или незначительно отличается от значения корня в (8) (т. е. теряется несколько верных знаков), то берем значение $\cos 2^{h-1}\varphi_i$ в (8) со знаком, совпадающим со знаком коэффициента $A_{l_i}^{h-1}$, в противном случае знак $\cos 2^{h-1}\varphi_i$ устанавливаем проверкой, подставляя $\rho_i^{2^{h-1}}(\cos 2^{h-1}\varphi_i \pm \sqrt{-1}\sin 2^{h-1}\varphi_i)$ в уравнение $f_{n-1}(x)=0$, где ρ_i определяется из (8).

Дальше аналогично определяется $\cos 2^{h-2}\varphi_i$ и т. д. Проделав h шагов, найдем $\cos\varphi_i$, а следовательно, и аргумент пары сопряженных комплексных корней данного уравнения (1) x_{l_i} и x_{l_i+1}.

Предложенный способ определения аргументов комплексных корней существенно отличается от известных уже способов, например, от способа, предложенного Энке (2), в котором приходится составлять два многочлена, соответственно степеней $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ и $\left[\frac{n+1}{2}\right]-1$, находить их общий наибольший делитель и, наконец, приравняв последний нулю, решать полученное уравнение. Так как коэффициенты составленных многочленов, вообще говоря, будут несоизмеримы, то нахождение общего наибольшего делителя вызывает значительные трудности. Трудность определения аргументов методом Энке будет тем больше, чем выше степени данного уравнения (1). Трудность определения аргументов способом, предложенным в настоящей статье, зависит от количества преобразований данного уравнения и не зависит от степени n данного уравнения (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Крылов. Лекции о приближенных вычислениях, Гостехиздат, 1950.

J. F. Encke. Allgemeine Auflösung der numerischen Glichungen, „Berliner astronomisches Jahrbuch für 1841", 1839, 66, стр. 281-338, то же в „Journal für die reine und angewandte Mathematik" 1841, 22, стр. 193-248, то же в кн. „Gesammelte mathematische und astronomische Abhandlungen von. J. F. Encke" т. 1. Берлин, 1888.

А. Н. КУЛИК

УПРУГОЕ РАВНОВЕСИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНКИ С КРУГОВЫМ ВЫРЕЗОМ, ПОДКРЕПЛЕННЫМ ТОНКИМ УПРУГИМ КОЛЬЦОМ

Рассмотрим плоскую задачу о напряженном состоянии эллиптической пластинки с круговым вырезом, подкрепленным тонким кольцом. Центр кольца и центр симметрии эллипса совпадают. По внешнему контуру пластинки приложено гидростатическое давление интенсивности p. Другой вид нагрузки несущественно отражается на решении задачи. Напряженное состояние в пластинке определяется функциями $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ голоморфными в двухсвязной области S, ограниченной окружностью γ радиуса R и контуром L, и удовлетворяющими граничным условиям [1]:

$$\varphi(t)+t\overline{\varphi'(t)}+\overline{\psi(t)}=-pt+\text{const} \quad \text{на } L \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} &x\overline{\varphi'(t)}-\varphi'(t)+e^{2i\alpha}\{\bar{t}\varphi''(t)+\psi'(t)\}=2\mu(\varepsilon_o-i\Theta)\\ &\overline{\varphi'(t)}+\varphi'(t)-e^{2i\alpha}\{\bar{t}\varphi''(t)+\psi'(t)\}=e^{i\alpha}(X_n-iY_n)\end{aligned}\right\} \text{ на } \gamma \tag{2}$$

μ — модуль сдвига пластинки, α — угол между нормалью к окружности и положительным направлением оси x, ε_o — относительное удлинение осевой линии подкрепляющего кольца. Θ — угол поворота подкрепляющего кольца в плоскости xoy. За начало отсчета дуг выберем точку (R, O), где R — радиус средней линии подкрепляющего кольца.

Раскладывая проекции напряжений X_n и Y_n в ряды Фурье:

$$X_n=\alpha_o+\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\sigma^k+\bar{\alpha}_k\sigma^{-k}, \qquad Y_n=\beta_o+\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k\sigma^k+\bar{\beta}_k\sigma^{-k}, \tag{3}$$

из равенства нулю главного вектора усилий, приложенных к контуру γ, получим, что $\alpha_o=\beta_o=0$, и из равенства нулю главного момента этих усилий следует $\alpha_1+i\beta_1=\bar{\alpha}_1-i\bar{\beta}_1$. Из условий (2) на контуре γ найдем

$$\begin{aligned}\varphi'(t)=\frac{1}{\varkappa+1}\Bigg\{&\sum_{k=1}^{\infty}(k+2)[(\alpha_k-i\beta_k)C_k+(\alpha_{k+2}+\\ &+i\beta_{k+2})D_{k+2}]\left(\frac{t}{R}\right)^{k+1}-\sum_{k=1}^{\infty}k[(\bar{\alpha}_k+i\bar{\beta}_k)A_k+(\bar{\alpha}_{k+2}-\\ &-i\bar{\beta}_{k+2})B_{k+2}]\left(\frac{R}{t}\right)^{k+1}+\left[\frac{2\mu R}{g_1}+1\right](\alpha_2+i\beta_2)\frac{t}{R}+\\ &+\left[\frac{2\mu R^3}{g_1R^2+g_2}+1\right](\alpha_1+i\beta_1)+2\mu i\,(C_u+\Theta_o)\Bigg\},\end{aligned} \tag{4}$$

$$\psi'(t)=\frac{1}{\varkappa+1}\Bigg\{\sum_{k=1}^{\infty}k[(\alpha_k-i\beta_k)F_k-(\alpha_{k+2}+i\beta_{k+2})L_{k+2}]\left(\frac{t}{R}\right)^{k-1}-$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}(k+2)[(\overline{\alpha}_k+i\overline{\beta}_k)M_k+(\overline{\alpha}_{k+2}-i\overline{\beta}_{k+2})N_{k+2}]\left(\frac{R}{t}\right)^{k+3}+$$

$$+\left[\frac{4\mu R^3}{g_1R^2+g_2}+1-\varkappa\right](\alpha_1+i\beta_1)\left(\frac{R}{t}\right)^2+\left[\frac{2\mu R}{g_1}-\varkappa\right](\overline{\alpha}_2-$$

$$-i\overline{\beta}_2)\left(\frac{R}{t}\right)^3\Big\}. \tag{5}$$

Здесь

$$A_k=\frac{\mu Rg_2k^2+\mu R^3g_1-g_1g_2k(k+1)^2}{g_1g_2k^2(k+1)^2},$$

$$B_{k+2}=\frac{\mu R^3g_1-\mu Rg_2k(k+2)}{g_1g_2k(k+1)^2(k+2)},$$

$$C_k=\frac{\mu R^3g_1-\mu Rg_2k(k+2)}{g_1g_2k(k+1)^2(k+2)},$$

$$D_{k+2}=\frac{g_1g_2(k+1)^2(k+2)+\mu Rg_2(k+2)^2+\mu R^3g_1}{g_1g_2(k+1)^2(k+2)^2},$$

$$M_k=\frac{\mu Rg_2k(k+2)+\mu R^3g_1-g_1g_2k(k+1)(k+2)}{g_1g_2k(k+1)(k+2)},$$

$$N_{k+2}=\frac{\mu R^3g_1+\varkappa g_1g_2(k+1)(k+2)-\mu Rg_2(k+2)^2}{g_1g_2(k+1)(k+2)^2},$$

$$F_k=\frac{\mu Rg_2k^2-\mu R^3g_1-g_1g_2\varkappa k(k+1)}{g_1g_2k^2(k+1)},$$

$$L_{k+2}=\frac{g_1g_2k(k+1)(k+2)+\mu R^3g_1+\mu Rg_2k(k+2)}{g_1g_2k(k+1)(k+2)},$$

где g_1 — жесткость подкрепляющего кольца на растяжение, g_2 — жесткость на изгиб, C_u — действительная постоянная интегрирования, Θ_o — угол поворота кольца в точке (R, o). В формулах (5) и (4) комплексную величину $\alpha_k-i\beta_k$ обозначим через a_k+ib_k и $\alpha_{k+2}+i\beta_{k+2}$ через $c_{k+2}+id_{k+2}$. Положим, что в области S искомые функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$ имеют вид

$$\varphi(z)=\frac{1}{\varkappa+1}\Big\{\sum_{k=1}^{\infty}[(a_k-ib_k)A_k+(c_{k+2}-id_{k+2})B_{k+2}]\frac{R^{k+1}}{z^k}+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}[(a_k+ib_k)C_k+(c_{k+2}+id_{k+2})D_{k+2}]\frac{z^{k+2}}{R^{k+1}}+$$

$$+\left[\frac{2\mu R}{g_1}+1\right]\frac{(c_2+id_2)}{2}\frac{z^2}{R}+\left[\frac{2\mu R^3}{g_1R^2+g_2}+1\right](\alpha_1+i\beta_1)z+$$

$$+2\mu i(C_u+\Theta_o)z\Big\}+A_o, \tag{6}$$

$$\psi(z)=\frac{1}{\varkappa+1}\Big\{\sum_{k=1}^{\infty}[(a_k+ib_k)F_k-(c_{k+2}+id_{k+2})L_{k+2}]\frac{z^k}{R^{k-1}}+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}[(a_k-ib_k)M_k+(c_{k+2}-id_{k+2})N_{k+2}]\frac{R^{k+3}}{z^{k+2}}-$$

$$-\left[\frac{4\mu R^3}{g_1R^2+g_2}+1-\varkappa\right](\alpha_1+i\beta_1)\frac{R^2}{z}-$$

$$-\left[\frac{2\mu^{?}}{g_1}-\varkappa\right]\frac{c_2-id_2}{2}\frac{R^3}{z^2}\Big\}+B_o, \qquad (7)$$

где A_o, B_o — комплексные постоянные, выражающиеся через неизвестные a_κ, b_κ, $c_{\kappa+2}$, $d_{\kappa+2}$. При таком задании функций $\varphi(z)$, $\psi(z)$ граничные условия на γ удовлетворяются тождественно, независимо от вида коэффициентов a_κ, b_κ, $c_{\kappa+2}$, $d_{\kappa+2}$. Как видно из (6) и (7), искомые функции можно представить как сумму двух функций, одна из которых имеет действительные коэффициенты a_κ, $c_{\kappa+2}$, а другая — чисто мнимые ib_κ, $id_{\kappa+2}$.

$$\varphi(z)=\varphi_\partial(z)+\varphi_м(z);\quad \psi(z)=\psi_\partial(z)+\psi_м(z) \qquad (8)$$

$$A_o=A^*+iA^{**},\quad B_o=B^*+iB^{**}.$$

Подставляя формулы (8) в условие (1), получим для определения неизвестных коэффициентов a_κ, $c_{\kappa+2}$, b_κ, $d_{\kappa+2}$ два граничных равенства [2]:

$$\varphi_\partial(t)+t\cdot\overline{\varphi'_\partial(t)}+\overline{\psi_\partial(t)}=-pt+C^*, \qquad (9)$$

на L

$$\varphi_м(t)+t\overline{\varphi'_м(t)}+\overline{\psi_м(t)}=iC^{**}, \qquad (10)$$

где $\mathrm{const}=C^*+iC^{**}$ — постоянная, подлежащая определению. Взяв в рядах для $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ конечное число членов s, подставим значения $\varphi_\partial(z)$, $\psi_\partial(z)$ в (9). Переходя к переменной $\sigma: t=A\left(\sigma+\frac{m}{\sigma}\right)$, введем обозначения $\lambda=\frac{R}{A}$ и

$$g_1(n,\ k)=(-1)^{\frac{n-k}{2}}\frac{\frac{n+k}{2}!}{\frac{n-k}{2}!\ k!}m^{\frac{n-k}{2}},$$

$$g(n,\ k)=\frac{k!}{\frac{n+k}{2}!\ \frac{k-n}{2}!}m^{\frac{n+k}{2}}.$$

Меняя порядок суммирования и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях σ, для определения a_κ и $c_{\kappa+2}$ получим систему:

$$\sum_{\kappa=0}^{s'} \alpha_{2\kappa+1}^{2n+1} a_{2\kappa+1} + \beta_{2\kappa+3}^{2n+1} c_{2\kappa+3} =$$

$$= \begin{cases} -p(\varkappa+1) - (\alpha_1 + i\beta_1)\left\{\left[\dfrac{4\mu R^3}{g_1 R^2 + g_2} + 2\right] - \left[\dfrac{4\mu R^3}{g_1 R^2 + g_2} + \right.\right. \\ \qquad \left.\left. + 1 - \varkappa\right]\lambda^2 g_1(0,0)\right\} & \text{при } n = 0 \\ \left[\dfrac{4\mu R^3}{g_1 R^2 + g_2} + 1 - \varkappa\right]\lambda^2(\alpha_1 + i\beta_1) g_1(2n,\ 0) & \text{при } n = 1, \ldots, s' \end{cases}$$

$$\sum_{\kappa=0}^{s'} \gamma_{2\kappa+1}^{2n+1} a_{2\kappa+1} + \delta_{2\kappa+3}^{2n+1} c_{2\kappa+3} =$$

$$= \begin{cases} -p(\varkappa+1)m - \left[\dfrac{4\mu R^3}{g_1 R^2 + g_2} + 2\right](\alpha_1 + i\beta_1)m & \text{при } n = 0, \\ 0 & \text{при } n = 1,\ 2, \ldots, s', \end{cases}$$

где известные коэффициенты имеют вид:

$$\alpha_{2\kappa+1}^{2n+1} = \frac{C_{2\kappa+1}}{\lambda^{2\kappa+2}}\,[g(-2n-1, 2k+3) + (2k+3)g(2n,\ 2k+2) +$$
$$+ m\cdot(2k+3)g(2n+2,\ 2k+2)] -$$
$$-(2k+1)\lambda^{2\kappa+2}A_{2\kappa+1}[g_1(2n-1,\ 2\kappa+1) + mg_1(2n+$$
$$+1,\ 2\kappa+1)] + M_{2\kappa+1}\lambda^{2\kappa+4}g_1(2n,\ 2\kappa+2) +$$
$$+ \frac{F_{2\kappa+1}}{\lambda^{2\kappa}}\,g(2n+1,\ 2\kappa+1);$$

$$\beta_{2\kappa+3}^{2n+1} = \frac{D_{2\kappa+3}}{\lambda^{2\kappa+2}}\,[g(-2n-1,\ 2\kappa+3) + (2\kappa+3)g(2n,\ 2\kappa+2) +$$
$$+ m(2\kappa+3)g(2n+2,\ 2\kappa+2)] -$$
$$-(2\kappa+1)\lambda^{2\kappa+2}B_{2\kappa+3}[g_1(2n-1,\ 2\kappa+1) +$$
$$+ mg_1(2n+1,\ 2\kappa+1)] + N_{2\kappa+3}\lambda^{2\kappa+4}g_1(2n,\ 2\kappa+2) -$$
$$-\frac{L_{2\kappa+3}}{\lambda^{2\kappa}}\,g(2n+1,\ 2\kappa+1);$$

$$\gamma_{2\kappa+1}^{2n+1} = A_{2\kappa+1}\lambda^{2\kappa+2}g_1(2n,\ 2\kappa) + \frac{C_{2\kappa+1}}{\lambda^{2\kappa+2}}\,[g(2n+1,\ 2\kappa+3) +$$
$$+ (2\kappa+3)g(-2n-2,\ 2\kappa+2) + m(2\kappa+3)g(-2n,\ 2\kappa+2)] +$$
$$+ \frac{F_{2\kappa+1}}{\lambda^{2\kappa}}\,g(-2n-1,\ 2\kappa+1);$$

$$\delta_{2\kappa+3}^{2n+1} = B_{2\kappa+3}\lambda^{2\kappa-2}g_1(2n,\ 2\kappa) + \frac{D_{2\kappa+3}}{\lambda^{2\kappa+2}}[g(2n+1,\ 2\kappa+3) +$$

$$+ (2\kappa+3)g(-2n-2,\ 2\kappa+2) + m(2\kappa+3)g(-2n,\ 2\kappa+2)] -$$

$$-\frac{L_{2\kappa+3}}{\lambda^{2\kappa}}g(-2n-1,\ 2\kappa+1).$$

Для коэффициентов b_ν, d_ν получим однородную систему с детерминантом, отличным от нуля, поэтому все $b_\nu = d_\nu = 0$. Из сравнения коэффициентов при σ^0 следует, что $C^* = A^* + B^*$. Из условия сходимости рядов для X_n и Y_n, задавшись величиной s', приравняем нулю коэффициент $c_{2s'+3}$. Получим систему уравнений, из которой определяется и $\alpha_1 + i\beta_1$. Проведен подсчет функций и напряжений при отношении полуосей эллипса $\frac{b}{a} = \frac{3}{4}$. Для $s' = 2$ граничное условие проверялось в двух точках: на концах горизонтального и вертикального диаметра. Ошибка в выполнении граничного условия для $s' = 2$ не превосходит 1,5%. Для достижения бо́льшей точности выполнения граничных условий следует увеличить число s'. В таблице приведены значения напряжений по контуру спая в кольце и пластинке.

Таблица

	В пластинке			В кольце
	$\frac{\widehat{\theta\theta}}{p}$	$\frac{\widehat{rr}}{p}$	$\frac{\widehat{r\theta}}{p}$	$\frac{\widehat{\theta\theta}}{p}$
0°	−1,990	−0,656	0,0000	−7,044
15°	−1,986	−0,654	−0,0102	−7,029
30°	−1,970	−0,647	−0,0306	−6,975
45°	−1,935	−0,635	−0,0563	−6,852
60°	−1,884	−0,620	−0,0675	−6,669
75°	−1,837	−0,607	−0,0470	−6,501
90°	−1,818	−0,603	0,0000	−6,432

ЛИТЕРАТУРА

1. М. П. Шереметьев. Пластинка, край которой подкреплен упругим кольцом постоянного сечения. ДАН УССР №1. 1952.

2. М. З. Народецкий. Растяжение квадратной пластинки, ослабленной круговым вырезом в центре. Инж. сборник, т. 14, 1953.