ференцируемым. Требуется разложить поле $v^i = g^{ij} v_j$, где тензор g^{ij} определяется из (однозначно разрешимой) системы $g^{is} g_{sj} = \delta^j_i$ (δ^j_i — символ Кронекера), на сумму трех полей u^i, $\tilde{u}^i$, u'^i, подчиненных следующим условиям:

$$u^i_{,i} = v^i_{,i}, \ \mathrm{rot}\, u_i = 0;$$

$$\tilde{u}^i_{,i} = 0, \ \mathrm{rot}\, \tilde{u}_i = \mathrm{rot}\, v_i;$$

$$u'^i_{,i} = 0, \ \mathrm{rot}\, u'_i = 0,$$

где $u^i_{,i}$ означает упомянутую дивергенцию:

$$u^i_{,i} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g}\ g^{ij} u_j) = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (u^i \sqrt{g}).$$

Здесь $g > 0$ есть определитель тензора g_{ij}.

Теорема 5. Сформулированная задача, в условиях теоремы 4, всегда имеет H-непрерывно дифференцируемое разложение.

ЛИТЕРАТУРА.

1. Данилюк И. И. О некоторых вопросах теории эллиптических систем дифференциальных уравнений первого порядка на поверхностях (в печати).

2. Myrberg L. Über die Existenz der breenschen Funktion der Gleichung $\Delta u = c\ (P) . u$ auf Riemannschen Flächen, Ann. Acad. Scient. Fennicae, Helsinki, 1954.

3. Неванлинна. Униформизация, М. 1955.

4. Myrberg L. Über die Integration der Differentialgleichung $\Delta u = c\ (P) . u$ auf offenen Riemannschen Flächen, Math. Scand., 2 (1954), 142—152.

5. Myrberg L. Über die Integration der Poissonschen Gleichung auf offenen Riemannschen Flachen, Ann. Acad. Scient. Fennicae, Helsinki, 1953.

А. Б. ДРАПКИН

ФУНКЦИОНАЛЬНО-ИНВАРИАНТНЫЕ РЕШЕНИЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВЕННОГО СЛУЧАЯ

В. И. Смирнов и С. Л. Соболев ввели понятие функционально-инвариантного решения волнового уравнения [1].

Функцию $W(x, y, z, t)$, являющуюся решением уравнения

$$\Box W \equiv W_{xx} + W_{yy} + W_{zz} - W_{tt} = 0, \tag{1}$$

называют функционально-инвариантным решением этого уравнения в некоторой области D изменения действительных переменных x, y, z, t, если произвольная функция $f(W)$, дважды дифференцируемая вдоль совокупности значений W, соответствующих действительным x, y, z, t из области D, является также решением $\Box W = 0$.

Н. П. Еругин [2] обобщил результаты Смирнова-Соболева на четырехмерный случай и дал общий вид функционально-инвариантного решения уравнения $\Box W = 0$.

Обобщая понятие функционально-инвариантного решения, Я. Б. Лопатинский рассмотрел семейство решений волнового уравнения вида $U\Phi(V)$, где Φ — произвольная, нужное число раз дифференцируемая функция, а $U(x, y, z, t)$ и $V(x, y, z, t)$ подлежат определению, и нашел функции U; V в конечном виде для случая трех измерений [3].

С помощью метода Я. Б. Лопатинского [3] для широкого класса случаев, охватывающих случай Н. П. Еругина, удается получить семейство решений $\Box W = 0$ вышеуказанного вида $U\Phi(V)$ и определить функции U; V в конечном виде для четырехмерного случая.

Задача нахождения функционально-инвариантных решений уравнения $\Box W = 0$ сводится к интегрированию следующей системы уравнений:

$$U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} - U_{tt} = 0, \tag{2}$$

$$U_x V_x + U_y V_y + U_z V_z - U_t V_t + \frac{1}{2} U(V_{xx} + V_{yy} + V_{zz} - V_{tt}) = 0, \tag{3}$$

$$V_x^2 + V_y^2 + V_z^2 - V_t^2 = 0. \tag{4}$$

1. Интегрируя (4) методом Коши, получим:

$$\left.\begin{aligned} &V = \varphi(\alpha, \beta, \gamma) \\ &(x - \alpha)\sqrt{\varphi_\alpha^2 + \varphi_\beta^2 + \varphi_\gamma^2} + \varphi_\alpha t = 0 \\ &(y - \beta)\sqrt{\varphi_\alpha^2 + \varphi_\beta^2 + \varphi_\gamma^2} + \varphi_\beta t = 0 \\ &(z - \gamma)\sqrt{\varphi_\alpha^2 + \varphi_\beta^2 + \varphi_\gamma^2} + \varphi_\gamma t = 0 \end{aligned}\right|, \tag{5}$$

где α, β, γ — параметры, $V_x = \varphi_\alpha$; $V_y = \varphi_\beta$; $V_z = \varphi_\gamma$; $V_t = \sqrt{\varphi_\alpha^2 + \varphi_\beta^2 + \varphi_\gamma^2}$; $\varphi_\alpha^2 + \varphi_\beta^2 + \varphi_\gamma^2 \neq 0$ а φ — произвольная функция. Положив

$$V_x = V_t \sin\Theta \cos\omega; \quad V_y = V_t \sin\Theta \sin\omega; \quad V_z = V_t \cos\Theta, \tag{6}$$

имеем

$$\left.\begin{aligned} &x - \alpha + t\sin\Theta\cos\omega = 0 \\ &y - \beta + t\sin\Theta\sin\omega = 0 \\ &z - \gamma + t\cos\Theta = 0 \end{aligned}\right|. \tag{7}$$

При этом предполагается, что $V_t \neq 0$ и $\varphi_\alpha^2 + \varphi_\beta^2 \neq 0$. Случай $\varphi_\alpha^2 + \varphi_\beta^2 = 0$ рассмотрен в работе отдельно, причем и в этом случае функции U; V определены в конечном виде.

Производные функций Θ и ω по x, y, z, t выражаются через производные от тех же функций по параметрам α, β, γ. Дифференцируя систему (7) полным образом, получим систему уравнений, определяющих $d\alpha$; $d\beta$; $d\gamma$. Ее определитель Δ вычисляется непосредственно.

Учитывая условие полноты системы (6), которое в предположении, что $\Theta_\alpha \sin\omega - \Theta_\beta \cos\omega = 0$* имеет вид

$$\omega_\alpha \cos\Theta \cos\omega + \omega_\beta \cos\Theta \sin\omega - \omega_\gamma \sin\Theta = 0 \tag{8}$$

и положив

$$\left.\begin{aligned} \Theta_\alpha \cos\Theta \cos\omega + \Theta_\beta \cos\Theta \sin\omega - \Theta_\gamma \sin\Theta = \lambda \\ -\omega_\alpha \sin\Theta \sin\omega + \omega_\beta \sin\Theta \cos\omega = \varkappa \end{aligned}\right\}, \tag{9}$$

получим выражение определителя $\Delta(t)$.

$$\Delta = -1 + (\lambda + \varkappa)\, t - \lambda\varkappa t^2. \tag{10}$$

От характера корней $\Delta(t)$ существенно зависит вид решения.

2. Пусть корни $\Delta(t)$ бесконечны, т. е. пусть $\lambda = \varkappa = 0$. Тогда из (8) и (9) с помощью (7) и учитывая зависимость функций Θ и ω имеем уравнения, определяющие V как функцию от x, y, z, t.

$$\left.\begin{aligned} x \sin\Theta \cos\omega + y \sin\Theta \sin\omega + z \cos\Theta + t = f(\omega); \\ \Theta = \psi(\omega); \quad V = \omega \end{aligned}\right\}, \tag{I.1}$$

где f; ψ — произвольные функции V.

Легко подсчитать, что $\Box\,\omega = 0$, и уравнение (3) принимает вид

$$U_x \sin\Theta \cos\omega + U_y \sin\Theta \sin\omega + U_z \cos\Theta - U_t = 0. \tag{3'}$$

Общее решение (3′) имеет вид

$$U = U[\omega;\ A\,(\omega, x, y);\ B\,(\omega, x, y, z)].$$

Вид функции $U(\omega, A, B)$ определяется из (2); оказывается, что

$$U = \frac{\varphi_1[A + iB\sin\Theta;\ \omega] + \varphi_2[A - iB\sin\Theta;\ \omega]}{A + B\psi'(\omega) - f'(\omega)}, \tag{I. 2}$$

где φ_1 и φ_2 — произвольные аналитические функции.

$$A = -x \sin\Theta \sin\omega + y \sin\Theta \cos\omega;$$

---

* В этом предположении проведено все дальнейшее исследование.

$$B = x\cos\Theta\cos\omega + y\cos\Theta\sin\omega - z\sin\Theta .$$

Если же в частности

$$\varphi_1 = \frac{C(\omega)}{2i\sin\Theta}[i\sin\Theta + \psi'(\omega)](A + iB\sin\Theta) - \frac{C(\omega)}{2}f'(\omega),$$

$$\varphi_2 = \frac{C(\omega)}{2i\sin\Theta}[i\sin\Theta - \psi'(\omega)](A - iB\sin\Theta) - \frac{C(\omega)}{2}f'(\omega),$$

где $C(\omega)$ — произвольная функция, то $U = C(\omega)$ и мы получаем случай, рассмотренный Н. П. Еругиным [2].

3. Если корни $\Delta(t)$ конечны, т. е. если $\lambda \neq 0$, $\varkappa \neq 0$; то принимая V, Θ, ω, t за новые независимые переменные (в области, где $\Delta \neq 0$ они независимы), получим

$$\square V = -\frac{V_t}{\Delta}(\lambda + \varkappa - 2\lambda\varkappa t). \tag{11}$$

Уравнение (3) сводится к обыкновенному уравнению и его общее решение таково:

$$U = \frac{f(V, \Theta, \omega)}{\sqrt{\Delta}}, \tag{12}$$

где f — произвольная функция своих аргументов. В уравнении (2) переходим также к переменным V, Θ, ω, t (для этого вычисляем $\square\Theta$ и $\square\omega$).

4. Пусть корни $\Delta(t)$ не только конечны, но и различны ($\lambda \neq \varkappa$); учитывая, что (2) есть тождество относительно t, получим $\lambda_\theta = \varkappa_\omega = 0$.

На основании (5) и очевидных равенств $\Theta = \Theta$ и $\omega = \omega$ получаем дифференцированием шесть соотношений, определяющих α_θ; β_θ; γ_θ и α_ω; β_ω; γ_ω, из которых, учитывая полноту системы (6), находим, что $\lambda_\omega = 0$ и получаем

$$\left.\begin{aligned}
\alpha &= \Phi(V)\sin\Theta\cos\omega + \eta(V)\cos\omega + \chi(V)\\
\beta &= \Phi(V)\sin\Theta\sin\omega + \eta(V)\sin\omega + \psi(V)\\
\gamma &= \Phi(V)\cos\Theta + \xi(V)\\
\lambda &= \frac{1}{\Phi(V)}\\
\varkappa &= \frac{\sin\Theta}{\Phi(V)\sin\Theta + \eta(V)}
\end{aligned}\right|, \tag{13}$$

где $\Phi(V)$; $\chi(V)$; $\psi(V)$; $\xi(V)$; $\eta(V)$ — произвольные функции. Из (7) и (13) имеем соотношение, определяющее $V(x, y, z, t)$:

$$(x - \chi - \eta\cos\omega)^2 + (y - \psi - \eta\sin\omega)^2 + \\ + (z - \xi)^2 - (t - \Phi)^2 = 0. \tag{II.1}$$

Интегрируя уравнение (2) и учитывая (12), получим

$$U = \frac{\sigma(V;\Theta)\sin\frac{\omega}{2} + \varepsilon(V;\Theta)\cos\frac{\omega}{2}}{(\chi'\sin\Theta\cos\omega + \psi'\sin\Theta\sin\omega + \eta'\sin\Theta + \xi'\cos\Theta + \Phi')\sqrt{-1 + \frac{2\Phi\sin\Theta + \eta}{\Phi(\Phi\sin\Theta + \eta)}t - \frac{\sin\Theta}{\Phi(\Phi\sin\Theta+\eta)}t^2}}, \quad \text{(II. 2)}$$

$\sigma(V;\Theta)$ и $\varepsilon(V;\Theta)$ — произвольные функции.

5. Если же корни $\Delta(t)$ конечны и совпадают $(\lambda = \varkappa)$, то для α, β, γ получаем совершенно аналогично соотношение (13), причем $\lambda = \varkappa = \frac{1}{\Phi(V)}$.

Аналогично предыдущему функция $V(x, y, z, t)$ определяется из соотношения

$$[x - \chi(V)]^2 + [y - \psi(V)]^2 + [z - \xi(V)]^2 - [t - \Phi(V)]^2 = 0. \quad \text{(III. 1)}$$

Интегрируя (2), получаем:

$$U = \frac{\varphi_1\left(\omega + i\ln\operatorname{tg}\frac{\Theta}{2}\right) + \varphi_2\left(\omega - i\ln\operatorname{tg}\frac{\Theta}{2}\right)}{(\chi'\sin\Theta\cos\omega + \psi'\sin\Theta\sin\omega + \eta'\sin\Theta + \xi'\cos\Theta + \Phi')(\Phi - t)i} \cdot \Phi, \quad \text{(III. 2)}$$

где φ_1 и φ_2 — произвольные функции.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Л. Соболев. Функционально-инвариантные решения волнового уравнения. Труды физ.-мат. и-та им. Стеклова, т. V, 1934.

2. Н. П. Еругин. О функционально-инвариантных решениях, ДАН, т. 42, 1944.

3. Я. Б. Лопатинский и Т. Ибадов. Об одном семействе решений волнового уравнения. Труды Аз. госуниверситета им. Кирова, т. V, 1945.