выше вариационную формулу для „почти-кругового“ кольца с контурами $\rho_1 = 1 - \delta_1(\Theta)$, $\rho_2 = \frac{1}{\mu}[1 + \delta_2(\Theta)]$ (проверка — как в односвязном случае).

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Лаврентьев. Конформные отображения, Гостехиздат, 1946.

2. Н. И. Ахиезер. Элементы теории эллиптических функций, Гостехиздат, 1948.

3. T. Theodorsen and Garrick. General potential theory of arbitrary wing sections, NACA Rep. № 452, 1933.

4. S. E. Warschawski. On Theodorsen's method of conformal mapping of nearly circular regions, Quart of Appl. Math. 3, № 1, 1945.

Г. В. СИРЫК

ОБ ОДНОМ ПРИБЛИЖЕННОМ МЕТОДЕ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

1. Рассматривается конформное отображение круга $|z| < 1$ на область D в z' плоскости, ограниченную звездным контуром C:

$$z' = ae^{\psi + i\Theta}, \quad a > 0. \tag{1}$$

Звездный контур C, заданный уравнением $\psi(\Theta)$, называется почти-окружностью или почти-круговым контуром, если выполняются следующие условия:

$$|\psi(\Theta)| < \varepsilon, \quad |\psi'(\Theta)| < \varepsilon, \tag{2}$$

где $0 < \varepsilon < 1$. Область I, ограниченная контуром C, называется „почти-кругом“.

Для определения функции

$$z' = f(z), \quad f(0) = 0, \quad f'(0) > 0,$$

отображающей круг $|z| < 1$ на область D, ее представляют в виде

$$\ln \frac{f(z)}{z} \sum_{\nu=0}^{\infty} (a_\nu + ib_\nu) z^\nu = \psi(r, \varphi) + i\Theta(r, \varphi) \tag{3}$$

и определяют

$$\Theta(1, \varphi) = \Theta(\varphi), \quad \psi(1, \varphi) = \tilde{\psi}(\varphi) = \psi[\Theta(\varphi)].$$

Определение $\Theta(\varphi)$ приводится к решению следующего нелинейного сингулярного интегрального уравнения:

$$\Theta(\varphi)=\varphi+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\{\psi[\Theta(t)]-\psi[\Theta(\varphi)]\}\operatorname{ctg}\frac{t-\varphi}{2}\,dt. \tag{4}$$

Как показал Варшавский [3], уравнение (4) имеет единственное непрерывное решение, которое находится методом последовательных приближений:

$$\Theta_0(\varphi)=\varphi,\quad \Theta_n(\varphi)=\varphi+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\{\psi[\Theta(t)]-\psi[\Theta(\varphi)]\}\operatorname{ctg}\frac{t-\varphi}{2}\,dt,$$

$$(n=1,\ 2,\ldots) \tag{5}$$

и имеют место следующие утверждения:

I. Если C — почти-круговой контур и $\Theta_n(\varphi)$, $\Theta(\varphi)$ определены соответственно из (5) и (4), то

$$|\Theta_n(\varphi)-\Theta(\varphi)|\leqslant 2\left(\frac{\pi^2}{1-\varepsilon^2}\right)^{\frac{1}{4}}\varepsilon^{\frac{n+2}{2}}. \tag{6}$$

II. Если C — почти-круговой контур и выполняется условие

$$|\psi'(\Theta_2)-\psi'(\Theta_1)|\leqslant\varepsilon|\Theta_2-\Theta_1|, \tag{7}$$

то

$$|\Theta_n(\varphi)-\Theta(\varphi)|\leqslant(2\pi A(n+1))^{\frac{1}{2}}\varepsilon^{n+1}, \tag{8}$$

где $A=4^{\varepsilon}e^{\varepsilon^2}$.

III. Елси C — почти-круговой контур и, кроме условия (7), выполняется условие

$$|\psi''(\Theta_2)-\psi''(\Theta_1)|\leqslant\varepsilon|\Theta_2-\Theta_1|, \tag{9}$$

то

$$|\Theta_n'(\varphi)-\Theta'(\varphi)|\leqslant\sqrt{2\pi\sigma_n}\,(A(n+1))^{\frac{3}{2}}\varepsilon^{n+1}, \tag{10}$$

где

$$\sigma_1=1+\varepsilon,\quad \sigma_n=(1+\varepsilon)\prod_{k=2}^{n}(1+\varepsilon^k\sqrt{2\pi Ak}).$$

Далее, если $\varepsilon<0{,}295$, то функция

$$z'=F_n(z),\quad F_n(0)=0,\quad F_n'(0)>0,$$

отображает круг $|z|<1$ на „почти-круг“, ограниченный контуром C_n:

$$z'=F_n(e^{i\varphi}),\quad \ln F_n(e^{i\varphi})=\tilde{\psi}(\varphi)+i[\Theta_n(\varphi)-\varphi].$$

2. Пусть теперь контур C разбит на части $C_k (k=1, 2)$ с центральными углами α_κ и условия (2), (7), (9), выполняются на C_κ с постоянными $\varepsilon_\kappa (\varepsilon_1 \geqslant \varepsilon_2)$, и пусть $\tilde{C}_{n\kappa} = F_n^{-1}(C_\kappa)$, $\tilde{C}_\kappa = F^{-1}(C_\kappa)$ и $\tilde{\alpha}_{nk}$, α_κ соответствующие центральные углы на окружности $|z| < 1$. Тогда $\tilde{C}_{n\kappa} \to \tilde{C}_\kappa$ и, если C_κ^* означает пересечение всех дуг $\tilde{C}_{n\kappa}$, $\tilde{C}_\kappa$, а α_κ^* — соответствующий центральный угол, то, как нетрудно подсчитать (см. [1], лемма на стр. 307),

$$|\alpha_\kappa^* - \alpha_\kappa| < 8\varepsilon_1 .$$

Пользуясь методом Варшавского, получаем в этом случае следующие дифференцированные оценки:

$$\text{I} \qquad |\Theta_n(\varphi) - \Theta(\varphi)| \leqslant 2^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{\kappa=1}^{2} \beta_\kappa \varepsilon_\kappa^{2(n+1)} \Big)^{\frac{1}{4}} \Big(\sum_{\kappa=1}^{2} \frac{\beta_k \varepsilon^2_k}{1-\varepsilon^2_k} \Big)^{\frac{1}{4}}, \qquad (6')$$

$$\text{II} \qquad |\Theta'_n(\varphi) - \Theta(\varphi)| \leqslant (n+1)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{\kappa=1}^{2} \beta_\kappa \varepsilon_\kappa^{2(n+1)} \Big)^{\frac{1}{4}} \Big(\sum_{\kappa=1}^{2} A_\kappa^2 \beta_\kappa \varepsilon_\kappa^{2(n+1)} \Big)^{\frac{1}{4}}, \qquad (8')$$

$$\text{III} \qquad |\Theta'_n(\varphi) - \Theta'(\varphi)| \leqslant (n+$$

$$+1)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{\kappa=1}^{2} A_\kappa^2 \beta_\kappa \varepsilon_\kappa^{2(n+1)} \Big)^{\frac{1}{4}} \Big(\sum_{\kappa=1}^{2} A_\kappa^2 \sigma_{n\kappa} \beta_\kappa \varepsilon_\kappa^{2(n+1)} \Big)^{\frac{1}{4}}, \qquad (10')$$

где A_κ — абсолютные постоянные, $\sigma_{1\kappa} = 1 + \varepsilon_\kappa$,

$$\sigma_{n\kappa} = (1+\varepsilon_\kappa) \prod_{m=2} (1 + \varepsilon_\kappa^m \sqrt{\beta_\kappa A_\kappa m})$$

и $\beta_\kappa = \alpha_\kappa + (-1)^{\kappa-1} 8\varepsilon_1$ — дуги, из которых β_1 содержит $\tilde{C}_{n1}$ и $\tilde{C}_1$, и β_2 содержится в $\tilde{C}_{n2}$ и $\tilde{C}_2$.

Кроме того, получаем следующие оценки для отображающей функции:

$$\text{I} \quad |F_n(e^{i\varphi}) - F(e^{i\varphi})| \leqslant 2^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{\kappa=1}^{2} \beta_\kappa \varepsilon_\kappa^{2(n+1)} \Big)^{\frac{1}{4}} \Big(\sum_{\kappa=1}^{2} \frac{\beta_k \varepsilon_k}{1-\varepsilon^2_k} \Big)^{\frac{1}{4}} (1+\varepsilon_\kappa)^2 \quad \text{на } \beta_\kappa.$$

$$\text{II} \quad |F_n(e^{i\varphi}) - F(e^{i\varphi})| \leqslant (n+1)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{\kappa=1}^{2} \beta_\kappa \varepsilon_\kappa^{2(n+1)} \Big)^{\frac{1}{4}} \Big(\sum_{\kappa=1}^{2} A_\kappa^2 \beta_\kappa \varepsilon_\kappa^{2(n+1)} \Big)^{\frac{1}{4}} (1+$$

$$+\varepsilon_\kappa)^2 \text{ на } \beta_\kappa .$$

Отсюда, пользуясь теоремой о двух постоянных, получаем:

$$|F_n(z) - F(z)| \leqslant M_1^{\omega_1(z, C_1^*)} M_2^{\omega_1(z, C_1^*)},$$

где $\omega_\kappa(z, C_1^*)(k=1, 2)$ означает гармоническую меру дуги β_κ, измеренную в точке z относительно круга $|z|<1$ и M_κ означает правую часть в предыдущих оценках I, II.

3. В работе [2] рассматривается случай, когда отклонение контура C от окружности имеет в основном локальный характер, вызываемый слагаемым вида

$$\varepsilon_1\left(\frac{1+\cos\Theta}{2}\right)^n, \tag{11}$$

которое называется „горкой".

Теоретическое обоснование расчетов Я. М. Серебрийского [2], приведенных им с помощью рядов, входящих в (3), легко получается с помощью результатов Варшавского. Что касается оценок приближений, то их лучше находить по указанным выше дифференцированным оценкам, учитывающим ε_κ. При этом, если заданы $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$ и n, причем

$$\frac{1}{2^n}<\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}<1, \tag{12}$$

то из (11) следует, что α_1 определяется из соотношения

$$\varepsilon_1\left(\frac{1+\cos\frac{\alpha_1}{2}}{2}\right)^n=\varepsilon_2$$

или

$$\cos\frac{\alpha_1}{2}=2\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)^{\frac{1}{n}}-1,$$

т. е.

$$\alpha_1=\arccos\left[2\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)^{\frac{1}{n}}-1\right]. \tag{13}$$

Так, например, если $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}=\frac{1}{16}$ и $n=10$, то по формуле (13) имеем $\alpha_1=120^\circ$; если $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}=\frac{1}{150}$, $n=80$, то $\alpha_1=60^\circ$. Этот подсчет можно проводить по таблице 2 в [2].

Оценками (6), (8), (10) удобно пользоваться при малых $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$ и больших n. В этом случае оценки для приближений на C_1 выражаются в терминах ε_1 и n, а на оставшейся части контура имеют место оценки (6), (8), (10).

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Лаврентьев и Б. В. Шабад. Методы теории функций комплексного переменного, М—Л, 1951.
2. Я. М. Серебрийский. Обтекание крыловых профилей произвольной формы, Инж. сборник, т. III, вып. I, 1946.
3. S. E. Warschawski. On Theodorsen's method of konformal mapping of nearly circular regions, Quart. of Appl. Math. 3, № 1, 1945, 12—28.