А. Н. КУЛИК

КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ ВОЗЛЕ КРУГОВОГО ОТВЕРСТИЯ, ПОДКРЕПЛЕННОГО ТОНКИМ УПРУГИМ КОЛЬЦОМ

Пусть в изотропной плоскости сделано отверстие, в которое впаяно тонкое упругое кольцо, радиус осевой линии которого R. На бесконечности к плоскости приложена какая-то система нагрузок, при которой функция напряжений Эри для плоскости без отверстия имеет вид полинома степени $n+2$:

$$U_o(x, y) = C_{n+2,0}\, x^{n+2} + C_{n+1,1}\, x^{n+1} y + \ldots + C_{1,\, n+1}\, x y^{n+1} + \\ + C_{0,\, n+2}\, y^{n+2} + C_{n+1,\,0}\, x^{n+1} + \ldots + C_{0,\, n+1}\, y^{n+1} + \ldots + \\ + C_{2,\,0}\, x^2 + C_{1,\,1}\, xy + C_{0,2}\, y^2 .$$

Нетрудно определить по $U_o(x, y)$ соответствующие ей функции напряжений Колосова-Мусхелишвили, а по ним их производные $\Phi_o(z) = \frac{d\varphi_0(z)}{dz}$, $\Psi_o(z) = \frac{d\psi_0(z)}{dz}$. Их общий вид будет [1]

$$\Phi_o(z) = \frac{A_n}{R^n} z^n + \frac{A_{n-1}}{R^{n-1}} z^{n-1} + \ldots + \frac{A_2}{R^2} z^2 + \frac{A_1}{R} z + A_o;$$

$$\Psi_o(z) = \frac{B_n}{R^n} z^n + \frac{B_{n-1}}{R^{n-1}} z^{n-1} + \ldots + \frac{B_2}{R^2} z^2 + \frac{B_1}{R} z + B_o .$$

Здесь коэффициенты A_j, B_j — вообще комплексные. R — пока произвольная вещественная постоянная. Так как влияние подкрепленного отверстия на напряженное состояние плоскости должно сказываться только вблизи подкрепленного выреза, то функции напряжений имеют вид:

$$\Phi_1(z) = \Phi_0(z) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{R^k}{z^k}, \quad \Psi_1(z) = \Psi_0(z) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{R^k}{z^k} .$$

Эти функции должны быть определены из граничных условий, которые относим к осевой линии подкрепляющего кольца. Делая замену $z = R\zeta$ и вводя обозначения

$$\Phi_1[z(\zeta)] = \Phi_1(\zeta), \ \ \Psi_1[z(\zeta)] = \Psi_1(\zeta), \ \ \Phi_0[z(\zeta)] = \Phi_0(\zeta), \\ \Psi_0[z(\zeta)] = \Psi_0(\zeta), \ \ \Phi[z(\zeta)] = \Phi(\zeta), \ \ \Psi[z(\zeta)] = \Psi(\zeta);$$

запишем граничные условия задачи:

$$\varkappa\overline{\Phi(\sigma)} - \Phi(\sigma) + \sigma^2 \left\{ \frac{1}{\bar\sigma} \Phi'(\sigma) + \Psi(\sigma) \right\} = 2\mu(\varepsilon_0 - i\Theta) -$$

$$-\varkappa\sum_{k=0}^{n}\bar{A}_{\kappa}\sigma^{-k}-\sum_{k=0}^{n}(\kappa-1)A_k\sigma^k-\sum_{k=0}^{n}B_k\sigma^{k+2};$$

$$\overline{\Phi(\sigma)}+\Phi(\sigma)-\sigma^2\left\{\frac{1}{\sigma}\Phi'(\sigma)+\Psi(\sigma)\right\}=\sigma[X_n(\vartheta)-iY_n(\vartheta)]-$$

$$-\sum_{\kappa=0}^{n}\bar{A}_k\sigma^{-k}+\sum_{\kappa=0}^{n}(k-1)A_k\sigma^k+\sum_{\kappa=0}^{n}B_k\sigma^{k+2}.$$

Разложим проекции усилий X_n, Y_n в ряды Фурье

$$X_n=\alpha_0+\sum_{\kappa=1}^{\infty}\alpha_k\sigma^k+\bar{\alpha}_k\sigma^{-\kappa},\quad Y_n=\beta_0+\sum_{\kappa=1}^{\infty}\beta_n\sigma^k+\bar{\beta}_k\sigma^{-\kappa}.$$

Главный вектор и главный момент усилий, передаваемых на упругую плоскость, со стороны кольца равны нулю, что дает:

$$\alpha_0=\beta_0=0,\quad \alpha_1+i\beta_1=\bar{\alpha}_1-i\bar{\beta}_1.$$

Применяя известный способ [2], определим растягивающую силу и изгибающий момент в подкрепляющем кольце:

$$N=(V_{oy}+RD_\beta)\frac{1}{2}\left(\sigma+\frac{1}{\sigma}\right)+\frac{i}{2}(V_{ox}+RD_\alpha)\left(\sigma-\frac{1}{\sigma}\right)+$$

$$+R(\alpha_1+i\beta_1)-\frac{R}{2}\sum_{\kappa=1}^{\infty}(\gamma_{\kappa+1}\sigma^{\kappa+1}+\bar{\gamma}_{\kappa+1}\sigma^{-(\kappa+1)})+$$

$$+\frac{R}{4}[(\alpha_2+i\beta_2)\sigma+(\bar{\alpha}_2-i\bar{\beta}_2)\sigma^{-1}];$$

$$M=\frac{R^2}{4}[(\alpha_2+i\beta_2)\sigma+(\bar{\alpha}_2-i\bar{\beta}_2)\sigma^{-1})-\frac{R}{2}\left(\sigma+\frac{1}{\sigma}\right)(V_{oy}+$$

$$+RD_\beta)-\frac{i}{2}R\left(\sigma-\frac{1}{\sigma}\right)(V_{ox}+RD_\alpha)+$$

$$+\sum_{\kappa=1}^{\infty}(\delta_{\kappa+1}\sigma^{\kappa+1}+\bar{\delta}_{\kappa+1}\sigma^{-(\kappa+1)})+C,$$

где V_{ox}, V_{oy}, M_{oz} — проекции главного вектора и главного момента, действующих в сечении $s=0$ на оси координат. D_α и D_β — постоянные интегрирования.

$$\gamma_{\kappa+1}=(\alpha_\kappa-i\beta_\kappa)\frac{1}{k}-(\alpha_{\kappa+2}+i\beta_{\kappa+2})\frac{1}{k+2};\qquad(1)$$

$$b_{k+1} = \frac{\alpha_k - i\beta_k}{k(k+1)} + \frac{(\alpha_{k+2} + i\beta_{k+2})}{(k+1)(k+2)}\,; \qquad (2)$$

$$C = M_{oz} + RV_{oy} - R^2(\alpha_1 + i\beta_1) + \frac{R^2}{2}(C_\alpha - iC_\beta); \qquad (3)$$

C_α и C_β — постоянные интегрирования. Определив относительное удлинение оси кольца ε_o и Θ — угол поворота его, из условия однозначности угла поворота Θ получим

$$\frac{R^4 g_1}{g_1R^2 + g_2}(\alpha_1 + i\beta_1) = M_{oz} + RV_{oy} + \frac{R^2}{2}(C_\alpha - iC_\beta). \qquad (4)$$

Условие однозначности смещений для кольца дает:

$$(V_{oy} + RD_\beta) - i(V_{ox} + RD_\alpha) - \frac{R}{2}(\overline{\alpha}_2 - i\overline{\beta}_2) = 0. \qquad (5)$$

Подставив значения ε_o и Θ в граничные условия задачи и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях σ, получим ряд соотношений для определения неизвестных величин a_k, b_k, $\alpha_k - i\beta_k$, $\alpha_{k+2} + i\beta_{k+2}$. Так как A_o есть свободный член функции $\Phi_0(z)$, который при отсутствии на бесконечности вращения действителен, то $\overline{A}_o = A_o$, и из полученных соотношений, исключая $\alpha_k - i\beta_k$, $\alpha_{k+2} + i\beta_{k+2}$, для каждой пары a_k, b_{k+2} получим свою систему уравнений, из которой найдем:

$$a_k = \frac{\overline{A}_k}{\Delta}[\mu R g_2(\varkappa - 1)(k-1)^2(k+1) + 4\mu^2R^4(k-1) -$$
$$- \mu R^3 g_1(\varkappa - 1)(k-1) - g_1 g_2 (k-1)^2 k^2 (k+1)] +$$
$$+ \frac{\overline{B}_{k-2}}{\Delta}[4\mu^2R^4 + 2\mu R^3 g_1 - 2\mu R g_2(k^2-1) - g_1g_2k^2(k^2-1)]; \qquad (6)$$

$$b_{k+2} = \frac{\overline{A}_k}{\Delta}[4\mu^2R^4k^2 - (k^2-1)k^2(k^2-1+\varkappa^2)g_1g_2 -$$
$$- 2k^2\varkappa\mu R^3 g_1 + 2k^2(k^2-1)\mu\varkappa R g_2] +$$
$$+ \frac{\overline{B}_{k-2}}{\Delta}[4(k+1)\mu^2R^4 - (k+1)(\varkappa-1)\mu R^3 g_1 -$$
$$- (k-1)k^2(k+1)^2 g_1 g_2 + \mu R g_2(\varkappa-1)(k-1)(k+1)^2];$$

при $k \geqslant 1$;

$$\Delta = \mu R g_2(k^2-1)[(k-1) + \varkappa(k+1)] + \mu R^3 g_1[(k+1) +$$
$$+ \varkappa(k-1)] + 4\mu^2R^4 + \varkappa g_1g_2(k^2-1)k^2.$$

Отдельно находим

$$b_2 = \frac{4\mu R^3 - (\varkappa - 1)(g_1R^2 + g_2)}{2\mu R^3 + g_1R^2 + g_2}A_0, \quad b_3 = \frac{2\mu R - \varkappa g_1}{2\mu R + g_1}\overline{A}_1. \qquad (7)$$

Для определения a_κ, $b_{\kappa+2}$ $(\kappa = n+3,\ n+4, \ldots,)$ получим систему двух однородных уравнений с определителем Δ, который не равен нулю, поэтому все коэффициенты a_κ, $b_{\kappa+2}$ при $\kappa \geqslant n+3$ равны нулю, и задачу о напряженном состоянии плоскости решают функции

$$\Phi_1(z) = \sum_{\kappa=0}^{n} \frac{A_k}{R^k} z^k + \sum_{\kappa=2}^{n+2} a_\kappa \frac{R^k}{z^k},$$

$$\Psi_1(z) = \sum_{\kappa=0}^{n} \frac{B_k}{R^k} z^k + \sum_{\kappa=2}^{n+4} b_\kappa \frac{R^k}{z^k}, \tag{8}$$

где a_κ, b_κ определяются по формулам (6), (7). Чтобы определить напряженное состояние кольца, из соотношений, полученных при сравнении коэффициентов при одинаковых степенях σ, следует исключать a_κ, b_κ. Для каждой пары неизвестных $\bar{\alpha}_{\kappa-1} + i\bar{\beta}_{\kappa-1}$, $\alpha_{\kappa+1} - i\beta_{\kappa+1}$ получим свою систему. Рассмотрим частные случаи:

1) Чистый изгиб балки с отверстием, подкрепленным кольцом, когда размеры отверстия малы по сравнению с размерами балки. В этом случае, как известно,

$$\Phi_0(z) = \frac{A_1}{R} z, \qquad \Psi_0(z) = \frac{B_1}{R} z,$$

где

$$A_1 = \frac{iM^*R}{4I}, \quad B_1 = -\frac{iM^*R}{4I}.$$

Из формул (6), (7) и (8) имеем

$$\Phi_1(z) = \frac{A_1}{R} z + a_3 \frac{R^3}{z^3}, \quad \Psi_1(z) = \frac{B_1}{R} z + b_3 \frac{R^3}{z^3} + b_5 \frac{R^5}{z^5},$$

где

$$a_3 = \frac{iM^*R}{4I} \cdot \frac{2\mu^2R^4 + \mu R^3 g_1 - 8\mu R g_2 - 36 g_1 g_2}{8\mu R g_2(1+2\varkappa) + \mu R^3 g_1(2+\varkappa) + 2\mu^2 R^4 + 36\varkappa g_1 g_2};$$

$$b_3 = -\frac{iM^*R}{4I} \cdot \frac{2\mu R - \varkappa g_1}{2\mu R + g_1};$$

$$b_5 = \frac{iM^*R}{4I} \frac{8\mu^2R^4 - 2(\varkappa-1)\mu R^3 g_1 - 144 g_1 g_2 + 16(\varkappa-1)\mu R g_2}{8\mu R g_2(1+2\varkappa) + \mu R^3 g_1(2+\varkappa) + 2\mu^2R^4 + 36\varkappa g_1 g_2}.$$

Напряженное состояние кольца определяется следующими значениями M и N:

$$N = -\frac{R}{2}(\gamma_3 \sigma^3 + \bar{\gamma}_3 \sigma^{-3})$$

$$M = \frac{R^2}{2}(\delta_3 \sigma^3 + \bar{\delta}_3 \sigma^{-3}) + C,$$

где

$$\gamma_3 = \frac{1}{4}\left[2(\alpha_2 - i\beta_2) - (\alpha_4 + i\beta_4)\right],$$

$$\delta_3 = \frac{1}{12}\left[2(\alpha_2 - i\beta_2) + (\alpha_4 + i\beta_4)\right],$$

причем

$$\alpha_2 - i\beta_2 = (\varkappa + 1)\frac{iM^*R}{4I}\cdot$$

$$\cdot\frac{2\mu R^3 g_1 + 32\mu R g_2 + 72 g_1 g_2}{2\mu R^3 g_1(2+\varkappa) + 4\mu^2 R^4 + 16\mu R g_2(1+2\varkappa) + 72\varkappa g_1 g_2};$$

$$\alpha_4 + i\beta_4 = (\varkappa + 1)\frac{iM^*R}{4I}\cdot$$

$$\cdot\frac{32\mu R g_2 - 4\mu R^3 g_1}{2\mu R^3 g_1(2+\varkappa) + 4\mu^2 R^4 + 16\mu R g_2(1+2\varkappa) + 72\varkappa g_1 g_2}.$$

Для определения постоянных V_{ox}, V_{oy}, M_{oz} используем условия (3), (4), (5).

2) Изгиб балки при постоянной поперечной силе. В этом случае

$$\Phi_0(z) = \frac{A_1}{R} z + \frac{A_2}{R^2} z^2; \quad \Psi_0(z) = B_0 + \frac{B_1}{R} z + \frac{B_2}{R^2} z^2;$$

где

$$A_1 = -\frac{iRQ}{4I}(l-a), \quad A_2 = \frac{iR^2Q}{8I}, \quad B_0 = -\frac{iQh^2}{2I},$$

$$B_1 = \frac{iRQ}{4I}(l-a), \quad B_2 = -\frac{iR^2Q}{4I}.$$

Напряженное состояние балки определяют функции

$$\Phi_1(z) = \frac{A_1}{R} z + \frac{A_2}{R^2} z^2 + a_2\frac{R^2}{z^2} + a_3\frac{R^3}{z^3} + a_4\frac{R^4}{z^4};$$

$$\Psi_1(z) = B_0 + \frac{B_1}{R} z + \frac{B_2}{R^2} z^2 + b_4\frac{R^4}{z^4} + b_5\frac{R^5}{z^5} + b_6\frac{R^6}{z^6},$$

где коэффициенты имеют значения

$$a_2 = -\frac{iR^2Q}{8I\Delta_2}\left[3\mu R g_2(\varkappa - 1) + 4\mu^2 R^4 - \mu R^3 g_1(\varkappa - 1) - 12 g_1 g_2\right] +$$

$$+ \frac{iQh^2}{2I\Delta_2}\left[4\mu^2 R^4 + 2\mu R^3 g_1 - 6\mu R g_2 - 12 g_1 g_2\right],$$

$$a_3 = -\frac{iRQ}{4I\Delta_3}(l-a)(2\mu^2 R^4 + \mu R^3 g_1 - 8\mu R g_2 - 36 g_1 g_2);$$

$$a_4 = \frac{iR^2Q}{4l\Delta_4}(4\mu^2R^4 + 2\mu R^3g_1 - 30\mu Rg_2 - 240g_1g_2),$$

$$b_4 = -\frac{iR^2Q}{8l\Delta_2}[16\mu^2R^4 - 12(3+\varkappa^2)g_1g_2 - 8\mu\varkappa R^3g_1 + 24\mu\varkappa Rg_2] +$$

$$+ \frac{iQh^2}{2l\Delta_2}[12\mu^2R^4 - 3(\varkappa - 1)\mu R^3g_1 - 36g_1g_2 + 9(\varkappa - 1)\mu Rg_2];$$

$$b_5 = -\frac{iRQ}{4l\Delta_3}(l-a)[8\mu^2R^4 - 2(\varkappa - 1)\mu R^3g_1 -$$

$$- 144g_1g_2 + 16\mu Rg_2(\varkappa - 1)];$$

$$b_6 = \frac{iR^2Q}{4l\Delta_4}[20\mu^2R^4 - 5(\varkappa - 1)\mu R^3g_1 -$$

$$- 1200g_1g_2 + 75(\varkappa - 1)\mu Rg_2];$$

$$\Delta_2 = 3\mu Rg_2(1+3\varkappa)\mu R^3g_1(3+\varkappa) + 4\mu^2R^4 + 12\varkappa g_1g_2;$$

$$\Delta_3 = 8\mu Rg_2(1+2\varkappa) + \mu R^3g_1(2+\varkappa) + 2\mu^2R^4 + 36\varkappa g_1g_2;$$

$$\Delta_4 = 15\mu Rg_2(3+5\varkappa) + \mu R^3g_1(5+3\varkappa) + 4\mu^2R^4 + 240\varkappa g_1g_2.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Г. Савин. Концентрация напряжений около отверстий. ГИТТЛ. 1951.
2. М. П. Шереметьев. Пластинка, край которой подкреплён упругим кольцом постоянного сечения. ДАН УССР, № 1, 1952.

Н. П. ФЛЕЙШМАН

УПРУГОЕ РАВНОВЕСИЕ ПЛАСТИН, УСИЛЕННЫХ КРИВОЛИНЕЙНЫМИ РЕБРАМИ ЖЕСТКОСТИ

Рассмотрим первую основную задачу изгиба изотропной тонкой плиты, срединная плоскость которой занимает некоторую конечную многосвязную область S плоскости $z = x + iy$ с границей L, состоящей из совокупности $m+1$ простых замкнутых кривых L_j $(j = 1, 2, \ldots, m+1)$. Плита усилена l кольцевыми ребрами жесткости из другого материала, осевые линии которых обозначены через $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_l$. Области, заключенные внутри контуров γ_k $(k = 1, 2, \ldots, l)$, предполагаются, для простоты, односвязными. Линии $\Gamma = \sum_{k=1}^{l} \gamma_k$ и L не касаются и не пересекают друг друга.

Ребра жесткости рассматриваются как упругие тонкие кольца, одна из главных осей инерции поперечных сечений