И. И. ДАНИЛЮК

# О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ ТЕОРИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПОВЕРХНОСТЯХ

Мы будем придерживаться символики, приведенной нами в [1], а также используем определенные там понятия (поверхности, ковариантного равенства и др.) и терминологию.

1. На произвольной поверхности $R$ рассмотрим поля следующих геометрических объектов: двух относительных инвариантов $a$ и $f$, т. е. величин со следующим законом трансформации при замене $\tilde{z} = \tilde{z}(z)$ локального параметра $z$ на $\tilde{z}$:

$$\tilde{a}(\tilde{z}) = J_{z/\tilde{z}} \cdot a(z(\tilde{z})),\ \tilde{f}(\tilde{z}) = J_{z/\tilde{z}} \cdot f(z(\tilde{z})), \tag{1}$$

где $z = x^1 + ix^2$, $\tilde{z} = \tilde{x}^1 + i\tilde{x}^2$, а $J_{z/\tilde{z}}$ есть функциональный определитель замены; двувалентной контравариантной тензорной плотности $a^{ij}$[1]:

$$\tilde{a}^{ij} = J_{z/\tilde{z}} \cdot a^{ke} \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^e} \tag{2}$$

и „вектора“ $a^i$ с законом трансформации:

$$\tilde{a}^i = J_{z/\tilde{z}} \cdot a^{kl} \frac{\partial^2 \tilde{x}^i}{\partial x^k \partial x^l} + J_{z/\tilde{z}} \cdot a^j \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}. \tag{3}$$

Можно проверить, что формула (3) обладает групповым свойством; этим же свойством, как известно, обладают и формулы (1), (2).

Под дифференциальным уравнением второго порядка на поверхности $R$ будем понимать равенство:

$$a^{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j} + a^i \frac{\partial u}{\partial x^i} = au + f, \tag{4}$$

имеющее ковариантный характер, как это следует из формул (1), (2), (3). В частности, сопряженные квазигармонические функции $u$, $u'$ удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} b^{js} \frac{\partial^2 u}{\partial x^j \partial x^s} + b^i \frac{\partial u}{\partial x^i} = 0, \\ b'^{js} \frac{\partial^2 u'}{\partial x^s \partial x^j} + b'^i \frac{\partial u'}{\partial x^i} = 0, \end{aligned} \tag{4'}$$

[1] Все встречающиеся индексы принимают значения 1, 2.

где обозначено:

$$b^{js} = \frac{1}{2}(\tilde{b}^{js} + \tilde{b}^{sj}),\ \tilde{b}^{js} = \epsilon^{ij}\ \alpha_i^{\ s},\ b^i = \epsilon^{sr}\ \frac{\partial \alpha^i_{\ s}}{\partial x^r},$$

$$b'^{js} = \frac{1}{2}(\tilde{b}'^{js} + \tilde{b}'^{sj},\ \tilde{b}'^{js} = \epsilon^{ij}\ \alpha_i^{\ \prime s},\ b'^i = \epsilon^{sr}\frac{\partial \alpha_r^{\ \prime i}}{\partial x^s}. \qquad (5)$$

Здесь $\alpha'^j_{\ i}$ есть $H$-непрерывно дифференцируемое[1] тензорное поле, введенное в [1], а $\alpha_i^j$ — поле ему сопряженного тензора. Легко проверяется, что величины (5) имеют законом трансформации формулы (2) и (3). Все наши рассмотрения относятся к случаю, когда величины (2) и (3) определены по формулам (5). Указанные ограничения вызваны, вероятно, скорее используемым методом, в основе которого лежат предложения, доказанные для квазигармонических функций (см. [1]), чем существом вопроса. Кроме того, всегда предполагается выполненным неравенство $a(P) \geqslant 0$, $P \in R$.

2. Пусть $D$ — область на поверхности $R$, ограниченная конечным числом замкнутых кривых Жордано $\Gamma_\kappa$, $\kappa = 1, 2, \ldots, n$, причем множество $D + \Gamma$ компактно на $R$. Функцией Грина $G(P, Q)$ уравнения (4) (при $f \equiv 0$) в области $D$ будем называть функцию, определяемую следующими условиями: 1) $G(P, Q)$ есть решение (по $P$) уравнения (4) при $f \equiv 0$ в $D$; 2) $G(P, Q) \equiv 0$ при $P \in \Gamma$, $Q \in D$, исключая конечное число точек $P_\nu \in \Gamma$, $\nu = 1, 2, \ldots, q$; 3) $G(P, Q)$ непрерывна в $D$, исключая точку $P = Q$, где она обладает логарифмическим полюсом. Если построить (монотонное) исчерпание поверхности $R$ ее компактными частями и определить принадлежащие этим последним функции Грина, то естественно можно прийти к понятию функции Грина всей поверхности $R$, совершив предельный переход.

Пусть $\gamma$ — часть границы $\Gamma$ области $D$. Регулярная квазигармоническая функция $\omega(P)$, $P \in D$, исчезающая (исключая конечное число точек) на $\Gamma - \gamma$ и равная (тоже исключая конечное число точек) единице на $\gamma$, называется квазигармонической мерой дуги $\gamma$ относительно $D$ в точке $P$. Вышеописанный предельный переход приводит нас к понятию квазигармонической меры „идеальной“ границы произвольной открытой поверхности $R$.

С помощью квазигармонической меры, существование которой (в области) доказывается альтернирующим методом Шварца, обоснованным для квазигармонических функций в [1], легко доказывается, что условия 1 — 3 однозначно определяют функцию Грина в области $D$. Единственность функции Грина, принадлежащей всей поверхности, устанав-

[1] Под $H$-непрерывностью мы понимаем непрерывность в смысле Гельдера.

ливается с помощью характеристического ее свойства: она есть наименьшая из всех неотрицательных решений уравнения (4), при $f \equiv 0$, достаточно гладких на всей поверхности, исключая точку $Q \in \boldsymbol{R}$, где они имеют логарифмический полюс (ср. [2], а также [3], гл. IV).

*Теорема 1.* Для того, чтобы (открытая) поверхность $R$ обладала (единственной) квазигармонической функцией Грина, необходимо и достаточно, чтобы поверхность имела идеальную границу положительной квазигармонической меры.

Ограничения на меру идеальной границы поверхности отпадают, если в уравнении (4) $a \neq 0$ на $R$. В этом случае справедлива следующая теорема:

*Теорема 2.* На всякой открытой поверхности $R$ существует однозначно определенная функция Грина уравнения (4) (при $f \equiv 0$).

Доказательство проводится методом, обобщающим на рассматриваемый вид дифференциальных уравнений метод Мирберга (см. его статью [2]).

Как следствие из теоремы 2 получаем следующее утверждение:

*Теорема 3.* На всякой замкнутой поверхности существует неотрицательное решение $G(P, Q)$ уравнения (4) (при $f \equiv 0$) с полюсом в произвольной точке $Q \in \boldsymbol{R}$, однозначно определяемое условиями:

1) $G(P, Q)$ на $R - Q$ непрерывна вместе с первыми и вторыми производными.

2) $G(P, Q)$ имеет в точке $Q$ логарифмический полюс.

3. Имеет место следующая теорема:

*Теорема 4.* На произвольной поверхности $R$, обладающей идеальной границей положительной квазигармонической меры, существует частное решение $u_0$ уравнения (4).

Построение искомого решения проводится в два приема. Основываясь на теореме 2, строится неотрицательное решение $u_1$ уравнения (4), при $f \equiv 0$, следуя статье [4]; если же использовать некоторые факты из теории гильбертова пространства квазигармонических функций, рассмотренного нами в [1], то, следуя статье [5], можно построить частное решение уравнения (4) при $a \equiv 0$: $u_2(P)$. Тогда можно положить $u_0 = u_1 + u_2$. Очевидно, что общее решение уравнения (4) дается формулой $u = u_0 + h$, где $h$ — произвольная регулярная квазигармоническая финкция на поверхности.

В качестве приложения решим следующую задачу. Пусть на поверхности $R$ задано $H$-непрерывно дифференцируемое ковариантное поле $v_i$, обладающее некоторыми вообще отличными от нуля ротором и дивергенцией в римановой метрике, определяемой положительно определенным метрическим тензором $g_{ij}$, заданным на $R$ и $H$-непрерывно дифференцируемым. Требуется разложить поле $v^i = g^{ij} v_j$, где тензор $g^{ij}$ определяется из (однозначно разрешимой) системы $g^{is} g_{sj} = \delta^j_i$ ($\delta^j_i$ — символ Кронекера), на сумму трех полей $u^i$, $\tilde{u}^i$, $u'^i$, подчиненных следующим условиям:

$$u^i_{,i} = v^i_{,i}, \ rot\, u_i = 0;$$

$$\tilde{u}^i_{,i} = 0, \ rot\, \tilde{u}_i = vot\, v_i;$$

$$u'^i_{,i} = 0, \ rot\, u'_i = 0,$$

где $u^i_{,i}$ означает упомянутую дивергенцию:

$$u^i_{,i} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g}\ g^{ij} u_j) = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (u^i \sqrt{g}).$$

Здесь $g > 0$ есть определитель тензора $g_{ij}$.

*Теорема 5*. Сформулированная задача, в условиях теоремы 4, всегда имеет $H$-непрерывно дифференцируемое разложение.

ЛИТЕРАТУРА.

1. Данилюк И. И. О некоторых вопросах теории эллиптических систем дифференциальных уравнений первого порядка на поверхностях (в печати).

2. Myrberg L. Über die Existenz der breenschen Funktion der Gleichung $\Delta u = c\ (P)\,.\, u$ auf Riemannschen Flacahen, Ann. Acad. Scient. Fennicae, Helsinki, 1954.

3. Неванлинна. Униформизация, М. 1955.

4. Myrberg L. Über die Integration der Differentialgleichung $\Delta u = c\ (P)\,.\, u$ auf offenen Riemannschen Flachen, Math. Scand., 2 (1954), 142—152.

5. Myrberg L. Über die Integration der Poissonschen Gleichung auf offenen Riemannschen Flachen, Ann. Acad. Scient. Fennicae, Helsinki, 1953.

А. Б. ДРАПКИН

# ФУНКЦИОНАЛЬНО-ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВЕННОГО СЛУЧАЯ

В. И. Смирнов и С. Л. Соболев ввели понятие функционально-инвариантного решения волнового уравнения [1].

Функцию $W(x, y, z, t)$, являющуюся решением уравнения

$$\square W \equiv W_{xx} + W_{yy} + W_{zz} - W_{tt} = 0, \tag{1}$$