$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}|f(x)|\,dx \geqslant \frac{1}{2(n+1)}\int_{-n}^{+n}|f(x)|\,dx =$$

$$= \frac{1}{2(n+1)}\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{2^k}\cdot 2^k = \frac{1}{2\left(1+\frac{1}{n}\right)}.$$

Точно так же

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}|f(x)|\,dx \leqslant \frac{1}{2^n}\int_{-n-1}^{+n+1}|f(x)|\,dx =$$

$$= \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{k=n+1}\frac{1}{2^k}\cdot 2^k = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Отсюда ясно, что

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}|f(x)|\,dx = \frac{1}{2}.$$

Значит

$$D_{B_1}(f,\ 0) = \frac{1}{2}.$$

Но

$$D_{B_1}^{E}(f,\ 0) = D_{B_1}(f,\ 0) = \frac{1}{2}$$

при условии, что $\overline{\delta}E = 0$; значит условия теоремы II не имеют места, хотя

$$D_{B_1}^{E}(f,\ 0) < +\infty.$$

А. Н. КОСТОВСКИЙ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ АРГУМЕНТОВ КОМПЛЕКСНЫХ КОРНЕЙ ПРИ ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ЛОБАЧЕВСКОГО

Пусть дано уравнение

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \tag{1}$$

с действительными коэффициентами. Если уравнение имеет кратные или равные по модулю корни, то предварительно от таких корней освобождаемся [см. 1].

Допустим, что корни x_{l_i} и x_{l_i+1} $(i=1, 2, \ldots, q)$ — комплексные $x_{l_i}=\rho_i(\cos\varphi_i+\sqrt{-1}\sin\varphi_i)$, $x_{l_i+1}=\rho_i(\cos\varphi_i-\sqrt{-1}\sin\varphi_i)$, тогда

$$|x_1|>|x_2|>\cdots>|x_{l_1}|=|x_{l_1+1}|>|x_{l_1+2}|>\cdots>|x_{l_i}|=$$
$$=|x_{l_i+1}|>\cdots>|x_{l_q}|=|x_{l_q+1}|>\cdots>|x_n|. \qquad (2)$$

Сделаем последовательно h известных преобразований в методе Лобачевского данного уравнения (1), получим уравнение:

$$f_h(x)=x^n+A_1^h\,x^{n-1}+\cdots+A_{n-1}^h\,x+A_n^h=0, \qquad (3)$$

корни которого суть $-x_1^m, -x_2^m, \ldots, -x_n^m$, где $m=2^h$. В коэффициентах $A_k^h h$ — индекс, а не степень.

Из этого уравнения следует

$$A_k^h=\sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le 2p}(x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k})^m=$$
$$=(x_1x_2\ldots x_k)\sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_k\le 2p}\left(\frac{x_{i_1}}{x_1}\right)^m\left(\frac{x_{i_2}}{x_2}\right)^m\ldots\left(\frac{x_{i_k}}{x_k}\right)^m, \qquad (4)$$

где $(k=1, 2, \ldots, n)$.

Подставляя значения комплексных корней в (4), получим:

$$A_k^h=(x_1x_2\ldots x_k)^m(1+\varepsilon_k^h),\ \text{если}\ k\ne l_i\ (i=1,2,\ldots,q) \qquad (5)$$

и

$$A_{l_i}^h=(x_1x_2\ldots x_{l_i}\rho_i)^m\,(2\cos m\varphi_i+\varepsilon_{l_i}^h)\ (i=1, 2, \ldots, q). \qquad (6)$$

Сделав достаточное количество преобразований h данного уравнения, величины $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ можно сделать как угодно малыми и в коэффициентах A_k^h, $(k\ne l_i)$ (из (5)) ими можно пренебречь.

Величина $2\cos m\varphi_i$ может оказаться равной нулю или очень малой по абсолютной величине (последнее может случиться, если аргумент искомого корня φ_i равен или весьма близок к значению $\dfrac{\frac{1}{2}\pi+\pi r}{m}\Big)$, поэтому величина $(x_1x_2\ldots x_{l_i}\rho_i)^m\cdot(\varepsilon^h_{l_i})$ может оказывать существенное влияние на величину $(x_1x_2\ldots x_{l_i}\rho_i)^m\,(2\cos m\varphi_i)$ и, следовательно, в пределах заданной точности первой величиной, а значит и $\varepsilon^h_{l_i}$, пренебрегать нельзя. Этот исключительный случай легко обнаружить проверкой, подставляя $\rho_i^m(\cos m\varphi_i\pm\sqrt{-1}\sin m\varphi_i)$ в уравнение (3), где ρ_i и $\cos m\varphi_i$ определяются из равенств (5) и (6) по формулам

$$\rho_i^m=\sqrt{\frac{A^h_{l_{i+1}}}{A^h_{l_{i-1}}}},\ \cos m\,\varphi_i=\frac{A^h_{l_i}}{2\,A^h_{l_{i-1}}},\ (i=1,\ 2,\ \ldots,q). \qquad (7)$$

Если данный корень уравнению (3) не удовлетворяет с принятой при вычислении точностью или теряется большое количество верных знаков, то это служит явным признаком того, что аргумент φ_i равен или весьма близок к величине $\dfrac{\frac{1}{2}\pi+\pi r}{m}$, $m=2^h$. Следовательно, $\cos m\,\varphi_i$ определять по формуле (7) нельзя. Тогда очевидно, что, сделав еще одно $h+1$ преобразование данного уравнения, получим уравнение $f_{n+1}(x)=0$, в котором $(\cos 2m\,\varphi_i)$ будет весьма близко к единице (аргумент $2m\,\varphi_i$ будет равен или весьма близок к $\pi+2\pi r$). Теперь величиной $\varepsilon^{h+1}_{l_i}$ можно пренебречь и $\cos 2m\,\varphi_i$ мы определим по формуле

$$\cos 2\,m\,\varphi_i=\cos 2^{h+1}\varphi_i=2\,\frac{A^{h+1}_{l_i}}{A^{h+1}_{l_{i-1}}}.$$

Пусть корень $\rho_i^m(\cos m\varphi_i\pm\sqrt{-1}\sin m\varphi_i)$ с принятой при вычислении точностью удовлетворяет уравнению (3).

Вычисляем

$$\cos 2^{h-1}\varphi_i=\pm\sqrt{\frac{1+\cos 2^h\varphi_i}{2}} \qquad (8)$$

или $\lg\cos 2^{h-1}\varphi_i=\frac{1}{2}\,[\lg(1+\cos 2^h\varphi_i)-\lg 2]$, где значение $\lg(1+\cos 2^h\varphi_i)$ лучше вычислять, пользуясь гауссовыми логарифмами сумм и разностей. Затем из уравнения $f_{h-1}(x)=0$ определяем величину $\dfrac{A^{h-1}_{l_i}}{2A^{h-1}_{l_{i-1}}}$. Если эта величина совпадает или незначительно отличается от значения корня в (8) (т. е. теряется несколько верных знаков), то берем значение $\cos 2^{h-1}\varphi_i$ в (8) со знаком, совпадающим со знаком коэффициента $A_{l_i}^{h-1}$, в противном случае знак $\cos 2^{h-1}\varphi_i$ устанавливаем проверкой, подставляя $\rho_i^{2^{h-1}}(\cos 2^{h-1}\varphi_i \pm \sqrt{-1}\sin 2^{h-1}\varphi_i)$ в уравнение $f_{n-1}(x)=0$, где ρ_i определяется из (8).

Дальше аналогично определяется $\cos 2^{h-2}\varphi_i$ и т. д. Проделав h шагов, найдем $\cos\varphi_i$, а следовательно, и аргумент пары сопряженных комплексных корней данного уравнения (1) x_{l_i} и x_{l_i+1}.

Предложенный способ определения аргументов комплексных корней существенно отличается от известных уже способов, например, от способа, предложенного Энке (2), в котором приходится составлять два многочлена, соответственно степеней $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ и $\left[\frac{n+1}{2}\right]-1$, находить их общий наибольший делитель и, наконец, приравняв последний нулю, решать полученное уравнение. Так как коэффициенты составленных многочленов, вообще говоря, будут несоизмеримы, то нахождение общего наибольшего делителя вызывает значительные трудности. Трудность определения аргументов методом Энке будет тем больше, чем выше степени данного уравнения (1). Трудность определения аргументов способом, предложенным в настоящей статье, зависит от количества преобразований данного уравнения и не зависит от степени n данного уравнения (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Крылов. Лекции о приближенных вычислениях, Гостехиздат. 1950.

J. F. Encke. Allgemeine Auflösung der numerischen Glichungen, „Berliner astronomisches Jahrbuch für 1841", 1839, 66, стр. 281-338, то же в „Journal für die reine und angewandte Mathematik" 1841, 22, стр. 193-248, то же в кн. „Gesammelte mathematische und astronomische Abhandlungen von. J. F. Encke" т. 1. Берлин, 1888.

А. Н. КУЛИК

УПРУГОЕ РАВНОВЕСИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНКИ С КРУГОВЫМ ВЫРЕЗОМ, ПОДКРЕПЛЕННЫМ ТОНКИМ УПРУГИМ КОЛЬЦОМ

Рассмотрим плоскую задачу о напряженном состоянии эллиптической пластинки с круговым вырезом, подкрепленным тонким кольцом. Центр кольца и центр симметрии