$$a_4 = \frac{iR^2Q}{4I\Delta_4} (4\mu^2R^4 + 2\mu R^3g_1 - 30\mu Rg_2 - 240g_1g_2),$$

$$b_4 = -\frac{iR^2Q}{8I\Delta_2} [16\mu^2R^4 - 12(3+\varkappa^2)g_1g_2 - 8\mu\varkappa R^3g_1 + 24\mu\varkappa Rg_2] +$$

$$+ \frac{iQh^2}{2I\Delta_2} [12\mu^2R^4 - 3(\varkappa - 1)\mu R^3g_1 - 36g_1g_2 + 9(\varkappa - 1)\mu Rg_2];$$

$$b_5 = -\frac{iRQ}{4I\Delta_3} (l - a)[8\mu^2R^4 - 2(\varkappa - 1)\mu R^3g_1 -$$

$$- 144g_1g_2 + 16\mu Rg_2(\varkappa - 1)];$$

$$b_6 = \frac{iR^2Q}{4I\Delta_4} [20\mu^2R^4 - 5(\varkappa - 1)\mu R^3g_1 -$$

$$- 1200g_1g_2 + 75(\varkappa - 1)\mu Rg_2];$$

$$\Delta_2 = 3\mu Rg_2(1+3\varkappa)\mu R^3g_1(3+\varkappa) + 4\mu^2R^4 + 12\varkappa g_1g_2;$$

$$\Delta_3 = 8\mu Rg_2(1+2\varkappa) + \mu R^3g_1(2+\varkappa) + 2\mu^2R^4 + 36\varkappa g_1g_2;$$

$$\Delta_4 = 15\mu Rg_2(3+5\varkappa) + \mu R^3g_1(5+3\varkappa) + 4\mu^2R^4 + 240\varkappa g_1g_2.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Г. Савин. Концентрация напряжений около отверстий. ГИТТЛ. 1951.
2. М. П. Шереметьев. Пластинка, край которой подкреплён упругим кольцом постоянного сечения. ДАН УССР, № 1, 1952.

Н. П. ФЛЕЙШМАН

УПРУГОЕ РАВНОВЕСИЕ ПЛАСТИН, УСИЛЕННЫХ КРИВОЛИНЕЙНЫМИ РЕБРАМИ ЖЕСТКОСТИ

Рассмотрим первую основную задачу изгиба изотропной тонкой плиты, срединная плоскость которой занимает некоторую конечную многосвязную область S плоскости $z = x + iy$ с границей L, состоящей из совокупности $m+1$ простых замкнутых кривых L_j $(j = 1, 2, \ldots, m+1)$. Плита усилена l кольцевыми ребрами жесткости из другого материала, осевые линии которых обозначены через $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_l$. Области, заключенные внутри контуров γ_k $(k = 1, 2, \ldots, l)$, предполагаются, для простоты, односвязными. Линии $\Gamma = \sum\limits_{k=1}^{l} \gamma_k$ и L не касаются и не пересекают друг друга.

Ребра жесткости рассматриваются как упругие тонкие кольца, одна из главных осей инерции поперечных сечений которых лежит в плоскости xoy. Предполагается, что сопряжение между областями плиты расположенными внутри и вне ребер жесткости, происходит соответственно по кривым γ_k.

Принимая во внимание, что при переходе через γ_k внутренние усилия (изгибающий момент и поперечная сила) в плите претерпевают неизвестные скачки, сводим поставленную задачу к определению двух функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, кусочно-голоморфных в области S с линией скачков Γ, и l функций $I_k(t)$, определенных на контурах γ_k $(k=1, 2, \ldots, l)$ соответственно. Для нахождения этих функций получены граничные условия:

$$-\varkappa\overline{\varphi(\sigma)} + \overline{\sigma}\varphi'(\sigma) + \psi(\sigma) = \Phi(\sigma) - iC_{1j}\overline{\sigma} + C_{2j} \text{ на } L_j$$
$$(j=1, 2, \ldots, m+1), \tag{1}$$

$$-\varkappa\overline{\varphi^+(t)} + \overline{t}\varphi'^+(t) + \psi^+(t) = -\varkappa\overline{\varphi^-(t)} + \overline{t}\varphi'^-(t) +$$
$$+ \psi^-(t) + F(t) \quad \text{на } \Gamma, \tag{2}$$

$$\overline{\varphi^+(t)} + \overline{t}\varphi'^+(t) + \psi^+(t) = \overline{\varphi^-(t)} + \overline{t}\varphi'^-(t) + \psi^-(t) +$$
$$+ F^0(t) \quad \text{на } \Gamma, \tag{3}$$

$$\overline{\varphi^-(t)} + \overline{t}\varphi'^-(t) + \psi^-(t) = P(t) \quad \text{на } \Gamma, \tag{4}$$

где $F(t)$ и $P(t)$ — неизвестные функции, принимающие на каждом контуре γ_k соответствующие значения

$$F_k(t) = -\frac{1}{2D(1-\nu)} I_k(t) + f_k^0(t),$$

$$P_k(t) = \frac{1}{4i}\int^{t} J_k(t)\,d\overline{t} + \frac{1}{2i}C_{3k} + P_k^0(t).$$

Здесь

$$J_k(t) = I_k^*(t)\left(\frac{1}{C_k} + \frac{1}{A_k}\right) + \overline{I_k^*(t)}\left(\frac{1}{C_k} - \frac{1}{A_k}\right),$$

$$I_k^*(t) = \dot{t}[I_k(t) - iV_{bk}^0(\overline{t} - \overline{t}_0) + C_{4k}];$$

$\Phi(\sigma)$, $F^0(t)$, $f_k^0(t)$ и $P_k^0(t)$ — известные функции, зависящие от заданной внешней нагрузки; $\dot{t} = \frac{dt}{ds}$, s — дуга контура γ_k; t и

s — афиксы точек на Γ и L, t_0 — афикс точки $s=0$; C_{1j}, C_{2j}, C_{3k} — константы, определяющиеся из решения задачи; A_k и C_k — жесткости кольца на изгиб и кручение, ν — коэффициент Пуассона, D — цилиндрическая жесткость плиты, $\varkappa = \frac{3+\nu}{1-\nu}$.

Вещественная постоянная V_{bk}° и комплексная постоянная C_{4k} определяются из условий однозначности прогибов и деформаций кольца, имеющих вид

$$\int\limits_{\gamma_k} J_k(t)d\bar{t}=0, \quad Im\int\limits_{\gamma_k} tJ_k(t)d\bar{t}=0, \quad (k=1, 2, \ldots, l).$$

Граничное условие (4) впервые было получено другим способом М. П. Шереметьевым [1].

При определении искомых функций по граничным условиям (1) — (4) следуем приему Д. И. Шермана [2]. Из (2) и (3) легко вывести, что

$$\begin{aligned} \varphi^+(t)-\varphi^-(t) &= -g(t) \quad \text{на } \Gamma, \\ \psi^+(t)-\psi^-(t) &= h(t) \quad \text{на } \Gamma, \end{aligned} \tag{5}$$

где

$$g(t)=\frac{1}{\varkappa+1}\left[\overline{F(t)}-\overline{F^{\circ}(t)}\right],$$

$$h(t)=\overline{g(t)}+\bar{t}g'(t)+F^{\circ}(t), \quad g'(t)=\frac{dg(t)}{dt}.$$

Решая задачи линейного сопряжения (5), находим

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \varphi^{\circ}(z)-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{g(t)dt}{t-z}, \\ \psi(z) &= \psi^{\circ}(z)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{h(t)dt}{t-z}, \end{aligned} \tag{6}$$

где $\varphi^{\circ}(z)$ и $\psi^{\circ}(z)$ — неизвестные функции, голоморфные во всей области S и подлежащие определению.

Подставляя функции (6) в (1), приходим к первой основной задаче изгиба плиты, ограниченной контуром L. Решая эту задачу, выражаем функции $\varphi^{\circ}(z)$ и $\psi^{\circ}(z)$, а затем и кусочно-голоморфные функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ (6) через неизвестные функции $I_k(t)$ $(k=1, 2, \ldots, l)$. Для определения последних используем условие (4), в которое подставляем функции

$\varphi(z)$ и $\psi(z)$ и получаем l уравнений — по одному на каждом контуре γ_k ($k=1, 2, \ldots, l$). Зная $I_k(t)$, определяем окончательно функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$. Задача решена.

Указанный выше алгорифм решения задачи остается таким же и при решении других основных задач изгиба плит, усиленных ребрами жесткости, а также при решении аналогичных задач плоской теории упругости. Интересно отметить, что для определения внутренних (изгибающего L_{nk} и крутящего $L_{\tau\kappa}$) моментов в кольце γ_κ нет надобности определять напряженное состояние плиты. Для этого достаточно найти функции $I^*_\kappa(t)$, через которые указанные величины определяются по формуле

$$L_{\tau\kappa} - iL_{nk} = I^*_\kappa(t). \tag{7}$$

Те же моменты в кольце выражаются через прогиб w или через изгибающие (M_n и M_τ) и крутящие ($H_{n\tau}$) моменты в плите на γ_κ по формуле

$$\begin{aligned} \frac{L_{n\kappa}}{A_\kappa} + i\frac{L_{\tau\kappa}}{C_\kappa} &= -\frac{1}{2}\left(\Delta w + 4t^2\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right) = \\ &= \frac{1}{D(1-\nu^2)}\left[M_\tau - \nu M_n + i(1+\nu)H_{n\tau}\right]. \end{aligned} \tag{8}$$

Принимая во внимание физический смысл левой части (8), заключаем, что правая часть этой формулы остается инвариантной при переходе через γ_κ из одной области плиты в другую. Другими словами, имеет место равенство

$$\left[\frac{M_\tau - \nu M_n + i(1+\nu)H_{n\tau}}{D(1-\nu^2)}\right]^+ = \left[\frac{M_\tau - \nu M_n + i(1+\nu)H_{n\tau}}{D(1-\nu^2)}\right]^-, \tag{9}$$

из которого легко можно непосредственно вывести граничные условия (5). Формула (9), очевидно, сохраняет силу и при отсутствии кольца, т. е. для ступенчатых плит, для которых такой результат получен другим путем М. П. Шереметьевым [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. М. П. Шереметьев Украинский математический журнал, т. V, № 1, стр. 58 — 78, 1953.

2. Д. И. Шерман. ДАН СССР, т. XXVII, № 9 1940.