m=2}^n (1 + \varepsilon_k^m / \sqrt{\beta_k A_k m})$$

и $\beta_k = \alpha_k + (-1)^k 8\varepsilon_1$ — дуги, из которых β_1 содержит $\tilde{C}_{n1}$ и $\tilde{C}_1$, и β_2 содержится в $\tilde{C}_{n2}$ и $\tilde{C}_2$.

Кроме того, получаем следующие оценки для отображающей функции:

$$I \quad |F_n(e^{i\varphi}) - F(e^{i\varphi})| \leq 2^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^2 \beta_k \varepsilon_k^{2(n+1)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^2 \frac{\beta_k \varepsilon_k^2}{1 - \varepsilon_k^2} \right)^{\frac{1}{2}} (1 + \varepsilon_k)^2 \quad \text{на } \beta_k.$$

$$II \quad |F_n(e^{i\varphi}) - F(e^{i\varphi})| \leq (n+1)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^2 \beta_k \varepsilon_k^{2(n+1)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^2 A_k^2 \beta_k \varepsilon_k^{2(n+1)} \right)^{\frac{1}{2}} (1 + \varepsilon_k)^2 \quad \text{на } \beta_k.$$

Отсюда, пользуясь теоремой о двух постоянных, получаем:

$$|F_n(z) - F(z)| \leq M_1 \omega_1(z, C_1^*) M_2 \omega_1(z, C_1^*),$$

где $\omega_k(z, C_1^*)$ ($k=1, 2$) означает гармоническую меру дуги β_k , измеренную в точке z относительно круга $|z| < 1$ и M_k означает правую часть в предыдущих оценках I, II.

3. В работе [2] рассматривается случай, когда отклонение контура C от окружности имеет в основном локальный характер, вызываемый слагаемым вида

$$\varepsilon_1 \left(\frac{1 + \cos \theta}{2} \right)^n, \quad (11)$$

которое называется „горкой“.

Теоретическое обоснование расчетов Я. М. Серебрянского [2], приведенных им с помощью рядов, входящих в (3), легко получается с помощью результатов Варшавского. Что касается оценок приближений, то их лучше находить по указанным выше дифференцированным оценкам, учитывая ε_k . При этом, если заданы $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$ и n , причем

$$\frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} < 1, \quad (12)$$

то из (11) следует, что α_1 определяется из соотношения

$$\varepsilon_1 \left(\frac{1 + \cos \frac{\alpha_1}{2}}{2} \right)^n = \varepsilon_2$$

или

$$\cos \frac{\alpha_1}{2} = 2 \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right)^{\frac{1}{n}} - 1,$$

т. е.

$$\alpha_1 = \arccos \left[2 \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right]. \quad (13)$$

Так, например, если $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{1}{16}$ и $n = 10$, то по формуле (13) имеем $\alpha_1 = 120^\circ$; если $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{1}{150}$, $n = 80$, то $\alpha_1 = 60^\circ$. Этот подсчет можно проводить по таблице 2 в [2].

Оценками (6), (8), (10) удобно пользоваться при малых $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$ и больших n . В этом случае оценки для приближений на C_1 выражаются в терминах ε_1 и n , а на оставшейся части контура имеют место оценки (6), (8), (10).

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Лаврентьев и Б. В. Шабад. Методы теории функций комплексного переменного, М—Л, 1951.
2. Я. М. Серебрянский. Обтекание крыловых профилей произвольной формы, Инж. сборник, т. III, вып. I, 1946.
3. S. E. Warschawski. On Theodorsen's method of konformal mapping of nearly circular regions, Quart. of Appl. Math. 3, № 1, 1945, 12—28.

ОБ ОДНОМ ВПОЛНЕ НЕПРЕРЫВНОМ ЛИНЕЙНОМ ОПЕРАТОРЕ

В книге Ф. Рисса „Лекции по функциональному анализу“ проводится доказательство полной непрерывности оператора $L\psi = M_t(a(x-t) \cdot \psi(t))$, где $a(x)$ — некоторая почти-периодическая (п.п.) по Бору функция.

Между тем, из общей теоремы Люстерника (I) о компактности семейства п. п. функций легко вывести полную непрерывность более общего оператора: $L\psi = M_t\{K(x, t)\psi(t)\}$, где $K(x, t)$ — п. п. функция двух аргументов в смысле Бора. В самом деле, теорема Люстерника гласит, что для компактности семейства п. п. функций необходимо и достаточно выполнение следующих условий: а) семейство равномерно ограничено, б) семейство равномерно непрерывно, в) семейство равномерно почти-периодично (т. е. при любом ε существует общее всем функциям семейства относительно плотное множество ε почти-периодов).

Обозначая $\varphi(x) = M_t\{K(x, t)\psi(t)\}$, получаем: $|\varphi(x+a) - \varphi(x)| \leq \sup |K(x+a, t) - K(x, t)| \cdot \|\psi\|$; $|\varphi(x)| \leq \sup |K(x, t)| \cdot \|\psi\|$, откуда следует, что все три условия теоремы Люстерника выполнены. При этом $\|\psi\|$ здесь может рассма-

триваться либо как $\sup |\psi|$, либо как $\lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |\psi(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}$

в пространстве L_p ($p \geq 1$). Можно показать, что все сказанное остается в силе, если предположить только, что $\|K(x, s)\|_s$ — есть п. п. функция Бора, как для x^a . Опираясь на известные результаты А. С. Кованько о компактности семейств обобщенных п. п. функций (2), (3), (4), легко показать полную непрерывность соответствующих операторов в пространствах п. п. функций Вейля, Степанова и Безикевича.

Отсюда для случая симметрического ядра $K(x, s)$ из общих теорем легко выводятся основные факты теории интегральных уравнений в средних значениях, т. е., когда вместо интеграла стоит среднее значение: $M_s(K(x, s) \cdot \psi(s))$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. М. Левитан. Почтипериодические функции, Гостехиздат, 1953.
2. О. С. Кованько. Про компактність систем узагальнених майже періодичних функцій Вейля. Наукові записки Львівського державного університету, серія фізико-математична, випуск I, т. У, 1947.
3. А. С. Кованько. О компактности систем обобщений п. п. функций Вейля, Украинский математический журнал, т. У, № 2, 1953.

4. А. С. Кованько. О компактности систем обобщенных почтипериодических функций А. С. Безиковича. Математический сборник, т. 16 (58), № 3, 1945.

5. А. С. Кованько. О компактности систем обобщенных почтипериодических функций В. В. Степанова. Математический сборник, т. 9 (51), № 2, 1941.

Н. Ф. КРАВЦОВА

ВЛИЯНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ НА СТРУКТУРУ ВОЛЬФРАМОВЫХ СПИРАЛЕЙ

Срок пригодности вольфрамовых нитей зависит от многих факторов, одним из которых является их структура. В данной работе приведены результаты металлографического анализа спиралей к лампам 127 вольт $\times$ 55 ватт, отожженных при разных температурах.

Исследованию подвергался вольфрам марки ВА-3, который, как показал спектральный анализ, кроме требуемых ГОСТом присадок, имел незначительное количество марганца и магния. Из спиралей, выдержанных определенное время в вакууме порядка 10^{-4} мм рт. ст. при разных температурах, готовились шлифы, травление которых проводилось травителем следующего состава: H_2O_2 3% — 1 часть, NaOH — 1 часть, вода — 1 часть.

Протравленные шлифы просматривались и фотографировались на микроскопе МИМ-6 с максимальным увеличением в 900 раз. Металлографический анализ образцов, отожженных при температурах 1000—2000° (через каждые 100°) в течение 10 минут, показал такие результаты.

Образцы, прошедшие обжиг 1000, 1100 и 1200°, имеют одинаковую структуру, образованную сильно вытянутыми зернами, по форме напоминающими волокна с параллельными гранями вдоль волочения проволоки и четко ограниченными концами. Относительно большое количество межкристаллического вещества находится на стыках отдельных зерен (рис. 1). Средняя твердость таких образцов, измеренная микротвердометром ПМТ-3, равна 575 кг/мм².

При температуре 1300—1700° волокна сохраняют свое первоначальное положение, но границы зерен постепенно с увеличением температуры теряют прямолинейность, острые углы на стыках отдельных зерен начинают округляться. При шлифовке таких образцов вольфрам сильно расслаивается вдоль оси волочения. На поверхности таких шлифов микротвердометр оставляет отпечатки в виде ромбов с меньшей диагональю вдоль проволоки и большей — поперек. Средняя суммарная твердость остается равной 575 кг/мм².

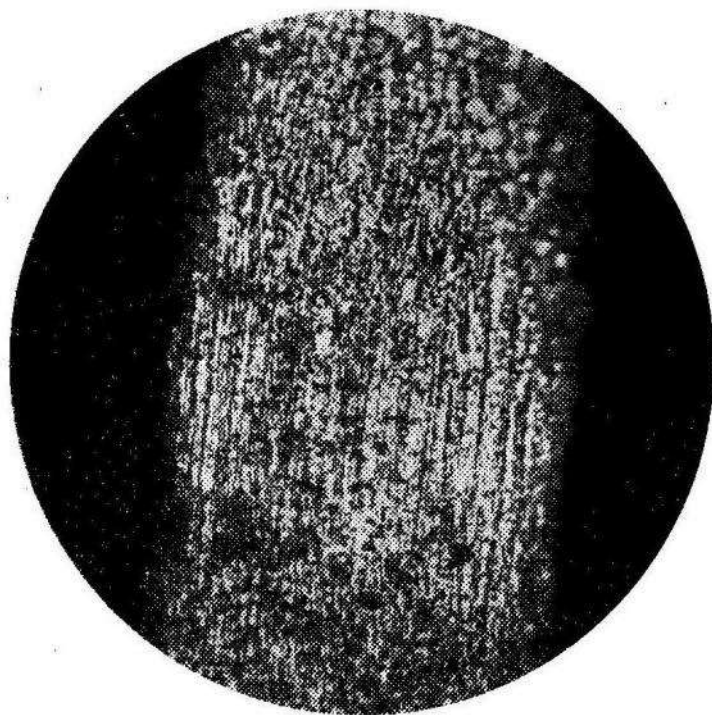


Рис. 1.

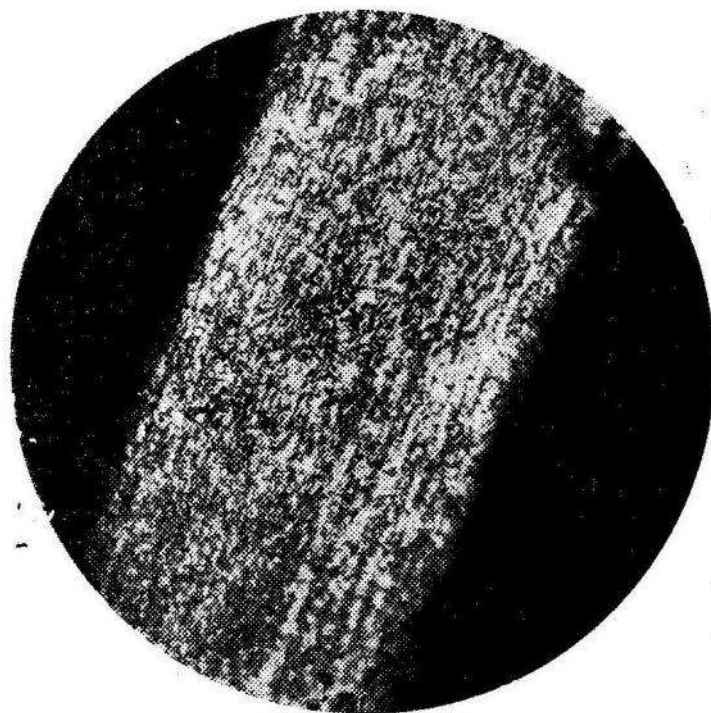


Рис. 2



Рис. 3.



Рис. 4.

У образцов, выдержанных при температуре 1800° , зерна становятся похожими на хлопья с достаточно четкой извилистой границей (рис. 2). Сглаживание острых границ у отдельных мелких зерен, вероятно, можно объяснить оплавлением этих участков, которое может возникать ввиду большой плотности на острых гранях электрического тока, проходящего через проволоку.

При температуре $1900\text{--}2000^{\circ}$ происходит дальнейшее оплавление мелких зерен и группирование их в большие области. При 2000° границы между такими областями становятся четкими, но достаточно тонкими (рис. 3). Микротвердость таких кристаллитов делается ниже, она примерно равна 450 кг/мм^2 .

Дальнейшее увеличение температуры до $2400\text{--}2500^{\circ}$ ведет к ясно выраженному спеканию вольфрамовых зерен внутри больших областей. Поверхность этих областей становится чище. Учитывая, что присадки при температурах $2000\text{--}2500^{\circ}$ находятся в жидком состоянии, можно предположить их стекание к границам кристаллитов, это хорошо видно на снимках (рис. 4). Микротвердость понижается до 380 кг/мм^2 .

При температуре 2700° такие области окончательно становятся монокристаллами с блестящей чистой поверхностью и достаточно широкими слоями межкристаллического вещества между ними. Микротвердость таких монокристаллов равна 350 кг/мм^2 .

А. С. ПИЗИО

ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ КРИСТАЛЛ КАК ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИЙ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИК И ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА ДЛЯ ЕГО АНАЛИЗА

В настоящее время во многих аппаратах связи, радио, акустики и измерительной техники широко применяются пьезоэлектрические кристаллы.

Физическое состояние препарата из пьезоэлектрического кристалла, как известно, описывается системой уравнений, вид и характер которых определяется выбором переменных. Постоянные коэффициенты в уравнениях соответствуют физическим параметрам пьезоэлектрического препарата и зависят от природы кристалла, среза, размеров, монтровки, а также электромеханического состояния его сторон.

До настоящего времени пьезоэлектрический препарат (пла-

стина, стержень и т. д.) рассматривается, с одной стороны, как упругая, непрерывная, анизотропная среда, к которой приложима теория упругости анизотропного тела, с другой, — как эквивалентный электрический колебательный контур с определенными значениями индуктивности, емкости и сопротивления.

В нашей работе пьезоэлектрический препарат рассматривается как устройство, которое служит для преобразования энергии (электрической в механическую и наоборот). В этом случае его можно трактовать как электромеханическую систему, в которой он играет роль связывающего звена между электрической и механической частями системы. Пьезоэлектрический препарат-преобразователь в этом случае может быть своего рода электромеханическим четырехполюсником с двумя электрическими и двумя механическими полюсами.

Если этот преобразователь — линейный, пассивный элемент, что в большинстве случаев справедливо, то его электрическим аналогом может служить линейный, пассивный электрический четырехполюсник.

Это означает, что уравнения состояния такого пьезоэлектрического препарата принимают вид, аналогичный уравнениям электрических четырехполюсников, и для рассмотрения всех вопросов, связанных с его работой, вполне пригодны выводы теории четырехполюсника.

Четырехполюсниковые уравнения пьезоэлектрического преобразователя раскрывают физическую сущность его параметров и наглядно показывают их взаимную связь. Они объединяют в себе зависимости, получаемые вышеупомянутыми методами анализа пьезоэлектрических препаратов, и тем самым являются очень ценными для рассмотрения пьезоэлектрических систем.

Экспериментальное исследование пьезоэлектрического препарата как электромеханического четырехполюсника приводит к однозначному определению его упругих, диэлектрических и пьезоэлектрических постоянных, с одной стороны, и эквивалентных значений индуктивности, емкости и сопротивления — с другой, а также определяет взаимную связь между ними.

Знание истинных значений упомянутых величин позволяет построить электрические схемы замещения пьезоэлектрического препарата, что весьма облегчает не только анализ, но и намечает пути дальнейшего его усовершенствования.

Данная работа посвящена также ряду вопросов теории четырехполюсника и ее приложения к расчету и исследованию пьезоэлектрических систем, которые либо совсем не нашли отражения в работах других авторов, либо нуждаются в дальнейшем развитии.

ЗАВИСИМОСТЬ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ КРИСТАЛЛОВ ДИГИДРОФОСФАТА АММОНИЯ ОТ ПОСТОРОННИХ ПРИМЕСЕЙ

Пьезоэлектрические препараты из кристаллов дигидрофосфата аммония, употребляемые в технике слабых токов, требуют минимальной их электропроводности. Поэтому и возникла необходимость детального изучения этого вопроса.

Рентгеновский анализ показывает, что ион PO_4 связан с другим ионом PO_4 водородной связью, что позволяет считать носителями тока ионы PO_4 и примеси, которые имеют еще меньшую связь, чем ионы PO_4 .

Для более детального изучения механизма электропроводности в кристалл во время роста вводились посторонние примеси и изучалась электропроводность таких кристаллов. В качестве посторонних примесей применялись молибденовокислый аммоний, хромовокислый аммоний, сернокислый аммоний, фосфаты натрия, калия и др.

Электропроводность всех кристаллов с вышеуказанными примесями укладывается в логарифмическую зависимость

$$\ln \sigma = \beta + \frac{\alpha}{T},$$

где σ — электропроводность, T — температура, α и β — константы, при этом α — пропорциональная энергии активации ионов.

Если для чистых кристаллов энергия активации была порядка 14—17 ккал/моль, то для кристаллов с примесями ее значения другие.

Присутствие ионов молибдена и хрома в кристалле укрепляюще действует на кристалл, и энергия активации возрастает до 20—22 ккал/моль, а присутствие других примесей дает энергию активации порядка 9—12 ккал/моль. Эти примеси как бы разрыхляют кристалл.

Вопрос о носителях тока в кристаллах требует дополнительных экспериментов.

Судя по литературным источникам, до сих пор нет экспериментальных данных не только для кристаллов с примесями, но даже и для чистых кристаллов.

По всей вероятности, для улучшения электрических свойств кристаллов дигидрофосфата аммония имеет смысл применять примеси молибдата аммония, которые уменьшают электропроводность кристаллов.

ВЛИЯНИЕ ПОСТОРОННИХ ПРИМЕСЕЙ НА РОСТ КРИСТАЛЛА ДИГИДРОФОСФАТА АММОНИЯ

При выращивании кристаллов из водного раствора основное внимание направлено на чистоту исходной соли и чистоту растворителя, чтобы получить кристаллы нужной чистоты.

В этой работе преследовалась обратная цель. В раствор вводились посторонние примеси и затем исследовалось влияние этих примесей на скорость роста, габитус кристалла и их проникновение в растущий кристалл. При этом приходилось иметь дело с «естественными» и «искусственными» примесями. Под «естественными» примесями следует понимать такие, которые находились в исходной соли и в растворителе (водопроводная недистиллированная вода с различными примесями). «Искусственные» примеси — это примеси, вводимые во время составления раствора для выращивания (обычно различные соли аммония). В отношении естественных примесей нас интересовало только одно: входят они в растущий кристалл или нет, так как в растворе их было мало. Количественное содержание примесей в растворе и в растущем кристалле определяли спектрографически. В результате многочисленных опытов выяснено, что посторонние примеси входят в растущий кристалл только тогда, когда их в растворе больше определенного количества. Для различных примесей искусственного и естественного происхождения (железо, алюминий, магний, кальций, медь, кремний, натрий, марганец, свинец, хром, молибден, сера и др.) существует определенная «граница» проникновения в растущий кристалл. Эта граница для указанных выше примесей лежит в пределах от 0,1 до 1 %.

Из искусственных примесей особо следует отметить молибденовокислый аммоний. Эта примесь при определенной концентрации и температуре позволяет выращивать ромбические кристаллы, в то время как фосфат аммония тетрагональной сингонии. Другие посторонние примеси (хромовокислый аммоний, сернокислый аммоний) увеличивают скорость роста вдоль оси z в 2—3 раза, и одновременно сужают кристалл в направлении осей x и y , и постепенно основная призма переходит в пирамиду. Такие примеси, как фосфорнокислый натрий, фосфорнокислый калий интересны тем, что дают возможность получать основную призму кристалла очень правильной, без каких-либо нарушений.

Практически из всех посторонних примесей заслуживают внимание молибдат аммония и фосфорнокислый натрий.