ных точек данного тензодатчика. Теоретически возможно также определить погрешность при постановке эксперимента в зависимости от соответствующей базы датчика, заданных размеров детали (модели) и от места расположения датчика.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Н. Савин. Концентрация напряжений около отверстий. Госиздат технико-теоретической литературы, 1951.

2. С. Л. Тимошенко. Пластинки и оболочки. Госиздат технико-теоретической литературы, 1948.

В. Я. СКОРОБОГАТЬКО

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ ПРИЗНАК РАЗРЕШИМОСТИ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА [1]

Рассмотрим уравнение эллиптического типа

$$Lu = \sum_{k, l=1}^{n} a_{kl} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l} + 2 \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + cu = f. \qquad (1)$$

В уравнении (1), a_{kl}, b_j, c, f — действительные функции аргументов, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \bar{D} \cdot D$ — конечная область. Известно, что первая краевая задача для уравнений вида (1) не всегда разрешима в D (при $c > 0$), если даже данные функции и граница S области D достаточно гладкие.

Укажем один признак единственности решения первой краевой задачи при следующих предположениях относительно границы S, области $\bar{D}$ и данных функций:

1. Граница S может быть представлена в виде конечного числа таких ее частей S_j, что каждая точка границы S находится внутри одной из этих частей; каждая часть S_j может быть задана уравнением $x_k = f_k(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n)$ (k — одно из чисел $1, \ldots, n$), причем вторые производные f_k удовлетворяют условию Липшица (L).

2. Вторые производные коэффициентов a_{kl}, первые производные b_j и коэффициент c удовлетворяют условию (L); кроме того, четвертые производные коэффициентов a_{kl} и вторые производные коэффициентов b_j удовлетворяют условию (L) на границе S, $f \in (L)$; $u|_s = \varphi$, где φ — непрерывная функция.

---

[1] Результаты этой работы обобщают исследования автора, опубликованные в Украинском математическом журнале, № 1, 1955.

Лемма. Пусть в области D определены, вообще говоря, непрерывные функции $B_1, \ldots, B_n$, имеющие кусочно непрерывные производные $\frac{\partial B_i}{\partial x_i}$, $i = 1, \ldots, n$. Функции B_i могут терпеть разрывы на кусочно гладких $(n-1)$-мерных поверхностях S_k, $k = 1, 2, \ldots, p < \infty$, на которых

$$\sum_{j=1}^{n} B_j \cos(n, x_j) = 0,$$

n — направление нормали к S_k.

Если в области $\overline{D}$ выполняется неравенство

$$I = \begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} A_1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} \cdots a_{nn} A_n \\ A_1 \cdots A_n R \end{vmatrix} \geqslant 0, \tag{2}$$

в котором

$$A_l = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial a_{kl}}{\partial x_k} - b_l + B_l, \; l = 1, \ldots, n$$

и

$$R = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial B_i}{\partial x_i} - C,$$

то первая краевая задача для уравнения (1) имеет не более одного решения, дважды непрерывно дифференцируемого в D и непрерывного в $\overline{D}$.

Доказательство. Пусть $Lu = 0$ и $u|_S = 0$. Составим выражение

$$\int\limits_D^{(n)}\!\!\int u \left[\sum_{k, l=1}^{n} a_{kl} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l} + 2 \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + \right.$$

$$\left. + \left(c_0 + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial B_j}{\partial x_j} \right) u \right] d\tau = 0, \tag{3}$$

в котором

$$c_0 = c - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial B_j}{\partial x_j} \cdot$$

Интегрируя в (3) по частям члены вида $a_{\kappa l}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l}$ и $\frac{\partial B_j}{\partial x_j} u^2$, преобразуем это выражение к виду

$$\int\limits_{D}(n)\int\Big(\sum_{\kappa, l=1}^{n} a_{\kappa l}\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial u}{\partial x_l}+2u\sum_{j=1}^{n}A_j\frac{\partial u}{\partial x_j}-c_0u^2\Big)\,d\tau=0. \qquad (4)$$

Интегрирование по частям членов $a_{\kappa l}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l}$ законно, так как из теорем Жиро [2] (стр. 181, 185) следует, что решение уравнения $Lu=0$, $u|_s=0$, дважды непрерывно дифференцируемое в D и непрерывное в $\overline{D}$, имеет также непрерывные первые производные в $\overline{D}$.

Далее, при помощи подстановки $\frac{\partial u}{\partial x_k}=w_k+p_\kappa u$, $k=1,\ldots,n$ (p_κ определяется из системы уравнений $\sum\limits_{l=1}^{n} a_{ml}p_l=-B_m$, $m=1,\ldots,n$) выражение (4) преобразуется в

$$\int\limits_{D}(n)\int\Big[\sum_{\kappa, l=1}^{n} a_{\kappa l}\Big(\frac{\partial u}{\partial x_k}-p_k u\Big)\Big(\frac{\partial u}{\partial x_l}-p_l u\Big)+$$

$$+\frac{I}{\det A}u^2\Big]\,d\tau=0;\quad A=\|a_{ij}\|_{i,j=1}^{n}. \qquad (5)$$

Из формулы (5) уже легко усматривается справедливость леммы.

З а м е ч а н и е. На основании теоремы Жиро [2] (стр. 208) из единственности следует и существование решения первой краевой задачи. Итак, выполнение неравенства (2) является признаком не только единственности, но и разрешимости первой краевой задачи.

Неравенство (2) может быть мажорировано неравенством

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial B_j}{\partial x_j}>\frac{1}{2}\sum_{\kappa, l=1}^{n}\frac{\partial^2 a_{kl}}{\partial x_k \partial x_l}-\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial b_l}{\partial x_l}+c+$$

$$+N\Big(\sum_{l=1}^{n}B_l^2\Big). \qquad (6)$$

В формуле (6) $N=\max\limits_{x}\big(\max\limits_{\varphi_1^2+\ldots+\varphi_n^2=1}\varphi' A^{-1}\varphi\big)$, $x\in D$, A^{-1} — матрица обратная к матрице $\|a_{ij}\|_{i,j=1}^{n}$,

$$\varphi = \| \varphi_1, \ldots, \varphi_n \|, \quad \varphi' = \left\| \begin{matrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{matrix} \right\|.$$

Если некоторая совокупность функций $B_1, \ldots, B_n$ удовлетворяет неравенству (6), то эти функции также удовлетворяют и неравенству (2).

Положив $B_i = \frac{\omega_i}{N}$, приводим неравенство (6) к простому виду:

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial \omega_n}{\partial x_n} > c^* + \omega_1^2 + \ldots + \omega_n^2. \tag{7}$$

В формуле (7) $c^* = N\left(\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial^2 a_{kl}}{\partial x_k \partial x_l} - \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial b_l}{\partial x_l} + c\right)$.

Введем понятие о внутреннем диаметре области, необходимое в дальнейшем. Обозначим через $r(x)$ расстояние от точки x до границы этой области. Величину $d = 2 \max r(x)$, $x \in D$, назовем внутренним диаметром области D.

Признак разрешимости (теорема о внутреннем диаметре). Если $\frac{\pi^2}{d^2} > \max\limits_{x \in D} c^*(x)$, то 1-я краевая задача, поставленная для уравнения (1), разрешима в области D.

Укажем основные моменты доказательства для двух аргументов. Построим такой полигон D', содержащий D, чтобы его граница S' не касалась S и чтобы расстояние $\rho(y, S')$ от любой точки $y \in S$ до S' было достаточно мало. (Можно считать $\rho(y, S') < \frac{\pi}{2\sqrt{\max\limits_{x} c^*}} - \frac{d}{2}$ при $\max\limits_{x} c^* > 0$ и $\rho(y, S') < \infty$ при $\max c^* \leq 0$).

Опишем из точки $x \in D'$ окружность $M'(x)$ радиусом $r'(x)$ ($r'(x)$ — расстояние от точки x до S').

Множество $'$ точек $x \in \bar{D}'$, для которых окружности $M'(x)$ касаются S' более чем в одной точке, является кусочно непрерывной кривой.

Отметим, что никакая кривая $\delta \subset \mathfrak{M}'$ не может ограничивать в D' область, гомеоморфную кругу. Кривую $\mathfrak{M}'$ назовем биссектрисой полигона D'. Радиусы окружностей $M'(x)$ при $x \in \mathfrak{M}'$, содержащие точки S', образуют в D поле α, которое имеет разрывы только на $'$. Обозначим через $\bar{D}_{l_i}$ замыкание области, состоящей из всех точек, расстояния от которых до звена $l_i \in S'$ совпадают с расстоянием от этих точек до S'.

Все точки x, для которых вершина O_i ломаной S' является ближайшей точкой, принадлежащей S', образуют область D_{o_i} (звенья S', выходящие из O_i, образуют со стороны D' угол $\lambda_i > \pi$). Нетрудно доказать, что $\overline{D'}$ составляется из замыканий вида $\overline{D}_{l_i}$ и D_{o_i}.

В каждой области D_{o_i} и D_{l_i} переходим к новым координатам t, σ. Величина t в D_{l_i} означает расстояние от точки x до звена l_i ломаной S', в D_{o_i} — расстояние от точки x до вершины O_i. Величины σ в D_{l_i} отсчитываются вдоль l_i от некоторой точки, положение которой несущественно, а в D_{o_i} σ — длины дуг концентрического семейства окружностей с центром O_i. Отсчет дуг σ производится от какого-либо луча, исходящего из вершины O_i ломаной S'. Ищем функции ω_i, удовлетворяющие неравенству (7) в виде $\omega_i = \omega \cos(t, x_i)$, где (t, x_i) — угол между направлением поля α в точке x и осью ox_i. Неравенство (7) тогда записывается в виде

$$\frac{d\omega}{dt} + \omega \frac{d}{dt} \ln \frac{\partial (x_1, x_2)}{\partial (t, \sigma)} > c^* + \omega^2. \qquad (8)$$

Производная $\frac{d}{dt} \ln \frac{\partial (x_1, x_4)}{\partial (t, \sigma)} = 0$, так как якобиан $\frac{\partial (x_1, x_2)}{\partial (t, \sigma)} = $ $= \text{const}$.

Полагаем $\omega = -\frac{\pi}{2 r''(x)} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2 r''(x)} t$, где $r''(x)$ — длина радиуса той окружности $M'(y)$, $y \in \mathfrak{M}'$, один из радиусов которой содержит точку x и принадлежит полю α.

В результате подстановки так выбранной функции ω в (8) получаем, что $\frac{\pi^2}{4 r''^2(x)} > c^*(x)$, так как, согласно условию теоремы, даже $\frac{\pi^2}{a^2} > \max_x c^*(x)$. Отметим еще, что при интегрировании по частям выражения

$$\iint\limits_D \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \omega \cos(t, x_1) + \frac{\partial}{\partial x_2} \omega \cos(t, x_2)\right] u^2 d\sigma$$

интеграл, взятый по биссектрисе $\mathfrak{M}'$, обращается в нуль (за счет $\omega = 0$ на $\mathfrak{M}'$). Итак, подобраны функции ω_i, удовлетворяющие неравенству (7) в области $\overline{D}$.

Отсюда уже следует, на основании леммы и замечания к ней, разрешимость 1-ой краевой задачи в области D. Теорема верна и для n-аргументов.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Г. Петровский. Лекции об уравнениях с частными производными, стр. 284—287, 1950.

2. Ж. Жиро (G. Giraud). Sur le problème de Dirichlet généralisé Annales scientifiques de l'Ecole normale supérieure. 46, p. 131—245, 1929.