Доповіді та повідомлення
Львівського державного університету імені Івана Франка
Випуск VI, частина 2 1955

МАТЕМАТИКА, МЕХАНІКА, ФІЗИКА

А. С. КОВАНЬКО

ЗАМЕТКА ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ B_p — РАВНОМЕРНО СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим функциональное пространство со следующей метрикой

$$D_{B_p}^E(f, \varphi) = \overline{\lim_{T\to\infty}} \left\{ \frac{1}{2T} \int\limits_{E(-T, +T)} |f(x) - \varphi(x)|^p \, dx \right\}^{\frac{1}{p}} \quad (p \geqslant 1).$$

$$D_{B_p}^E(f, \varphi), = D_{B_p}(f, \varphi), \text{ если } E = (-\infty, +\infty).$$

Введем следующую величину „плотности“ множества

$$\overline{\delta} E = \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{|E(-T, +T)|}{2T}.$$

Определение. $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ называется B_p — равномерно суммируемой, если как бы мало ни было $\varepsilon > 0$ существует такое число $\eta > 0$, что

$$D_{B_p}^E(f, 0) < \varepsilon, \text{ когда } \overline{\delta} E < \eta.$$

Из данного определения вытекает, что если $f(x)$ B_p — равномерно суммируема, то $D_{B_p}^E(f, 0) = 0$, когда $\overline{\delta} E = 0$. Мы ставим себе задачу доказать обратное, а именно:

Теорема 1. Если $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ обладает тем свойством, что $D_{B_p}^E(f, 0) = 0$, когда $\overline{\delta} E = 0$, то $f(x)$ есть B_p — равномерно суммируемая функция.

Доказательство. Предположим, что теорема не верна. Тогда можно найти такое число $A > 0$ и такую бесконечную последовательность множеств $\{E_m\}$ $(m = 1, 2, 3 \ldots .)$, что $\lim\limits_{m\to\infty} \overline{\delta} E_m = 0$ и что

$$D_{B_p}^{E_m}(f, 0) > A \quad (m = 1, 2, 3, \ldots .).$$

Предположим, что $\overline{\delta} E_m < \frac{1}{4^m}$. По смыслу сделанных предположений мы сможем построить бесконечную последовательность положительных чисел $\{T_m\}$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$, что $\lim\limits_{m\to\infty} T_m = \infty$, которая обладает следующими свойствами:

1)

$$T_m \geqslant 2\, T_{m+1}.$$

2)

$$|E_m(-T, -T_m)| + |E_m(+T_m, +T)| <$$

$$< \frac{1}{4^m} 2\,(T - T_m), \text{ когда } T \geqslant T_{m+1}.$$

3)

$$\int\limits_{E_m(-T,\,-T_m)} |f(x)|^p\, dx + \int\limits_{E_m(+T_m,\,+T)} |f(x)|^p\, dx > 2\, A^p \cdot (T - T_m), \text{ когда } T \geqslant T_{m+1}.$$

Построим теперь следующее множество:

$$E = E_1(-T_1, +T_1) + \sum_{m=1}^{\infty} [E_m(-T_{m+1}, -T_m) +$$

$$+ E_m(+T_m, +T_{m+1})].$$

Вычислим $\overline{\delta} E$. Для этого рассмотрим множество $E(-T, +T)$ и будем считать, что $T_n \leqslant T < T_{m+1}$. Очевидно, имеем тогда, что

$$|E(-T_1 + T)| \leqslant |E_1(-T_1, -T_1)| +$$

$$+ \sum_{m=1}^{m=n} \{|E_m(-T_{m+1}, -T_m)| + |E_m(+T_m, +T_{m+1})|\} \leqslant$$

$$\leqslant 2\, T_1 + 2 \sum_{m=1}^{m=n} (T_{m+1} - T_m) \frac{1}{4^m} < 2\, T_1 + 2 \sum_{m=1}^{m=n} T_{m+1} \cdot \frac{1}{4^m}.$$

Если $\frac{T_{m+1}}{T_m} \leqslant \frac{1}{2}$, то и $\frac{T_{m+1}}{T_n} \leqslant \frac{1}{2^{n-m-1}}$, отсюда

$$T_{m+1} \leqslant \frac{T_n}{2^{n-m-1}} \text{ и } T_1 \leqslant \frac{T_n}{2^{n-1}}.$$

Следовательно

$$|E(-T,+T)| < \frac{2T_n}{2^{n-1}} + 2\,T_n \sum_{m=1}^{m=n} \frac{1}{4^m} \cdot \frac{1}{2^{n-m-1}} <$$

$$< 2\,T_n \left(\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{m=1}^{m=n} \frac{1}{2^m} \right) < 2T_n \left(\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}} \right) = 2\,T_n \frac{1}{2^{n-2}}.$$

Поэтому

$$\frac{|E(-T,+T)|}{2\,T} = \frac{T_n}{T} \cdot \frac{1}{2^{n-2}} \leqslant \frac{1}{2^{n-2}}.$$

Отсюда очевидно, что

$$\lim_{T\to\infty} \frac{|E(-T,+T)|}{2\,T} = 0,$$

следовательно $\overline{\delta}E = 0$.

С другой стороны, рассмотрим величину интеграла

$$\int\limits_{E(-T_n,+T_n)} |f(x)|^p\,dx.$$

Имеем:

$$\int\limits_{E(-T_n,+T_n)} |f(x)|^p\,dx = \int\limits_{E_1(-T_1,+T_1)} |f(x)|^p\,dx + \sum_{m=1}^{m=n-1} \left\{ \int\limits_{E_m(-T_{m+1},-T_m)} |f(x)|^p\,dx \right\} +$$

$$+ \sum_{m=1}^{m=n-1} \left\{ \int\limits_{E_m(+T_m,+T_{m+1})} |f(x)|^p\,dx \right\} > 2\,A^p \sum_{m=1}^{m=n-1} (T_{m+1} - T_m) =$$

$$= 2\,A^p\,(T_n - T_1) \geqslant 2\,A^p \left(T_n - \frac{T_n}{2^{n-1}} \right) = 2\,T_n \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right) \cdot A^p.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{2\,T_n} \int\limits_{E(-T_n,+T_n)} |f(x)|^p\,dx > A^p \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right),$$

откуда видно, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{2\,T_n} \int\limits_{E(-T_n,+T_n)} |f(x)|^p\,dx \geqslant A^p,$$

а потому тем более

$$\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{2T}\int\limits_{E(-T,+T)}|f(x)|^p\,dx\geqslant A^p,$$

или, что то же

$$D_{B_p}^E(f,0)\geqslant A>0,$$

причем $\overline{\delta}E=0$. Мы пришли к противоречию с условиями нашей теоремы. Итак теорема доказана.

Теорема II. Если $D_{B_p}^E(f,0)=0$, когда $\overline{\delta}E=0$, то $D_{B_p}(f,0)<+\infty$.

Доказательство. В силу теоремы I вытекает, что $f(x)$ — функция B_p, — равномерно суммируемая. Возьмем числа ε и η из определения B_p—равномерной суммируемости. Тогда интервал $(-\infty,+\infty)$ мы сможем разбить на такое число множеств $E_1, E_2, E_3\dots E_n$, чтобы $\overline{\delta}E_i<\eta$ $(i=1,2,3\dots n)$, и потом

$$D_{B_p}^{E_i}(f,0)<\varepsilon.$$

Поэтому $D_{B_p}(f,0)\leqslant\sum\limits_{i=1}^{i=n}D_{B_p}^{E_i}(f,0)<\varepsilon\cdot n<+\infty$, что и требовалось доказать. Теорема II не имеет обратной, что видно из следующего примера.

Пример. Пусть $f(x)=2^n$ на отрезках $I_n=\left(+n-1\leqslant\right.$ $\left.\leqslant x\leqslant n-1+\frac{1}{2^n}\right)(n=1,2,3\dots)$. Вне этих отрезков

$$f(x)=0.$$

Пусть

$$E=\sum_{n=1}^{\infty}I_n.$$

Имеем

$$|E|=\sum_{n=1}^{\infty}|I_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1,$$

откуда ясно, что $\overline{\delta}E=0$.

С другой стороны, взяв $T>0$ таким, что $(n\leqslant T<n+1)$, имеем

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}|f(x)|\,dx \geqslant \frac{1}{2(n+1)}\int_{-n}^{+n}|f(x)|\,dx =$$

$$= \frac{1}{2(n+1)}\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{2^k}\cdot 2^k = \frac{1}{2\left(1+\frac{1}{n}\right)}.$$

Точно так же

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}|f(x)|\,dx \leqslant \frac{1}{2^n}\int_{-n-1}^{+n+1}|f(x)|\,dx =$$

$$= \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{k=n+1}\frac{1}{2^k}\cdot 2^k = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Отсюда ясно, что

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}|f(x)|\,dx = \frac{1}{2}.$$

Значит

$$D_{B_1}(f,\ 0) = \frac{1}{2}.$$

Но

$$D_{B_1}^{E}(f,\ 0) = D_{B_1}(f,\ 0) = \frac{1}{2}$$

при условии, что $\overline{\delta}E = 0$; значит условия теоремы II не имеют места, хотя

$$D_{B_1}^{E}(f,\ 0) < +\infty.$$

А. Н. КОСТОВСКИЙ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ АРГУМЕНТОВ КОМПЛЕКСНЫХ КОРНЕЙ ПРИ ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ЛОБАЧЕВСКОГО

Пусть дано уравнение

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \tag{1}$$

с действительными коэффициентами. Если уравнение имеет