Г. В. СИРЫК

О КОНФОРМНОМ ОТОБРАЖЕНИИ БЛИЗКИХ ОБЛАСТЕЙ

1. ОДНОСВЯЗНЫЕ ОБЛАСТИ

I. Круг. Пусть функция $w=f(z)$, $f(0)=0$, $f'(0)>0$ конформно отображает круг $|z|<1$ на „почти-круг" D, ограниченный кривой $\Gamma: \rho=e^{\psi(\theta)}$. Применяя формулу Шварца к функции $F(z)=\ln\frac{f(z)}{z}$, получаем:

$$\ln\frac{f(z)}{z}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Psi\left[\Theta(t)\right]\frac{e^{it}+re^{i\varphi}}{e^{it}-re^{i\varphi}}\,dt+iC. \tag{1}$$

Отделяя действительную и мнимую части, совершая предельный переход $r\to 1$ и беря $C=0$, получаем:

$$\Theta(\varphi)-\varphi=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Psi\left[\Theta(t)\right]\operatorname{ctg}\frac{t-\varphi}{2}\,dt, \tag{2}$$

$$\Psi\left[\Theta(\varphi)\right]-\Psi_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\Theta(t)-t\right]\operatorname{ctg}\frac{t-\varphi}{2}\,dt, \tag{3}$$

где интеграл (2) — сингулярный. Если функция $f(z)$ неизвестна, то нелинейное сингулярное интегральное уравнение (2), выведенное Теодорсеном и Гарриком (3), служит для определения $\Theta(\varphi)$, следовательно и $f(z)$. Оно решается по методу последовательных приближений (4).

Если уравнение Γ имеет вид $\rho=1-\delta(\Theta)$, где $|\delta(\Theta)|<\varepsilon$, $|\delta'(\Theta)|<\varepsilon$, $|\delta''(\Theta)|<\varepsilon$, то

$$W(z)=z\left\{1-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1+re^{-it}}{1-ze^{-it}}\,\delta(t)\,dt\right\}+O(\varepsilon^2). \tag{4}$$

Эта формула, полученная М. А. Лаврентьевым [1] методом локальных вариаций, следует также из (1), если там положить $\Theta(\varphi)=\varphi$, $\psi(\Theta)=-\delta(\Theta)$, что соответствует первому приближению в решении (2) по методу последовательных приближений.

I.2 Полуплоскость. Аналогично если $w = f(z)$, $f(\infty) = \infty$ отображает полуплоскость $Im\, z > 0$ на „почти-полукруглость" D, ограниченную кривой $\Gamma : v = v(u)$, $|v(u)| < \varepsilon$, $|v'(u)| < \varepsilon$, $|v''(u)| < \varepsilon$, то, применяя форму Шварца

$$F(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} ReF(t) \frac{dt}{t-z}, \tag{1}$$

к функции $F(z) = i\,[f(z) - z]$, отделяя действительную и мнимую части и совершая предельный переход $y \to 0$, получаем

$$U(x) - x = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} v\,[u(t)]\, \frac{dt}{t-x}, \tag{2}$$

где интеграл в (2) — сингулярный, существующий при известных ограничениях на $v(u)$. Нелинейное сингулярное уравнение (2) служит для определения $u(x)$, следовательно и $f(z)$; оно также решается по методу последовательных приближений.

Если уравнение Γ имеет вид $y = y(u)$, где $|y(u)| < \varepsilon$, $|y'(u)| < \varepsilon$, $|y''(u)| < \varepsilon$, то, по М. А. Лаврентьеву [1],

$$W(t) = z + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y(t)}{z-t}\, dt + O(\varepsilon^2). \tag{3}$$

Эта формула также следует из (1), если положить $u(x) = x$ $v(u) = y(u)$, что соответствует первому приближению в решении (2) по методу последовательных приближений.

I.3 Полоса. Аналогично, если $w = f(z)$, $Re f(\pm\infty) = \pm\infty$ отображает полосу $0 \leqslant Im\, z \leqslant 1$ на „почти-полосу" D, ограниченную кривыми $\Gamma_i : v_i = v_i(u_i)$, $|v_i(u_i)| < \varepsilon\, |v_2(u_2) - 1| < \varepsilon$ $|v_i'(u_i)| < \varepsilon$, $|v_i''(u_i)| < \varepsilon$ $(i = 1, 2)$, то, применяя формулу Шварца

$$f(z) = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{+\infty} u_1(t) \operatorname{cth} \frac{\pi(z-t)}{2}\, dt + \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{+\infty} u_2(t) \operatorname{th} \frac{\pi(z-t)}{2}\, dt \tag{1}$$

к функции $F(z) = i\,[f(z) - z]$, получаем

$$f(z) - z = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{+\infty} ReF(t) \operatorname{cth} \frac{\pi(z-t)}{2}\, dt + \\ + \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{+\infty} ReF(t) \operatorname{th} \frac{\pi(z-t)}{2}\, dt. \tag{2}$$

Отделяя действительную и мнимую части и совершая предельный переход при $y \to 0$, $y \to 1$, получаем

$$u_1(x) - x = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} v_1[u_1(t)] \operatorname{cth}\frac{\pi(x-t)}{2}\,dt + \\ + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} v_2[u_2(t) \operatorname{th}\frac{\pi(x-t)}{2}\,dt,$$

$$u_2(x) - x = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} v_1[u_1(t)] \operatorname{th}\frac{\pi(x-t)}{2}\,dt + \\ + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} v_2[u_2(t)] \operatorname{cth}\frac{\pi(x-t)}{2}\,dt, \tag{3}$$

где интегралы в (3) — сингулярные, существующие при соответствующих ограничениях на $v_i(u_i)$ $(i=1,2)$. Они также могут служить для определения $u_1(x)$, $u_2(x)$, следовательно, и $f(z)$.

II. ДВУСВЯЗНЫЕ ОБЛАСТИ

2.1 Кольцо. Если функция $w = f(z)$ отображает круговое кольцо $h < |z| < 1$ на „почти-круговое кольцо" D, ограниченное $\Gamma_1 : \rho_1 = e^{\psi_2(\Theta)}$ и $\Gamma_2 : \rho_2 = he^{\psi_2(\Theta)}$, то, предполагая выполненным условие

$$\int_0^{2\pi} \psi_1[\Theta_1(s)]\,ds = \int_0^{2\pi} \psi_2[\Theta_2(s)]\,ds,$$

где $\Theta_1(s)$, $\Theta_2(s)$ определены из соответствия границ, и применяя формулу Вилля $\Big($ см. [2], стр. 226, где $\omega = \pi$, ω' определяется через h по формуле $h = e^{i\pi\frac{\omega'}{\omega}}\Big)$, имеем

$$F(z) = 1\frac{f(z)}{z} = \frac{i}{\pi}\int_0^{2\pi} \psi_1[\Theta_1(s)]\zeta(-i\ln z - s)\,ds - \\ - \frac{i}{\pi}\int_0^{2\pi} \psi_2[\Theta_2(s)]\zeta(-i\ln z - s - \omega')\,ds + iC. \tag{1}$$

Отделяя действительную и мнимую части и совершая предельный переход $r \to 1$, получаем:

$$\Theta_1(\varphi) - \varphi = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \psi_1[\Theta_1(s)]\zeta(\varphi - s)\,ds - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \psi_2[\Theta_2(s)]\zeta[(\varphi - s) + \omega']\,ds + C, \tag{2}$$

$$\psi_1[\Theta_1(\varphi)] - \psi_{01} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} [\Theta_1(s) - s]\zeta(\varphi - s)\,ds - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} [\Theta_2(s) - s]\zeta[(\varphi - s) + \omega']\,ds, \tag{3}$$

или

$$\Theta_1(\varphi) - \varphi = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \psi_1[\Theta_1(s)]Z_1(\varphi - s)\,ds - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \psi_2[\Theta_2(s)]Z(\varphi - s)\,ds, \tag{2'}$$

$$\psi_1[\Theta_1(\varphi)] - \psi_{01} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} [\Theta_1(s) - s]Z_1(\varphi - s)\,ds - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} [\Theta_2(s) - s]Z(\varphi - s)\,ds, \tag{3'}$$

где

$$Z_1(\varphi - s) = \zeta(\varphi - s) - \frac{\eta_1}{\pi}(\varphi - s),$$

$$Z(\varphi - s) = \zeta[(\varphi - s) + \omega'] - \frac{\eta_1}{\pi}(\varphi - s) - \eta'$$

известные функции Якоби и постоянная C выбрана так, что

$$C = \frac{\eta_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\Big[\psi_1[\Theta_1(s)] - \psi_2[\Theta_2(s)]\Big]s\,ds,$$

и при $r \to h$ получаем аналогичные уравнения для 2-го контура

$$\Theta_2(\varphi) - \varphi = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \psi_1[\Theta_1(s)]\zeta[(\varphi - s) - \omega'] \, ds - \tag{4}$$
$$- \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \psi_2[\Theta_2(s)]\zeta(\varphi - s) \, ds,$$

$$\psi_2[\Theta_2(\varphi)] - \psi_{02} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} [\Theta_1(s) - s]\zeta[(\varphi - s) - \omega'] \, ds - \tag{5}$$
$$- \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} [\Theta_2(s) - s]\zeta(\varphi - s) \, ds,$$

или

$$\Theta_2(\varphi) - \varphi = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \psi_1[\Theta_1(s)]Z(\varphi - s) \, ds - \tag{4'}$$
$$- \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \psi_2[\Theta_2(s)]Z_1(\varphi - s) \, ds,$$

$$\psi_2[\Theta_2(\varphi)] - \psi_{02} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} [\Theta_1(s) - s]Z(\varphi - s) \, ds - \tag{5'}$$
$$- \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} [\Theta_2(s) - s]Z_1(\varphi - s) \, ds.$$

Если отображающая функция неизвестна, то (2), (4) или (2′), (4′) представляют систему двух нелинейных сингулярных интегральных уравнений, позволяющих определить $\Theta_1(\varphi)$, $\Theta_2(\varphi)$, а следовательно, и отображающую функцию $f(z)$.

Если уравнения контуров Γ_1 Γ_2, имеют вид:

$$\rho_1 = 1 - \delta_1(\Theta), \; \rho_2 = h[1 + \delta_2(\Theta)],$$

где

$$|\delta_i(\Theta)| < \varepsilon, \; |\delta_i'(\Theta)| < \varepsilon, \; |\delta_i''(\Theta)| < \varepsilon,$$

то из формулы Вилля получаем

$$W = z\left\{1 - \frac{i}{\pi}\int_0^{2\pi} Z_1[-i\ln z - s]\,\delta_1(s)ds - \right.$$
$$\left. - \frac{i}{\pi}\int_0^{2\pi} Z(i\ln z + s)\,\delta_2(s)ds\right\} + O(\varepsilon^2), \tag{6}$$

что представляет обобщение формулы М. А. Лаврентьева для кольца.

Эта формула может быть также получена методом локальных вариаций. Для получения ее поступаем следующим образом. Пусть локальная вариация представляет собой малую выброшенную луночку (двуугольник) с одной из вершин в точке $e^{i\varphi}$. Тогда при помощи вспомагательных конформных отображений переводим кольцо $\frac{1}{\mu} < |z| < 1$ на верхнюю полуплоскость с выброшенной луночкой и, используя формулу Лаврентьева, отображаем ее на верхнюю полуплоскость, а затем на кольцо $\frac{1}{\mu_1} < |w| < 1$. Тогда получаем следующую вариационную формулу:

$$w = z\left\{1 + i\sigma'\frac{\pi}{K}Z_1\left(-i\frac{K}{\pi}\ln z - \frac{K}{\pi}\varphi\right)\right\} + O(\varepsilon^2), \tag{7}$$

где $\sigma' = \frac{K^2}{\pi^3}\sigma_z$. При этом для модуля μ_1 имеет место следующее соотношение

$$\mu_1 = \mu\left(1 - \frac{\sigma_z}{2\pi}\right).$$

Если одна из вершин луночки находится в точке $\frac{1}{\mu}e^{i\varphi}$, то аналогично получаем

$$w = z\left\{1 - i\sigma'\mu^2\frac{\pi}{K}\left[Z\left(i\frac{K}{\pi}\ln z + \frac{K}{\pi}\varphi\right) + \frac{i\pi}{2K}\right]\right\} + O(\varepsilon^2)$$

и

$$\mu_1 = \mu\left(1 - \frac{\mu^2}{2\pi}\sigma_z\right).$$

Представляя σ_z в виде $\int_0^{2\pi}\delta(s)\,ds$ и производя формальное интегрирование по обеим окружностям, получаем указанную выше вариационную формулу для „почти-кругового“ кольца с контурами $\rho_1 = 1 - \delta_1(\Theta)$, $\rho_2 = \frac{1}{\mu}[1 + \delta_2(\Theta)]$ (проверка — как в односвязном случае).

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Лаврентьев. Конформные отображения, Гостехиздат, 1946.

2. Н. И. Ахиезер. Элементы теории эллиптических функций, Гостехиздат, 1948.

3. T. Theodorsen and Garrick. General potential theory of arbitrary wing sections, NACA Rep. № 452, 1933.

4. S. E. Warschawski. On Theodorsen's method of conformal mapping of nearly circular regions, Quart of Appl. Math. 3, № 1, 1945.

Г. В. СИРЫК

ОБ ОДНОМ ПРИБЛИЖЕННОМ МЕТОДЕ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

1. Рассматривается конформное отображение круга $|z|<1$ на область D в z' плоскости, ограниченную звездным контуром C:

$$z' = ae^{\psi + i\Theta}, \quad a > 0. \tag{1}$$

Звездный контур C, заданный уравнением $\psi(\Theta)$, называется почти-окружностью или почти-круговым контуром, если выполняются следующие условия:

$$|\psi(\Theta)| < \varepsilon, \quad |\psi'(\Theta)| < \varepsilon, \tag{2}$$

где $0 < \varepsilon < 1$. Область I, ограниченная контуром C, называется „почти-кругом“.

Для определения функции

$$z' = f(z), \quad f(0) = 0, \quad f'(0) > 0,$$

отображающей круг $|z| < 1$ на область D, ее представляют в виде

$$\ln \frac{f(z)}{z} \sum_{\nu=0}^{\infty} (a_\nu + ib_\nu) z^\nu = \psi(r, \varphi) + i\Theta(r, \varphi) \tag{3}$$

и определяют

$$\Theta(1, \varphi) = \Theta(\varphi), \quad \psi(1, \varphi) = \tilde{\psi}(\varphi) = \psi[\Theta(\varphi)].$$