С. А. ГРАЧ

К ВОПРОСУ ОБ ИЗМЕРЕНИИ ДЕФОРМАЦИЙ ТЕНЗОДАТЧИКАМИ С БОЛЬШОЙ БАЗОЙ

Для разрешения сложных актуальных технических задач по расчету деталей машин и элементов сооружений за последнее десятилетие стали широко внедрять для измерения деформаций проволочные тензометры омического сопротивления (тензодатчики) с различными базами.

Искажения в показаниях тензодатчиков, как известно, зависят от многих факторов—от дефекта в их изготовлении, от качества клея, способа наклеивания и наконец от самой базы датчика.

Все перечисленные факторы, кроме последнего, влияют на показания тензодатчика независимо от степени концентрации напряжений.

В соответствии с этим предлагается общий метод расчета для определения влияния базы тензодатчика при прочих равных данных на экспериментальное подтверждение теоретических результатов задач теории упругости в плитах и пластинках.

Так как тензодатчики могут быть размещены на плоскости плиты или пластины произвольно, то в общем случае рассмотрим подвижную систему координатных осей x', y', которые мы будем направлять соответственно параллельно направлению датчика и перпендикулярно к нему. Важно отметить, что показания датчиков, размещенных в радиальном и тангенциальном направлениях, фактически соответствуют величинам следующих интегралов:

$$\frac{1}{l}\int_{r}^{r+l} \varepsilon_{x'}\, d x' = \varepsilon_{x'}^{0}, \tag{1}$$

$$\frac{1}{l}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \varepsilon_{y'}\, dy' = \varepsilon_{y'}^{0}, \tag{2}$$

где $\varepsilon_{x'}$ и $\varepsilon_{y'}$ — относительные удлинения по направлениям осей x', y'; $\varepsilon_{x'}^{0}$ и $\varepsilon_{y'}^{0}$ — средние относительные деформации по длине базы датчика, соответственно размещенного по направлению оси ox' или oy'; l — искомая база датчика; r — расстояние от начала координат до начальной точки тензодатчика.

Для определения теоретически средней деформации по длине базы датчика необходимо вычислить значения этих интегралов, для чего предлагается два способа. Первый, — когда заданная задача решена в напряжениях. В этом случае по закону Гука определяем компоненты деформаций $\varepsilon_{x'}$ и $\varepsilon_{y'}$:

$$\varepsilon_{x'} = \frac{1}{E}\left(\sigma x' - \mu \sigma y'\right) \tag{3}$$

$$\varepsilon_{y'} = \frac{1}{E}\left(\sigma y' - \mu \sigma x'\right) \tag{4}$$

и затем, проинтегрировав их по длине базы тензодатчика, найдем величины интегралов $\varepsilon^0_{x'}$ и $\varepsilon^0_{y'}$. Второй способ — когда решение задачи дано в перемещениях. Тогда

$$\varepsilon_{x'} = \frac{\partial u}{\partial x'}$$

$$\varepsilon_{y'} = \frac{\partial v}{\partial y'},$$

где X' и Y' — независимые координаты.

u и v = компоненты перемещения точек по направлениям осей ox' и oy'.

Таким образом,

$$\varepsilon^0_{x'} = \frac{1}{l}\int \frac{\partial u}{\partial x'}\,dx' = \frac{1}{l}\left(u_A - u_B\right). \tag{5}$$

Аналогично

$$\varepsilon^0_{y'} = \frac{1}{l}\int \frac{\partial v}{\partial y'}\,dy' = \frac{1}{l}\left(v_C - v_D\right), \tag{6}$$

где u_A, u_B, v_C и v_D — перемещения крайних точек датчиков, соответственно размещенных в радиальном и тангенциальном направлениях.

Рассмотрим в качестве примера изгиб круглой пластинки, ослабленной отверстием в центре, нагруженной равномерно — распределенными изгибающими моментами по внешнему контуру.

Допустим, что решение задачи дано в напряжениях для нижней поверхности плиты в полярной системе координат в следующем виде [1]:

$$\sigma_r = -\frac{6M}{h^2\left(1-\beta^2\right)}\left(\frac{a^2}{r^2} - 1\right),$$

$$\sigma_\Theta = \frac{6M}{h^2\left(1-\beta^2\right)}\left(\frac{a^2}{r^2} + 1\right),$$

где h — толщина пластинки, β — отношение радиуса отверстия к наружному радиусу пластинки, M — изгибающий момент на единицу длины, $r = na$ — радиус-вектор, a — радиус ослабленного отверстия.

На основании формул (3) и (4) найдем значения относительных удлинений в полярной системе координат. Приведем их в окончательном виде:

$$\varepsilon_r = -\frac{6M}{Eh^2(1-\beta^2)} A_r \tag{7}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{6M}{Eh^2(1-\beta^2)} A_\theta , \tag{8}$$

где

$$A_r = \left[\left(\frac{a^2}{r^2} - 1\right) + \mu\left(\frac{a^2}{r^2} + 1\right)\right],$$

$$A_\theta = \left[\left(\frac{a^2}{r^2} + 1\right) + \mu\left(\frac{a^2}{r^2} - 1\right)\right],$$

μ — коэффициент Пуассона.

На основании формул (1) и (2) найдем значение интегралов

$$\varepsilon_r^0 = \frac{6M}{Eh^2(1-\beta^2)} A_r^0 \tag{9}$$

$$\varepsilon_\theta^0 = \frac{6M}{Eh^2(1-\beta^2)} A_\theta^0 , \tag{10}$$

где

$$A_r^0 = \left[\frac{(n^2\lambda + n)(1-\mu) - \lambda(1+\mu)}{n(n\lambda + 1)}\right],$$

$$A_\theta^0 = \left[\frac{(4n^2\lambda^2 + 1)(1-\mu) + 4\lambda^2(1+\mu)}{(4n^2\lambda^2 + 1)}\right],$$

где

$$\lambda = \frac{a}{l} .$$

Для иллюстрации применения метода перемещений конечных точек датчика допустим, что решение этой задачи дано уравнением изогнутой поверхности плиты (2) с точностью до постоянной в следующем виде:

$$w = -\frac{c_1 r^2}{4} - c_2 \ln\frac{r}{b} ,$$

где

$$c_1 = \frac{2\,b^2M}{(1+\mu)\,D\,(b^2 - a^2)} ,$$

$$c_2 = \frac{a^2b^2M}{(1-\mu)\,D\,(b^2 - a^2)} .$$

Здесь $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ — цилиндрическая жесткость пластинки при изгибе, $r = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}$ — радиус-вектор, b — наружный радиус пластинки.

Из теории упругости известно, что $u = -\frac{h}{2}\frac{\partial w}{\partial x}$, а $v = -\frac{h}{2}\frac{\partial w}{\partial y}$. Следовательно:

$$u = \frac{6M}{Eh^2(1-\beta^2)}\left[r(1-\mu) + \frac{a^2(1+\mu)}{r}\right],$$

$$v = \frac{6M}{Eh^2(1-\mu^2)}\left[r(1-\mu)\operatorname{tg}\Theta + \frac{\sin 2\Theta(1+\mu)}{2r}\right],$$

где Θ — угол между осью ox' и произвольно взятой точкой на датчике.

Зная теперь значения u и v по формулам (5) и (6), найдем значения интегралов, а именно:

$$\varepsilon_{x'}^0 = \frac{6M}{Eh^2(1-\beta^2)}\left[\left(\frac{\lambda^2}{n\lambda+1} - \frac{\lambda}{n}\right)(\mu+1) + (1-\mu)\right], \quad (11)$$

$$\varepsilon_{y'}^0 = \frac{6M}{Eh^2(1-\beta^2)}\frac{\lambda}{n}\left[(1+\mu)\sin 2\varphi + 2n^2\operatorname{tg}\varphi(1-\mu)\right], \quad (12)$$

где 2φ — угол обхвата датчика.

Нетрудно убедиться, как и следовало ожидать, что формулы (9) и (10) полностью совпадают с результатами (11) и (12).

Для определения влияния базы тензодатчика при прочих равных условиях на погрешность эксперимента служат следующие формулы:

$$\frac{A_r^0 - A_r}{A_r}100 = m_r\,\%, \quad (13)$$

$$\frac{A^0_\Theta - A_\Theta}{A_\Theta}100 = m_\Theta\,\%, \quad (14)$$

где m_r и m_Θ — величины погрешностей для датчиков наклеенных в радиальном и тангенциальном направлениях.

Так, например, для случая, когда тензодатчики размещены на контуре отверстия ($n = 1$) при $\lambda = 1$, тогда $m_r = 108{,}3\%$, а $m_\Theta = 13\%$. При $\lambda = 30$, $m_r = 7\%$, а $m_\Theta = 0{,}0155\%$. Для случая, когда датчики расположены на расстоянии $r = 2a$, т. е. $n = 2$ при $\lambda = 1$, $m_r = 28{,}9\%$, а $m_\Theta = 0{,}07\%$.

Таким образом, расчетное показание тензодатчика выражается интегралом от соответствующей деформации по базе датчика или разностью составляющих перемещения конечных точек данного тензодатчика. Теоретически возможно также определить погрешность при постановке эксперимента в зависимости от соответствующей базы датчика, заданных размеров детали (модели) и от места расположения датчика.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Н. Савин. Концентрация напряжений около отверстий. Госиздат технико-теоретической литературы, 1951.

2. С. Л. Тимошенко. Пластинки и оболочки. Госиздат технико-теоретической литературы, 1948.

В. Я. СКОРОБОГАТЬКО

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ ПРИЗНАК РАЗРЕШИМОСТИ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА [1]

Рассмотрим уравнение эллиптического типа

$$Lu = \sum_{k, l=1}^{n} a_{kl} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l} + 2 \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + cu = f. \tag{1}$$

В уравнении (1), a_{kl}, b_j, c, f — действительные функции аргументов, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \bar{D} \cdot D$ — конечная область. Известно, что первая краевая задача для уравнений вида (1) не всегда разрешима в D (при $c > 0$), если даже данные функции и граница S области D достаточно гладкие.

Укажем один признак единственности решения первой краевой задачи при следующих предположениях относительно границы S, области D и данных функций:

1. Граница S может быть представлена в виде конечного числа таких ее частей S_j, что каждая точка границы S находится внутри одной из этих частей; каждая часть S_j может быть задана уравнением $x_k = f_k(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n)$ (k — одно из чисел $1, \ldots, n$), причем вторые производные f_k удовлетворяют условию Липшица (L).

2. Вторые производные коэффициентов a_{kl}, первые производные b_j и коэффициент c удовлетворяют условию (L); кроме того, четвертые производные коэффициентов a_{kl} и вторые производные коэффициентов b_j удовлетворяют условию (L) на границе S, $f \in (L)$; $u|_s = \varphi$, где φ — непрерывная функция.

---

[1] Результаты этой работы обобщают исследования автора, опубликованные в Украинском математическом журнале, № 1, 1955.