Доповіді та повідомлення
Львівського державного університету імені Ів. Франка
Випуск VII, частина III 1957

МЕХАНІКА ТА МАТЕМАТИКА

И. Н. ПЕСИН

ОБ ОДНОМ ОПРЕДЕЛЕНИИ КВАЗИКОНФОРМНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

Р. Каччиополи [1] ввел в рассмотрение класс отображений $W=(z)$, именуемых в дальнейшем q — отображениями, обладающих следующими свойствами: а) $f(z)$ осуществляет внутреннее отображение некоторой области G_z, $f(G_z)=G_w$; б) почти на всех сечениях $x=c$, $y=c$ области имеет место абсолютная непрерывность отображения; в) если $\lambda = \underset{\Delta z \to 0}{\underline{\lim}} \left|\frac{\Delta W}{\Delta z}\right|$, $\Lambda = \overline{\lim\limits_{\Delta z \to 0}} \left|\frac{\Delta W}{\Delta z}\right|$, то почти всюду $q\lambda \geqslant \Lambda$.*

Такие отображения еще ранее рассматривались Б. В. Шабатом в качестве решений эллиптической системы линейных дифференциальных уравнений. Среди других недоказанных утверждений Каччиополи посчитал очевидным следующее: q — отображение обладает N — свойством почти на всех кривых $u(x,y)=c$, $v(x,y)=c$, где $u+iv$ — аналитическая функция в G_z. Я не вижу, каким образом такое утверждение непосредственно вытекало бы из определения q — отображения. Однако оно будет следовать из такой общей теоремы:

Теорема. q — отображение является общим Q-квазиконформным отображением.

Прежде всего, несколько непосредственно устанавливаемых свойств Q — отображения**: 1) из условия в) и теоремы В. В. Степанова следует дифференцируемость q — отображения почти всюду; 2) из свойства б) и теоремы В. В. Меньшова следует возможность применимости к q — отображениям формулы

* Каччиополи требовал от q — отображений положительности якобиана почти всюду; можно показать, что это условие есть следствие остальных.

** По поводу этих свойств см. [2].

Грина; 3) q — отображения инвариантны относительно конформных преобразований в плоскости W и преобразований подобия, переноса и отражения относительно прямой в плоскости z.

Доказательство теоремы базируется на следующих леммах.

Лемма 1. Семейство q — отображений компактно.

Доказательство. Достаточно показать равностепенную непрерывность класса, которая устанавливается таким же образом, как соответствующая лемма М. А. Лаврентьева [3] для (p,Θ)— квазиконформных отображений, причем вместо окружностей рассматриваются концентрические квадраты и используется преобразование симметрии относительно сторон квадрата.

Лемма 2. Пусть $p(z)$ — характеристика q — отображения $W=f(z)$ круга $|z|<1$ на круг $|W|<1$ и $f(0)=0$; $f(1)=1$ и $\iint\limits_E (p(z)-1)a\sigma_z < \varepsilon$, где E — множество точек, в которых якобиан отображения $W=f(z)$ положителен. Тогда

$$|f(z)-z| \leqslant \lambda(\varepsilon), \ \lim_{\varepsilon\to 0} \lambda(\varepsilon)=0.$$

Доказательство леммы основано на применении формулы Грина, а затем теоремы Морера.

Доказательство теоремы. Достаточно рассмотреть отображение $w=f(z)$ круга $|z|<1$ на круг $|w|<1$. Характеристика $p(z)$ отображения определена почти во всех точках, в которых якобиан отображения положителен; доопределим ее во всем круге $|z|<1$ произвольной постоянной и затем определим последовательность измеримых множеств E_n, $|E_n|\to\pi$ и функций $p_n(z)$, $\Theta_n(z)$, $p_n(z)\leqslant q$, непрерывных в круге $|z|\leqslant 1$, причем $p_n(z)=p(z)$ при $z\in E_n$, а $\Theta_n(z)$ совпадает с характеристикой $\Theta(z)$ отображения $W=f(z)$ в тех точках множества E_n, в которых $p(z)>1$. Пусть $p_n(W)=p_n(f^{-1}(W))$, $\Theta_n(W)=\Theta_n(f^{-1}(W))$; $p_n(W)$, $\Theta_n(W)$ непрерывные функции в круге $|W|<1$. В силу известных результатов Б. В. Шабата существует последовательность квазиконформных отображений $\varphi_n(W)$ круга $|W|<1$ на круг $|\zeta|<1$, непрерывно дифференцируемых с характеристиками $p_n^x(W)$, $\Theta_n^x(W)$, $|p_n^x(W)-p_n(W)|<\varepsilon_n |\Theta_n^x(W)-\Theta_n(W)|<\varepsilon_n$, с нормировкой $\varphi_n(0)=0$, $\varphi_n(1)=1$. В силу дифференцируемости при этих отображениях множество длины нуль переходит в множество длины нуль. Последовательность ε возьмем настолько быстро сходящейся к нулю, чтобы семейство эллипсов с характеристиками $p_n(W)$, $\Theta_n(W)$ при этих отображениях переходило в регулярное семейство (см. [2]) кривых с параметром $1+\alpha_n$, причем $\alpha_n(W)\to 0$ равномерно в $|W|<1$. Таким образом, последовательность отображений $\Psi_n(z) = \varphi_n(f(z))$, являющихся, очевидно, q — отображениями, удовлетворяет условиям леммы 2, поэтому всякая окружность $|z - z_o| = r$ плоскости z преобразуется в кривую Γ, для которой

$$\lim \frac{\max\limits_{|z-z_o|=r} \left| \Psi_n(z) - \Psi_n(z_o) \right|}{\min\limits_{|z-z_o|=r} \left| \Psi_n(z) - \Psi_n(z_o) \right|} = 1.$$

Из написанного соотношения и из теоремы искажения при квазиконформных отображениях следует, что семейство окружностей с центром в произвольной точке z преобразуется в регулярное семейство кривых в плоскости w с параметром регулярности, верхняя грань которого в круге $[w] < 1$ зависит от q. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Cacciopoli. Atti Nazionale dei Lincei, **13**, № 5, 197—204 (1952).
2. И. Н. Песин. ДАН СССР, **102**, № 2, 223—224 (1955).
3. М. А. Лаврентьев. Математический сборник, **42**, № 4, 407—424 (1935).

С. А. ГРАЧ

ИЗГИБ КРУГЛОЙ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛИТЫ, КРАЯ КОТОРОЙ ПОДКРЕПЛЕНЫ ТОНКИМИ УПРУГИМИ КОЛЬЦЕВЫМИ РЕБРАМИ ЖЕСТКОСТИ

§ 1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Круглые и кольцевые плиты в качестве элементов конструкций встречаются на практике весьма часто. Большинство круглых плит работает на осесимметричную нагрузку, изменяющуюся только по направлению радиуса r. Во многих случаях плиты усиливаются кольцевыми ребрами жесткости, например диски турбин и вентиляторов, шестерни и ряд других ответственных деталей машин и сооружений.

Рассмотрим конечную круглую пластинку, ослабленную круглым отверстием, края которой усилены тонкими упругими кольцами жесткости постоянного сечения. Пластинка свободно оперта по наружному контуру и нагружена равномерно по окружности радиуса R поперечными усилиями $p = \text{const}$.

В рассматриваемом случае прогибы зависят только от радиуса, следовательно, $W=f(r)$ и уравнение прогиба будет иметь следующий вид [1]:

$$W = C_1 \ln \frac{r}{R} + C_2 \frac{r^2}{R^2} \ln \frac{r}{R} + C_3 + C_4 \frac{r^2}{R^2}, \qquad (1)$$

где C_1, C_2, C_3, и C_4 — постоянные коэффициенты и определяются из следующих граничных условий [2]:

$$\frac{d^2W}{dr^2} + \frac{\mu - \delta_1}{R} \cdot \frac{dW}{dr} = 0 \qquad \text{при } r = R; \qquad (2)$$

$$-D \frac{d}{dr}\left(\frac{d^2W}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dW}{dr}\right) = p \qquad \text{при } r = R; \qquad (3)$$

$$\frac{d^2W}{dr^2} + \frac{\mu + \delta_2}{R_1} \cdot \frac{dW}{dr} = 0 \qquad \text{при } r = R_1; \qquad (4)$$

$$W = 0 \qquad \text{при } r = R_1; \qquad (5)$$

где $D = \dfrac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ — цилиндрическая жесткость пластинки при изгибе;

$\delta_1 = \dfrac{E_1 I_1}{RD}$ — относительная жесткость на изгиб внутреннего подкрепляющего кольца;

$\delta_2 = \dfrac{E_2 I_2}{R_1 D}$ — относительная жесткость на изгиб внешнего подкрепляющего кольца;

E_1 и E_2 — соответствующие модули упругости материалов, из которых изготовлены ребра жесткости;

I_1 и I_2 — соответствующие моменты инерции площадей поперечных сечений кольцевых ребер жесткости.

Подставляя (1) в (2)—(5), получаем систему четырех уравнений, из которой определяем:

$$C_1 = \frac{C_2}{(\mu - \delta_1 - 1)} \left[\frac{A}{B}(\mu - \delta_1 + 1) - (\mu - \delta_1 + 3)\right];$$

$$C_2 = \frac{PR^3}{4D};$$

$$C_3 = \frac{C_2}{(\mu - \delta_1 - 1)} \left\{\left[(\mu - \delta_1 + 3) - \eta^2 (\mu - \delta_1 - 1) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{A}{B}(\mu - \delta_1 + 1)\right] \ln \eta + \frac{A}{2B} \eta^2 (\mu - \delta_1 - 1)\right\};$$

$$C_4 = -\frac{C_2 A}{2B}$$

где

$$A = \eta^2 (\mu - \delta_1 - 1) [2 \ln \eta (\mu + \delta_2 + 1) + (\mu + \delta_2 + 3)] - $$
$$- (\mu - \delta_1 + 3)(\mu + \delta_2 - 1);$$

$$B = \eta^2 (\mu - \delta_1 - 1)(1 + \mu + \delta_2) - (\mu - \delta_1 + 1)(\mu + \delta_2 - 1)$$

$$\eta = \frac{R_1}{R};$$

Подставляя значения найденных коэффициентов в (1), получим:

$$W = \frac{PR}{4D} \left\{ \left[(\mu - \delta_1 + 3) - \frac{A}{B} (\mu - \delta_1 + 1) \right] \frac{R^2 \ln \frac{R_1}{r}}{(\mu - \delta_1 - 1)} + \right.$$
$$\left. + (R_1^2 - r^2) \left(\frac{A}{2B} + \ln R \right) + r^2 \ln r - R_1^2 \ln R_1 \right\}. \qquad (6)$$

Некоторые важные для практики случаи можно получить как частные из данной общей формулы (6). Так, при $\delta_2 = 0$ получаем решение задачи об изгибе плиты с подкрепленным внутренним краем [3]. Если же $\delta_1 = 0$, а $\delta_2 \neq 0$, получается решение той же задачи для случая подкрепления лишь внешнего края плиты.

При $\delta_1 = \delta_2 = \infty$ получается решение для случая жесткого защемленного края плиты [1], и, наконец, когда $\delta_1 = \delta_2 = 0$, получаем решение для круглой пластинки постоянного сечения, ослабленной круговым отверстием и нагруженной равномерно по внутреннему краю радиуса R [1].

Приняв в нашем решении, что $R = 0$ из уравнения (6), получим целый ряд других частных случаев, которые весьма часто встречаются на практике в качестве элементов как строительных, так и машиностроительных конструкций.

Для нашей задачи соответствующие моменты, изгибающие плиту в радиальном и тангенциальном направлениях будут выражаться:

$$M_r = \frac{-D}{R^2} \left\{ C_2 \left[2(1 + \mu) \ln \frac{r}{R} + \mu + 3 \right] + \right.$$
$$\left. + \frac{C_1 R}{r^2} (\mu r - R) + 2C_4 (1 + \mu) \right\}, \qquad (7)$$

$$M_\Theta = \frac{-D}{R^2} \left\{ C_2 \left[2(1 + \mu) \ln \frac{r}{R} + 1 + 3\mu \right] + \right.$$
$$\left. + \frac{C_1 R}{r^2} (r - \mu R) + 2C_4 (1 + \mu) \right\}. \qquad (8)$$

Таблица 1

Нагрузка на плиту $P = 2\pi R p$ (в *кг*)	Значения прогибов $W \cdot 10^2$ при $r = R_s$ (в *мм*)							
	Плита с двумя ребрами		Плита с одним внутренним ребром		Плита с одним внешним ребром		Плита без ребер жесткости	
	теорет.	эксперим.	теорет.	эксперим.	теорет.	эксперим.	теорет.	эксперим.
0	0	0	0	0	0	0	0	0
32	4,3	4,1	5,8	5,78	7,33	7,1	10,19	10,76
64	8,61	8,6	11,58	10,92	14,67	14,1	20,38	21,94
100	13,46	13,6	18,09	17,2	22,92	22,2	31,85	32,00
128	17,22	17,2	23,151	22,0	29,34	29,3	40,77	44,0
160	21,53	21,3	28,94	28,0	36,67	36,0	50,96	55,0
200	26,91	26,2	36,173	35,9	45,84	44,5	63,7	63,6
300	40,4	38,4	54,26	54,6	68,76	67,1	95,55	94,8
400	53,8	51,0	72,35	74,0	91,67	89,2	127,4	126,8
500	67,3	63,2	90,43	92,0	114,59	110,3	159,25	158,3
600	80,7	76,0	108,52	111,4	137,51	138,0	191,1	190,7
700	94,2	88,2	126,61	130,0	160,43	153,1	222,95	—
800	107,65	101,00	144,7	148,4	183,35	175,6	254,8	—
900	121,11	113,20	162,78	—	206,27	194,5	286,65	—
1000	134,57	127,3	180,86	—	229,19	218,4	313,5	—

Таблица 2

Нагрузка на плиту $P = 2\pi Rp$ (в *кг*)	Значения относительных деформаций $\varepsilon^{\circ}_{\Theta} \cdot 10^{6}$							
	Плита с двумя ребрами		Плита с одним внутренним ребром		Плита с одним внешним ребром		Плита без ребер жесткости	
	теорет.	эксперим.	теорет.	эксперим.	теорет.	эксперим.	теорет.	эксперим.
0	0	0	0	0	0	0	0	0
32	35,66	33,31	41,64	40,71	87,36	83,17	108,25	105,18
64	71,32	66,62	83,28	80,90	174,72	165,64	216,5	210,74
100	111,43	106,60	130,42	129,2	273,00	262,73	338,28	335,35
128	142,63	134,57	166,55	163,11	349,44	337,85	433,00	427,89
160	178,29	167,88	208,19	202,25	436,80	420,60	541,26	530,23
200	222,87	213,18	260,24	258,4	546,00	529,72	676,57	670,69
300	334,30	319,78	390,36	386,2	819,00	798,51	1014,85	1006,04
400	445,73	426,37	520,48	515,4	1092,00	1057,43	1353,14	1341,39
500	557,17	532,96	650,60	643,3	1365,00	1323,37	1691,42	1702,54
600	668,60	639,55	780,72	775,1	1638,00	1587,84	2029,71	2141,06
700	780,04	746,15	910,84	902,43	1911,00	1869,16		
800	891,47	852,74	1040,96	1035,27	2184,00	—		

Максимальная деформация на поверхности кольцевых ребер жесткости легко подсчитать по формуле [4]:

$$\varepsilon_{\Theta}{}^{o} = \frac{-6h_1(M_{\Theta} - \mu M_r)}{Eh^3}. \tag{9}$$

§ 2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

Объектом экспериментального исследования являлась мартеновская листовая сталь марки 3 толщиной в 22 *мм* в отожженном состоянии. Размеры плиты в *мм*: $2R=55$, $2R_1=280$, $2R_2=60$, $h=6$, $h_1=18$. Прогибы измерялись на специально изготовленном стенде при помощи прогибомеров с двухмикронными индикаторами.

Для определения экспериментальным путем деформаций применялись как кольцевые, так и петлеобразные тензодатчики омического сопротивления.

Для нашей модели плиты мы имеем следующие данные: $E_1=E_2=E=2{,}0 \cdot 10^6$ *кг/см²*; $\mu=0{,}285$. Для сравнения опыты производились также над плитой с одним лишь внешним или внутренним ребром жесткости и над неподкрепленной кольцевой плитой.

В таблицах 1 и 2 приведены теоретические и экспериментальные значения максимальных прогибов и максимальных деформаций $\varepsilon^o{}_{\Theta}$ по внутреннему кольцу для разных ступеней нагрузок и для всех четырех плит.

Как явствует из таблиц 1 и 2, разница между экспериментальными и теоретическими значениями не превышает 7%.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. П. Тимошенко. Пластинки и оболочки. Гостехиздат (1948).
2. Г. Н. Савин и Н. П. Флейшман. Инженерный сборник. Изд АН СССР, т. VIII (1950).
3. Н. П. Флейшман. Ученые записки Львовского университета, т. XXII, сер. физико-математическая, вып. V (1953).
4. М. П. Шереметьев. Украинский математический журнал, т. V, № 1 (1953).

Г. Н. ГЕСТРИН

ОДНА ТЕОРЕМА О ЕДИНСТВЕННОСТИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО РЯДА

В 1928 г. Зигмунд доказал следующую теорему: пусть $\{\alpha_n\}$ — произвольная числовая последовательность, сходящаяся к нулю. Каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, можно указать такое множество E, мера которого не более ε и такое, что если на этом множестве сходится к нулю тригонометрический ряд $\sum_{1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$, коэффициенты которого стремятся к нулю быстрее, чем $\{a_n\}$, то тогда они равны нулю:

$$a_k = b_k = 0.$$

В настоящей заметке, опираясь на этот результат Зигмунда, мы доказываем такую теорему: пусть о двух последовательностях чисел $\{a_k\}$ и $\{b_k\}$ известно, что они убывают, как $\frac{1}{(\ln k)^r}$ $(r>1)$. Каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, можно указать такое открытое множество E, зависящее только от ε, что $|E| < \varepsilon$, и если тригонометрический ряд с коэффициентами a_k и b_k суммируем почти всюду на E к 0 методом Римана и там его частичные суммы равномерно ограничены суммируемой функцией, то для всех k: $a_k = b_k = 0$.

Лемма. Пусть на отрезке $[a, b]$ дана функция $\varphi(x)$, которая имеет на $[a, b]$ почти всюду Шварцеву производную $\varphi^{[\prime\prime]}(x)$, и пусть при достаточно малых h, $\left| \frac{\Delta_h^2 \varphi(x)}{4h^2} \right| < F(x) \in L$. Пусть далее $[p, q]$ — любой отрезок, лежащий внутри $[a, b]$ и в некоторых окрестностях концевых точек p и q существует непрерывная первая производная. Те же предположения делаются и относительно второй функции $\psi(x)$. Тогда справедливо равенство

$$\int_p^q \varphi^{[\prime\prime]}(\xi+x)\,\psi(\xi)\,d\xi = \varphi'(\xi+x)\,\psi(\xi) - \varphi(\xi+x)\cdot\psi'(\xi)\Big|_p^q + \int_p^q \varphi(x+\xi)\,\psi^{[\prime\prime]}(\xi)\,d\xi.$$

Доказательство этой леммы мы опускаем.

Для данного ряда $\sum_{1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$ строим функцию Римана:

$$\varphi(x) = -\sum_{1}^{\infty} \frac{a_k \cos kx + b_k \sin kx}{k^2}. \qquad (1)$$

Так как в силу предположения о скорости стремления к нулю коэффициентов a_k и b_k ряд $\sum_{1}^{\infty} \frac{-b_k \cos kx + a_k \sin kx}{k}$

сходится равномерно, то $\varphi(x)$ имеет повсюду непрерывную первую производную $\varphi'(x)$.

Далее на множестве E мы, очевидно, имеем:

$$\frac{\Delta_h^2\varphi(x)}{4h^2}=\sum_1^\infty(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\left(\frac{\sin kx}{kh}\right)^2=$$

$$=\sum_1^\infty S_k(x)\left\{\left(\frac{\sin(k-1)h}{(k-1)h}\right)^2-\left(\frac{\sin kh}{kh}\right)^2\right\};$$

$$\left|\frac{\Delta_h^2\varphi(x)}{4h^2}\right|<F(x)\cdot\sum_1^\infty\left|\left(\frac{\sin(k-1)h}{(k-1)h}\right)^2-\left(\frac{\sin kh}{kh}\right)^2\right|<$$

$$<F(x)\sum^\infty_{\rightarrow}\int\limits_{(k-1)h}^{kh}\left|\frac{d}{dz}\left(\frac{\sin z}{z}\right)^2\right|dz<F(x)\int\limits_0^\infty\left|\frac{d}{dz}\left(\frac{\sin z}{z}\right)^2\right|dz.$$

Берем теперь в теореме Зигмунда в качестве последовательности $\{\alpha_n\}$ последовательность $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ и строим множество Зигмунда меры, меньшей, чем $\frac{\varepsilon}{6}$, где ε наперед задано.

Покроем это множество системой интервалов $e_1, e_2, e_3, \ldots$ так, чтобы $\sum\limits_1^\infty \operatorname{mes} e_i<\frac{\varepsilon}{3}$. Будем считать, что интервалы занумерованы в порядке убывания длин. Растянем каждый из этих интервалов в три раза концентрически. Полученные таким образом интервалы обозначим через $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$. Утверждается, что всякое множество $\mathfrak{M}\subset\sum\limits_1^\infty\mu_i$ и имеющее ту же меру, что и $\sum\limits_1^\infty\mu_i$, есть искомое множество. Очевидно, что $\left|\sum\limits_1^\infty\mu_i\right|<\varepsilon$. Для доказательства каждый из интервалов e_i передвинем таким образом, чтобы центр его попал в начало координат. Так как они были занумерованы в порядке убывания длин, то получаем систему вложенных интервалов, $(-\alpha_i, +\alpha_i)=\bar{e}_i$, стягивающуюся к 0. Пусть функция $U(\xi)$ дважды непрерывно дифференцируема и обладает следующими свойствами:

$$\begin{cases} U(\pm\alpha_i) = \pm\alpha_i \\ U'(\pm\alpha_i) = 0. \end{cases}$$

К паре функций $\varphi(x+\xi)$ и $U(\xi)$ применим доказанную выше лемму:

$$\int\limits_{-\alpha_i}^{+\alpha_i} \varphi^{[''']}(\xi + x)\, U(\xi)\, d\xi =$$

$$= \varphi'(\xi + x)\, U(\xi)\Big|_{-\alpha_i}^{+\alpha_i} - \varphi(\xi + x)\, U'(\xi)\Big|_{-\alpha_i}^{+\alpha_i} + \int\limits_{-\alpha_i}^{+\alpha_i} \varphi(\xi + x)\, U''(\xi)\, d\xi.$$

При этом точка $x \in e_i$. Значит, точка $\xi + x \in \mu_i$. Но почти всюду на $\mu^i\ \varphi^{['']}(t) = 0$, то есть мы имеем:

$$\varphi'(\xi + x)\, U(\xi)\Big|_{-\alpha_i}^{+\alpha_i} - \varphi(\xi + x)\, U'(\xi)\Big|_{-\alpha_i}^{+\alpha_i} + \int\limits_{-\alpha_i}^{+\alpha_i} \varphi(x + \xi)\, U''(\xi)\, d\xi.$$

Для всякого $x \in e_i$. Важно заметить, что это же самое равенство выполняется и для всех $x \in e_k$, где $k < i$. Действительно, т. к. $\xi \in \bar{e}_i$, то оно принадлежит и всякому $\bar{e}_k$ в силу вложенности. Но тогда $\xi + x \in \mu_k$ и формула сохраняется. Далее имеем:

$$U''(0) = \lim_{\alpha_i \to 0} \frac{U'(+\alpha_i) - U'(-\alpha_i)}{2\alpha_i} = 0.$$

Деля обе части последнего равенства на $2\alpha_i$ и переходя к пределу при $\alpha_i \to 0$, найдем

$$\varphi'(x) + \lim_{\alpha_i \to 0} \frac{1}{2\alpha_i} \int\limits_{-\alpha_i}^{+\alpha_i} \varphi(x + \xi)\, U''(\xi)\, d\xi = 0.$$

$$\left| \frac{1}{2\alpha_i} \int\limits_{-\alpha_i}^{+\alpha_i} \Big\{ \varphi(x + \xi) - \varphi(x) \Big\}\, U''(\xi)\, d\xi + \right.$$

$$\left. + \varphi(x) \frac{1}{2\alpha_i} \int\limits_{-\alpha_i}^{+\alpha_i} U''(\xi)\, d\xi \right| = \left| \frac{1}{2\alpha_i} \int\limits_{-\alpha_i}^{+\alpha_i} \Big\{ \varphi(x + \xi) - \right.$$

$$-\varphi(x)\Big\} U''(\xi)\,d\xi\Big| < \varepsilon \max_{[-\alpha_i, +\alpha_i]} \Big| U''(\xi) \Big| .$$

Но так как $U''(\xi)$ непрерывна, а $U''(0) = 0$, то находим окончательно: $\varphi'(x) = 0$, когда $x \in \mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ Следовательно, равенство $\sum_1^\infty \frac{a_k \sin kx - b_k \cos kx}{k} = 0$ выполнено и на множестве Зигмунда. Отсюда, по теореме Зигмунда, $a_k = b_k = 0$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

А. Зигмунд. Contribution á l'uricité du développement trigonometrique. Math. Zeitschr., 24, 40—46 (1926).

Д. В. ГРИЛИЦЬКИЙ

ПРО КРУЧЕННЯ АНІЗОТРОПНИХ ВАЛІВ ЗМІННОГО ПЕРЕРІЗУ

Задача про кручення анізотропного вала, обмеженого поверхнею обертання, вперше була розв'язана С. Г. Лехніцьким [1] для часткового випадку циліндричної анізотропії: трансверсально-ізотропної. В монографії [2] Лехніцький поширює цей розв'язок на більш загальний випадок циліндричної анізотропії: всі радіальні площини є площинами пружної симетрії, і вісь анізотропії співпадає з геометричною віссю вала. При цих допущеннях тіло обертання залишається тілом обертання і в деформованому стані. Причому С. Г. Лехніцький розв'язує задачу за допомогою функції напружень.

В цій замітці ми будуємо розв'язок задачі при тих же допущеннях за допомогою другої функції, функції зміщень, а також наводимо один приклад.

Нехай маємо вал обертання з циліндричною анізотропією виду: вісь анізотропії співпадає з геометричною віссю вала, і всі радіальні площини є площинами пружної симетрії. На кінцях діють зусилля, які приводяться до взаємо зрівноважуючих скручуючих моментів M. Бічна поверхня вала вільна від зовнішніх напружень. Потрібно визначити напружений та деформований стан у валі, який перебуває під дією скручуючих моментів.

Віднесемо вал до циліндричної системи координат, сумістивши вісь Z з віссю вала. Рівняння узагальненого закону Гука в циліндричних координатах для цього випадку анізотропії запишуться таким чином:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_r &= a_{11}\sigma_r + a_{12}\sigma_\Theta + a_{13}\sigma_z + a_{15}\tau_{rz},\\
\varepsilon_\Theta &= a_{12}\sigma_r + a_{22}\sigma_\Theta + a_{23}\sigma_z + a_{25}\tau_{rz},\\
\varepsilon_z &= a_{13}\sigma_r + a_{23}\sigma_\Theta + a_{33}\sigma_z + a_{35}\tau_{rz},\\
\gamma_{rz} &= a_{15}\sigma_r + a_{25}\sigma_\Theta + a_{35}\sigma_z + a_{55}\tau_{rz},\\
\gamma_{\Theta z} &= a_{44}\tau_{\Theta z} + a_{46}\tau_{\Theta r},\\
\gamma_{\Theta r} &= a_{46}\tau_{\Theta z} + a_{66}\tau_{\Theta r}.
\end{aligned} \tag{1}
$$

Приєднаємо до рівнянь узагальненого закону Гука рівняння рівноваги суцільного середовища в циліндричних координатах при відсутності об'ємних сил:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{\Theta r}}{\partial\Theta} + \frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\Theta}{r} = 0,\\
&\frac{\partial\tau_{\Theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_\Theta}{\partial\Theta} + \frac{\partial\tau_{\Theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\Theta}}{r} = 0,\\
&\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{\Theta z}}{\partial\Theta} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0.
\end{aligned} \tag{2}
$$

Так само, як і у випадку ізотропного тіла припустимо, що

$$U_r = 0,\ W = 0,\ U_\Theta = r\varphi(r, z), \tag{3}$$

де U_r — зміщення в радіальному напрямку, W — зміщення в напрямку осі z, U_Θ — тангенціальне зміщення; функція $\varphi(r, z) = \frac{U_\Theta}{r}$ називається функцією зміщень.

Із співвідношень

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_r = \frac{\partial U_r}{\partial r},\ \varepsilon_\Theta = \frac{1}{r}\frac{\partial U_\Theta}{\partial\Theta} + \frac{U_r}{r},\ \varepsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z},\\
&\gamma_{rz} = \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U_r}{\partial z},\ \gamma_{\Theta z} = \frac{\partial U_\Theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial\Theta},\\
&\gamma_{r\Theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial U_r}{\partial\Theta} + \frac{\partial U_\Theta}{\partial r} - \frac{U_\Theta}{r},
\end{aligned}
$$

враховуючи (3), одержуємо:

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_r = \varepsilon_\Theta = \varepsilon_z = \gamma_{rz} = 0,\\
&\gamma_{\Theta z} = r\frac{\partial\varphi}{\partial z},\quad \gamma_{r\Theta} = r\frac{\partial\varphi}{\partial r}.
\end{aligned} \tag{5}
$$

Із рівнянь (1), при враховуванні (5), випливає, що $\sigma_r = \sigma_\Theta = \sigma_z = \tau_{rz} = 0$; відмінними від нуля будуть лише дві складові напруження $\tau_{\Theta z}$ і $\tau_{r\Theta}$. Три рівняння рівноваги (2) зводяться до одного:

$$\frac{\partial \tau_{r\Theta}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{\Theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\Theta}}{r} = 0. \tag{6}$$

Із (5) і останніх двох співвідношень (1) знаходимо:

$$\tau_{\Theta z} = \frac{r}{a_{44}a_{66} - a^2_{46}} \left(a_{66} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - a_{46} \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right),$$

$$\tau_{r\Theta} = \frac{r}{a_{44}a_{66} - a^2_{46}} \left(a_{44} \frac{\partial \varphi}{\partial r} - a_{46} \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right). \tag{7}$$

Підставляючи вирази для напружень (7) в рівняння рівноваги (6), одержимо рівняння, якому задовольняє функція зміщень:

$$a_{44} r \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} - 2a_{46} r \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial z} + a_{66} r \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + 3a_{44} \frac{\partial \varphi}{\partial r} -$$

$$- 3a_{46} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0. \tag{8}$$

Умова на бічній поверхні запишеться:

$$\tau_{\Theta z} \cos(n, z) + \tau_{r\Theta} \cos(n, r) = 0. \tag{9}$$

Але оскільки

$$\cos(n, r) = \frac{dz}{ds}, \ \cos(n, z) = -\frac{dr}{ds},$$

(де s — дуга меридіана), то із співвідношення (9) отримуємо:

$$\frac{dz}{dr} = \frac{a_{66} \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} - a_{46} \dfrac{\partial \varphi}{\partial r}}{a_{44} \dfrac{\partial \varphi}{\partial r} - a_{46} \dfrac{\partial \varphi}{\partial z}}. \tag{10}$$

Як бачимо, задача звелася до визначення функції $\varphi(r, z)$, яка задовольняє рівнянню (8) і граничній умові (10).

Введемо нові змінні ϱ і ζ, які зв'язані з r і z залежностями [2]:

$$\varrho = r, \ \zeta = \frac{z + mr}{\sqrt{n^2 - m^2}}, \tag{11}$$

де

$$n = \sqrt{\frac{a_{66}}{a_{44}}}, \ \ m = \frac{a_{46}}{a_{44}}. \tag{12}$$

Із (11) знаходимо обернені співвідношення:

$$r = \varrho,\ z = \sqrt{n^2 - m^2}\ \zeta - m\varrho. \tag{13}$$

В нових змінних функція буде задовольняти рівнянню:

$$\varrho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varrho^2} + 3 \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} + \varrho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} = 0 \tag{14}$$

і граничній умові:

$$\frac{d\zeta}{d\varrho} = -\frac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial \zeta}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial \varrho}}. \tag{15}$$

Рівняння (14) і (15) відповідають задачі про кручення ізотропного стрижня.

Задачу можна розв'язувати як прямим, так і напівоберненим методом. При прямому методі розв'язання функція $\varphi(\varrho, \zeta)$ повинна бути визначена в області, яка одержується з області меридіонального перетину заданого анізотропного вала, шляхом афінного перетворення (11).

При розв'язанні задачі напівзворотним методом ми задаємося яким-небудь розв'язком рівняння (14), а із граничної умови (15) з відомою правою частиною знаходимо контур вала, який відповідає заданому розв'язку.

Зауважимо також, що при напівзворотному методі розв'язування задачі відповідний анізотропний вал може не бути тілом обертання, якщо ізотропний вал був тілом обертання. Отже, для того, щоб тіло обертання залишилося тілом обертання і після деформації, необхідно покласти

$$m = 0, \tag{16}$$

тобто

$$a_{46} = 0. \tag*{(16)^1}$$

Умова $(16)^1$ вказує на те, що крім радіальних площин пружної симетрії, повинні існувати площини пружної симетрії і нормальні до осі вала, тобто матеріал вала повинен бути ортотропним.

Отже, відповідний анізотропний вал, як це випливає із співвідношень (13) при умові (16), буде того ж поперечного перетину, що і ізотропний вал, але видовжений або вкорочений по осі ζ в n число разів.

Наведемо приклад.

Візьмемо розв'язок рівняння (14) у вигляді [3]:

$$\varphi = Al^{p\zeta} \varrho^{-1} J_1(q\varrho), \tag{17}$$

де q — довільна константа, яка вибирається так, що $(q\zeta)$

і $(q\varrho)$ — безрозмірні координати, $J_1(q\varrho)$ — функція Бесселя першого порядку першого роду, A — довільна константа.

Графічно інтегруючи граничну умову (15), Н. Рейснер і Г. Венагель одержують графік твірної кривої ізотропного вала, коли $(q\varrho)$ змінюється в границях від 0 до 3,832.

Функцію зміщень для відповідного оротропного вала ми одержимо, заміняючи у виразі (17) ζ на $\frac{z}{n}$. Твірна крива анізотропного вала, як це випливає з наведених міркувань, буде мати ту ж форму, що й твірна крива ізотропного вала, якщо тільки ми замінимо безрозмірну координату $(q\zeta)$ новою координатою $\left(\frac{qz}{n}\right)$, а $(q\varrho)$ на (qr).

Маючи функцію зміщень, зміщення і напруження визначаться за вищенаведеними формулами:

$$\varphi = Al^{\frac{qz}{n}} r^{-1} J_1(qr),$$

$$U_\theta = Ae^{\frac{qz}{n}} J_1(qr), \tag{18}$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{Aq}{a_{44}\, n} e^{\frac{qz}{n}} J_1(qr),$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{Aq}{a_{66}} e^{\frac{qz}{n}} J_2(qr)$$

Константа A визначається з тієї умови, що момент дотичних зусиль у будь-якому поперечному перерезі відносно вісі z повинен бути рівний моменту M, який прикладений до кінців вала:

$$A = \frac{Mq^2\, n\, a_{44}}{11{,}8\pi}. \tag{19}$$

ЛІТЕРАТУРА

1. С. Г. Лехницкий. Симметричная деформация и кручение тела вращения с анизотропией частного вида, Прикладная математика и механика, т. IV, в. 3 (1940).

2. С. Г. Лехницкий. Теория упругости анизотропного тела (1950).

3. H. J. Reissner and &. G. J. Wennagel. Iorsion of Nancylindrical Shafts of Circular Cross Section, Journal of Applied Mechanics, sept., vol. 17, № 3 (1950).

В. Я. СКОРОБОГАТЬКО

АНАЛОГ МЕТОДА ПРИБЛИЖЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ АКАДЕМИКА С. А. ЧАПЛЫГИНА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В работе [3] было установлено, что первая краевая задача, поставленная для эллиптического уравнения

$$Lu = \sum_{k,\,l=1}^{n} a_{kl}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l} + \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + cu = 0 \qquad (1)$$

разрешима в данной области D, если только в этой области могут быть определены функции $B_1, \ldots, B_n$, удовлетворяющие неравенству

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & A_1 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & A_n \\ A_1 & \cdots & A_n & R \end{vmatrix} \geqslant 0, \text{ где } \quad A_l = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial a_{kl}}{\partial x_k} - b_l + B_l, \quad R = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial B_i}{\partial x_i} - C \qquad (2)$$

Данные функции предполагались достаточно гладкими, а функции $B_1, \ldots, B_n$, вообще говоря, непрерывными с кусочно непрерывными первыми производными.

Коэффициент C не предполагался неположительным.

В настоящей заметке устанавливается связь между результатами, изложенными в [3] и результатами С. А. Чаплыгина [1]. Обозначим через C_2 класс функций дважды непрерывно дифференцируемых в D с непрерывными первыми производными в $\overline{D}$.

Т е о р е м а 1. Если в конечной области D с границей S типа Ляпунова оператора Lu удовлетворяет неравенству $Lu < 0$, $u/s = 0$, $u \in C_2$ и в этой области выполняется неравенство (2), то в области D функция $u \geqslant 0$. Считаем коэффициенты a_{kl} непрерывно дифференцируемыми, b_j, C — непрерывными. Отметим основное для доказательства теоремы 1.

Предположим, что в некоторой точке $y \in D$ функция $u(y) < 0$, но тогда, вследствие непрерывности $u < 0$ и в некоторой области $D^1 \in D$, содержащей точку y, и на границе S^1 области D^1 функция $u = 0$. Допустим сначала, что граница S^1 области D^1 столь гладка, что возможно применять формулу

Остроградского. Составим выражение uLu и проинтегрируем его по частям, предварительно положив

$$c = c_o + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial B_j}{\partial x_j}.$$

Получим

$$\int \underset{D'}{(n)} \int u\, Lud\tau = -\int (n \underset{S'}{-} 1) \int upud\sigma -$$

$$-\int \underset{D'}{(n)} \int A \left(u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) d\tau, \qquad (3)$$

$A\left(u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$ — квадратическая форма, неотрицательная из-за условия (2). Интеграл $\int (n \underset{S'}{-} 1) \int upud\sigma = 0$, так как $u/s' = 0$. Левая часть формулы (3) строго положительна, а правая неположительна. Полученное противоречие доказывает теорему.

Доказательство теоремы 1 можно уточнить, если провести предыдущее рассуждение для области с кусочно гладкой границей, близкой к S'. Уточнение доказательства проводится на основании следующих соображений.

Из условия $Lu < 0$ следует, что какая-либо произвольная $\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l} \neq 0$ в точках $y \in S'$, где $\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Множество точек $y \in S'$, в которых $\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0$, $i = 1, \ldots, n$, обозначим через G. Далее, в некоторой окрестности точки $y \in G$ все точки $x \in G$ расположены на гладкой поверхности $x_k = f_k(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n)$ (по теореме о неявной функции) нетрудно заметить, что каждую точку $y \in G$ можно заключить в область $F_y^{\varepsilon\eta}$, определяемую неравенствами

$$f_k - \varepsilon \leqslant x_k \leqslant f_k + \varepsilon,$$

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_{k-1} - y_{k-1})^2 + (x_{k+1} - y_{k+1})^2 + \ldots + (y_n - x_n)^2} \leqslant \eta;$$

$$\varepsilon,\ \eta = \text{const}.$$

По лемме Бореля множество G помещается в конечном числе областей $F_y^{\varepsilon\eta}$. Каждая область $F_y^{\varepsilon\eta}$ разбивается плоскостями, перпендикулярными к координатным осям ox_i, $i = 1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n$ на конечное число частей $f_y^{\varepsilon\eta}$; множество G можно заключить в замыкание области $T''' = \sum_y f_y^{\varepsilon\eta}$, состоящей из тех областей $f_y^{\varepsilon\eta}$, которые содержат точки $y \in G$. Ясно, что область $D'' = D' - T'''$ имеет кусочно гладкую границу.

Нетрудно увидеть теперь, что величина $\left|\int(n - 1)\int\limits_{S''} u\, pud\sigma\right|$ может принять сколь угодно малое значение при достаточно большом числе областей $f_y^{\varepsilon\eta}$ и достаточно малом ε. Теорема 1 обобщает теорему Чаплыгина [1, стр. 501]. Неравенство (2) назовем защитным.

Заметим, что если (1) самосопряженное уравнение и коэффициент $C < 0$ в области D, то функции $B_1 = \ldots = B_n \equiv 0$ удовлетворяют неравенству (2) и, следовательно, теорема 1 имеет место.

Последнее замечание объясняет слова С. А. Чаплыгина, относящиеся к этому случаю: «Любопытно отметить, что никакого ограничения, вроде предела приложимости, который появляется при применении основной теоремы, на этот раз мы не встречаем» [1, стр. 503].

Предел приложимости теоремы 1 как раз возникает тогда, когда коэффициент C способен принимать и положительные значения.

Следствие теоремы 1. Если $f_1 = Lu_1 > Lu_2 = f_2$, $\underset{i=1,2}{u_i} \in C_2$ и $u_1 = u_2/_s$, то везде в области D функция $u_1 \leqslant u_2$. При большей гладкости данных функций (эти условия перечислены в [3]) условие $Lu<0$ в формулировке теоремы 1 можно ослабить, заменив его условием $Lu \leqslant 0$, при этом утверждение теоремы сохраняется.

Используя идею К. В. Задираки [2], укажем метод приближенного решения 1-й краевой задачи, поставленной для уравнения $\Delta u + c(x_1, \ldots, x_n) u = 0$, предполагая соответствующее защитное неравенство выполненным. Пусть известны такие функции φ_1 и ω_1, принадлежащие классу C_2, что $\Theta_1 = \Delta\omega_1 + C\omega_1 \leqslant 0$ и $f_1 = \Delta\varphi_1 + C\varphi_1 \geqslant 0$, $\varphi_1 = \omega_1 = f$ на границе S области D. По теореме 1 везде в D выполняется неравенство $\varphi_1 \leqslant u \leqslant \omega_1$. Введем вспомогательные функции ξ и η по формулам $\varphi_1 + \eta = u$, $u + \xi = \omega_1$. Рассмотрим уравнения

$$\Delta\eta_1 + m\eta_1 + f_1 = 0, \qquad \eta_1/s = 0, \quad m = \min_D C$$
$$\Delta\xi_1 + m\xi_1 - \Theta_1 = 0, \qquad \xi_1/s = 0.$$

По теореме 1 заключаем, что $\eta \geqslant \eta_1 \geqslant 0$, $\xi \geqslant \xi_1 \geqslant 0$. Поэтому

$$\varphi_1 \leqslant \varphi_2 \leqslant u \leqslant \omega_2 \leqslant \omega_1,$$

где

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \eta_1, \ \omega_2 = \omega_1 - \xi_1$$

функции φ_2 и ω_2 принимаем за вторые приближения и решения.

Вообще n-ые приближения определяются формулами

$$\varphi_n = \varphi_{n-1} + \eta_{n-1} = \varphi_1 + \sum_{i=1}^{n-1} \eta_i,$$

$$\omega_n = \omega_{n-1} - \xi_{n-1} = \omega_1 - \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i.$$

Функции η_{n-1} и ξ_{n-1} —решения краевых задач

$$\Delta\eta_{n-1} + m\eta_{n-1} + f_{n-1} = 0, \quad \eta_{n-1}/s = 0$$

где

$$f_{n-1} = \Delta\varphi_{n-1} + c\varphi_{n-1} \geqslant 0$$

$$\Delta\xi_{n-1} + m\xi_{n-1} - \Theta_{n-1} = 0, \quad \xi_{n-1}/s = 0 \quad \Theta_{n-1} = \Delta\omega_{n-1} + c\omega_{n-1} \leqslant 0.$$

Между приближениями искомого решения выполняются неравенства

$$\varphi_1 \leqslant \varphi_2 \leqslant \ldots \leqslant \varphi_n \leqslant u \leqslant \omega_n \leqslant \omega_{n-1} \leqslant \ldots \leqslant \omega_1,$$

Если в области D выполняется неравенство

$$\frac{1}{\max\limits_{(x)\in D} \int (n) \int\limits_{D} G_1(x, \xi)\, d\xi} > M, \; M = \max_D |C|,$$

в котором $G_1(x, \xi)$ — функция Грина оператора Лапласа для первой краевой задачи в области D, то можно доказать и сходимость вышеуказанного процесса. В этом случае оценка быстроты сходимости следующая:

$$|\varphi_n - \omega_n| \leqslant p_2 \frac{(M-m)^{n-1} R^{n-1}}{(1-|m|R)^{n-1}(1-MR)}, \; m = \min C$$

$$p_2 = \max_D |f_1 - \Theta_1|. \quad R = \max_{(x)\in D} \int (n) \int\limits_{D} G(x, \xi)\, d\xi, \tag{4}$$

Предложенный метод применим как к обыкновенным уравнениям второго порядка, так и к общему эллиптическому уравнению в частных производных. В последнем случае η_i и ξ_i являются решениями краевых задач

$$\sum_{k,l=1}^{n} a_{kl} \frac{\partial^2 \eta_i}{\partial x_k \partial x_l} + 2\sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial \eta_i}{\partial x_j} + m\eta_i = f_i, \; \eta_i/s = 0$$

$$\sum_{\kappa,l=1}^{n} a_{kl} \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial x_k \, \partial x_l} + 2 \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial \xi_j}{\partial x_j} + m\xi_i = \Theta_i, \; \xi_i/s = 0.$$

Этот метод применим для приближенного нахождения решений и других краевых задач для эллиптического уравнения, только границы его применимости определяются сложнее.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. А. Чаплыгин. Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. М. (1919). Избранные труды по механике и математике. Гостехиздат (1954).
2. К. В. Задирака. Приближенное интегрирование линейных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами методом С. А. Чаплыгина. Украинский математический журнал, т. IV, № 3 (1952).
3. В. Я. Скоробогатько. Единственность и существование решений некоторых краевых задач для дифференциального уравнения эллиптического типа второго порядка. Автореферат диссертации. Львов (1954).

А. Н. КОСТОВСКИЙ

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ ОДНИМ ЦИРКУЛЕМ (С УСЛОВИЕМ, ЧТО ВСЕ ОКРУЖНОСТИ ПРОХОДЯТ ЧЕРЕЗ ОДНУ И ТУ ЖЕ ТОЧКУ)

Условимся окружность с центром в точке O и радиусом равным $AB = r$ обозначать символом (O, AB) или (O, r). Вместо символа (O, OB) будем писать (O, B). Кроме того, условимся считать законной для циркуля следующую операцию: через данную точку A провести окружность радиуса a, центр которой лежит на данной кривой L. Для этого делаем раствор циркуля равным a, ставим острие карандаша в точку A, затем, не изменяя раствора циркуля, устанавливаем вторую ножку так, чтобы острие иголки попало в некоторую точку N данной кривой L. Окружность (N, a) — искомая.

Теперь нетрудно решить следующую задачу: построить отрезок в 3^k $(k = 1, 2,...)$ раз больше данного отрезка AB так, чтобы все окружности в этом построении проходили через точку A. Для построения описываем окружность (B, A), делаем раствор циркуля равным AB и ставим острие карандаша циркуля в точку A; острие иголки определит на окружности (B, A) сначала точку E [описываем при этом окружность $(E,$

AB)], а затем точку E_1 [описываем теперь окружность (E_1, AB)]; проведенные окружности пересекут окружность (B, A) в точках C и C_1. Точка B_1 пересечения окружностей (C, AB) и (C_1, AB) — искомая. Отрезок $AB_1 = 3AB$. Аналогично построим отрезок $AB_2 = 3\ AB_1 = 9\ AB$ и т. д. $AB_k = 3^k AB$. Все окружности, проведенные в этом построении, проходят через точку A.

Пусть дана окружность инверсии (O, r) и точка X. Если $OX > \frac{r}{2}$, то с помощью одного циркуля можно построить точку X^1, инверсную точке X, с условием, что все окружности проведенного построения будут проходить через одну точку — центр инверсии O*. Если же $OX \leqslant \frac{r}{2}$, то приходится предварительно строить точку X_1 с условием $OX_1 = nOX > \frac{r}{2}$. Для того чтобы и в этом случае все окружности построения проходили через центр инверсии, будем вместо точки X_1 разобранным выше способом строить точку $У_1$ с условием, что $OУ_1 = 3^к OX > \frac{r}{2}$.

Теперь нетрудно усмотреть, что в построении одним циркулем окружности, инверсной данной прямой, и в построении точек прямой, инверсной данной окружности, проходящей через центр инверсии O, все окружности будут проходить через центр инверсии O.**

Я. Штейнер показал, что все задачи на построение, разрешимые циркулем и линейкой, могут быть решены и одной линейкой, если в плоскости чертежа дана постоянная окружность (O, R) и ее центр.***

Предположим теперь, что данная задача на построение решена методом Штейнера. В результате этого построения в плоскости чертежа получим фигуру $Ф$, состоящую, кроме одной окружности (O, R), только из прямых линий. Если теперь за окружность инверсии взять произвольную окружность (O, r) с центром, не лежащим ни на одной из прямых и на окружности (O, R) фигуры $Ф$, то ей инверсная фигура $Ф'$ будет состоять только из окружностей, за исключением двух [окружности инверсии (O, r) и окружности, инверсной вспомогательной (O, R)], проходящих через одну и ту же точку — центр инверсии O.

Возьмем теперь окружность инверсии так, чтобы она пересекала вспомогательную окружность в построении Штейнера под прямым углом. Для этого на вспомогательной окружности (O, R) берем две произвольные точки K и M и проводим окружность (M, K), пересекающую окружность (O, R)

---

* См. [1], § 20.

** См. [1], § 20.

*** См. [2].

в точке P; если теперь описать окружность (K, P) в пересечении с окружностью (M, K), получим точку O; как нетрудно доказать, (O, K) пересекает окружность (O, R) под прямым углом. Можно считать, что точка O не лежит ни на одной из прямых фигуры Φ. В противном случае, изменяя положение точек K и M, следует построить другую точку O. Примем окружность (O, K) за окружность инверсии и обозначим ее через (O, r) $(OK=r)$. Построим фигуру Φ', инверсную фигуре Φ построения Штейнера; окружность (O, R) сама себе инверсна, так как пересекает окружность инверсии под прямым углом, следовательно, при построении фигуры Φ' придется строить только образы (окружности, проходящие через центр инверсии O), инверсные прямым фигуры Φ.

Следовательно, каждую геометрическую задачу на построение, разрешимую с помощью циркуля и линейки, можно всегда решить одним циркулем так, что не только окружности фигуры Φ', а *все* окружности, в том числе и окружности, с помощью которых производится построение фигуры Φ', будут проходить через *одну* и ту же точку плоскости O; исключение составляют только две окружности (окружности инверсии (O, r) и вспомогательная окружность (O, R) построения Штейнера), которые не проходят через точку O. Заметим, что окружности (M, K) и (K, P), которые проводились для построения центра инверсии O, также проходят через точку O.

Пусть некоторая задача на построение решена методом Штейнера; в результате получим фигуру Φ, состоящую, кроме одной окружности (O, R), только из прямых линий. Если за окружность инверсии принять вспомогательную окружность (O, R) и построить фигуру Φ', инверсную фигуре Φ, то получим фигуру, состоящую из *окружностей* и *прямых линий**, причем *все* эти прямые и окружности, за исключением окружности (O, R), будут проходить через одну и ту же наперед заданную точку O.

Таким образом, каждую геометрическую задачу на построение можно всегда решить *циркулем* и *линейкой* так, что *все* окружности и прямые этого построения, за исключением одной окружности [окружности инверсии $(O\ R)$], будут проходить через одну и ту же произвольно выбранную точку плоскости O.

* А. Адлер берет вспомогательную окружность (O, R) за окружность инверсии и утверждает: «Не только возможно, как это показал еще Маскерони, решить все геометрические конструктивные задачи второй степени при исключительном пользовании циркулем, но можно даже поставить еще условие, *чтобы все входящие в построение окружности, за исключением одной из них, проходили через одну и ту же произвольно выбранную точку*». Ошибочность этого утверждения следует из того, что все задачи на построение, разрешимые циркулем и линейкой, решить невозможно одной линейкой, если центр вспомогательной окружности O неизвестен, т. е., если через центр O вспомогательной окружности не проводить прямых линий, которые, как известно, сами себе инверсны, т. е. будут принадлежать фигуре Φ'.

Допустим теперь, что при решении геометрических задач на построение одним циркулем допускается однократное употребление линейки (или положим, что в плоскости чертежа имеется начерченная линейкой прямая линия AB). Возьмем произвольную окружность (O, r), центр O которой не лежит на прямой AB, за окружность инверсии и построим окружность (O', R), инверсную данной прямой AB. $R = OO'$, так как окружность (O', R) проходит через центр инверсии O. Решение любой задачи на построение методом Штейнера относительно окружности (O', R) даст фигуру Φ, состоящую только из прямых линий; ей инверсная фигура Φ' будет состоять из одних окружностей, проходящих через одну и ту же точку O. Конечно, при решении задачи методом Штейнера мы предполагаем, что ни одна из прямых, не прошла через точку O, лежащую на вспомогательной окружности (O', R); в противном случае за окружность инверсии (O, r) следует взять другую окружность. Если прямая линия AB не начерчена, а допускается однократное употребление линейки, то берем в плоскости произвольную окружность (O', R) в качестве вспомогательной и решаем задачу методом Штейнера. Затем на этой окружности берем произвольную точку O с одним только условием — чтобы она не лежала ни на одной из прямых фигуры Φ построения Штейнера. Радиусом $(r < 2R)$ описываем окружность, которая пересечет данную окружность (O', R) в точках A и B. Берем линейку и проводим прямую AB, которая будет инверсна окружности (O', R), если (O, r) принять за окружность инверсии. Дальше строим фигуру Φ', инверсную фигуре Φ.

Таким образом, если в плоскости чертежа начерчена прямая линия (допускается однократное употребление линейки), то *все* задачи на построение, разрешимые циркулем и линейкой, можно решить и одним циркулем, с условием, что все окружности этого построения, за исключением одной [окружности инверсии (O, r)] будут проходить через одну и ту же точку плоскости O. (Некоторая аналогия результату Штейнера для построений одной линейкой с постоянной окружностью).

Пусть, наконец, в плоскости чертежа задана (начерчена) фигура Ψ, состоящая только из прямых линий и отрезков (например, две параллельные прямые линии, или параллелограмм, или квадрат, или правильный многоугольник и т. д.). Предположим теперь, что какую-нибудь геометрическую задачу на построение мы решили методом Штейнера, приняв фигуру Ψ в качестве вспомогательной; тогда получим некоторый геометрический образ, некоторую фигуру Φ, состоящую только из прямых линий. Данная фигура Ψ будет частью фигуры Φ.

Возьмем произвольную окружность (O, r) с единственным условием, что центр O этой окружности не лежит ни на одной из прямых фигуры Φ, и примем ее за окружность инверсии. Строим фигуру Φ', инверсную фигуре Φ. Фигура Φ' будет состоять только из окружностей, проходящих через одну и ту же точку — центр инверсии O.

Итак, если в плоскости чертежа задана (начерчена) некоторая фигура, состоящая из прямых линий и отрезков, то все задачи на построение, которые можно решить методом Штейнера, принимая эту фигуру в качестве вспомогательной, всегда можно решить одним циркулем так, что *все* окружности, за исключением одной — окружности инверсии, будут проходить через одну и ту же произвольную точку плоскости O.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Адлер. Теория геометрических построений, Одесса (1924).
2. Я. Штейнер. Геометрические построения, выполняемые с помощью прямой линии и неподвижного круга, М. (1939).

А. Л. ГАРКАВИ

О КВАЗИАНАЛИТИЧЕСКИХ (B) ФУНКЦИЯХ

1. Обозначим через $B\{n_k\}$ класс квазианалитических (B) в смысле С. Н. Бернштейна [1] функций, для которых существует такая последовательность целых чисел $\{n'_k\}$, что

$$\frac{1}{A} < \frac{n_k}{n'_k} < A, \; (A = \text{const.};\; k = 1, 2, \ldots),$$

и

$$\lim_{k \to \infty} \sqrt[n'_k]{E_{n'_k}(f_1[a, b])} = \varrho < 1, \tag{1}$$

где $E_{n'_k}(f_1[a, b])$ — наилучшее приближение функции $f(x)$ многочленами степени n'_k на отрезке $[a, b]$, a $\{n_k\}$ — фиксированная последовательность целых чисел.

Классом квазианалитических $(Д)$ (в смысле Данжуа) функций назовем такую их совокупность, что если $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — любые принадлежащие ей функции, то их разность $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ также является функцией квазианалитической $(Д)$, т. е. удовлетворяет условию:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{M_n}} = \infty; \; M_n = \max_{[a, b]} |f^{(n)}(x)|. \tag{2}$$

Теорема: а) Для того, чтобы все функции класса $B\{n_k\}$ являлись квазианалитическими (Д), необходимо и достаточно, чтобы существовала такая четная весовая, нормально возрастающая функция $F(x)$, что выполнимы неравенства —

$$\ln F(n_{k+1}) \leqslant n_k \quad (k = 1, 2, \ldots), \qquad \text{(A)}$$

б) При этом все классы $B\{n_k\}$, для которых (A) выполнимо при одной и той же функции $F(x)$, образуют один класс квазианалитических (Д) функций.

Доказательство опирается на теорему С. Н. Бернштейна [2, 3], согласно которой ряд (2) расходится тогда и только тогда, когда существует такая четная весовая нормально возрастающая функция $F(x)$, что

$$E_n(f) \leqslant \frac{1}{F(n)} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Следствие I: Если $\frac{n_{k+1}}{n_k} \leqslant \ln n_k \ldots \ln_p n_k$, ($\ln_p n_k = \ln \ln_{p-1} n_k$; $p \geqslant 1$), то класс $B\{n_k\}$ квазианалитичен (D). Например, квазианалитичными (Д) являются классы, определяемые следующими последовательностями:

1) $n_k = k'$; 2) $n_k = k^k$; 3) $n_{k+1} = [n_k \ln n_n]$ $(n_1 = 3)$ и т. д. (здесь всюду $n_{k+1} \leqslant n_k \ln n_k$).

Следствие II: Если две квазианалитические (B) функции, принадлежащие совокупности классов $B\{n_k\}$, для которых условие (A) выполняется при фиксированной функции $F(x)$, совпадают на произвольно малой части отрезка, то они тождественны на всем отрезке.

Следствие III: Не существует неоднозначной квазианалитической функции [1], все ветви которой принадлежат классам $B\{n_k\}$, для которых соотношение (A) выполнимо при одной и той же функции $F(x)$. Т. е. последовательности $\{n_k\}$ определяющие классы, которым принадлежат ветви, не могут быть все слишком частыми (например, такими, чтобы для всех было $n_{k+1} \leqslant n_k \ln n_k$).

Следствие IV: Если $E_{n_k}(f) = e^{-\frac{cn_k}{\ln n_k \ldots \ln_p n_k}}$

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \leqslant \ln_{p+1} n_k \ldots \ln_{p+1} n_k \qquad (q,s \leqslant 1)$$

и $f(x) = 0$ на части отрезка, то $f(x) \equiv 0$ на всем рассматриваемом отрезке.

2. Если квазианалитическую (B) на отрезке $[ab]$ функцию $f(x)$ можно продолжить на отрезок $[bc]$ так, что полученная

функция будет допускать на отрезке $[ac]$ равномерное приближение многочленами степеней n_k $(k = 1, 2, \ldots)$, сходящимися квазианалитически к $f(x)$ на отрезке $[ab]$, то такое продолжение, называемое псевдоаналитическим [1], однозначно определяется в некоторой окрестности точки b.

Теорема: а) Любая непрерывная на $[ab]$ функция $\varphi(x)$ (в том числе и тождественный 0) может быть псевдоаналитическим продолжением некоторой квазианалитической на $[bc]$ функции.

б) При этом, если функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условию Липшица, она может быть псевдоаналитическим продолжением квазианалитической функции, принадлежащей любому заданному классу $B\{n_k\}$, для которого

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln n_{n+1}}{n_k} = \alpha > 0.$$

Из теоремы вытекает, в частности, отрицательный ответ (для случая достаточно редкой последовательности $\{n_k\}$) на упоминаемый С. Н. Бернштейном вопрос [1] о возможности однозначного восстановления квазианалитической функции по ее псевдоаналитическому продолжению.

Отметим попутно, что можно построить пример функции, допускающей счетное число различных псевдоаналитических продолжений (относительно разных последовательностей).

3. Пусть $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[n_k]{En_k(f,[ab])} = 0$, а $\varphi(x)$ — монотонная, стремящаяся к 0 вместе с x, функция, такая, что

$$\varphi\left(\max_{k\geqslant k_0} A \sqrt{En_k(f)}\right) \leqslant C\, En_{k_0}(f) \ (A > 1,\ C > 0 \text{ — постоянные}).$$

Пусть, далее, F — замкнутое счетное множество на отрезке $[ab]$ и Δx — смежный к F интервал. Положим

$$P_F(x_0\, x) = \max_{\Delta x} |\Delta x \cdot [x_0\, x]|.$$

При этих обозначениях имеет место:

Теорема: Если $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[n_k]{E_{n_k}(f,[ab])} = 0$ и $|f(x)| \leqslant \varphi(|x_0 - x|)$ на $F\cdot[x_0\, x]$, причем $\varrho_F(x_0\, x) \leqslant \varphi(|x_0 - x|)$ $(|x_0 - x| < \delta)$, то $f(x) \equiv 0$ на отрезке $[ab]$.

Этот результат частично содержится в работе С. Н. Мергеляна [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Н. Бернштейн. Аналитические функции вещественной переменной, их возникновение и пути обобщений. Собр. сочинений, т. I, 1952.

2. С. Н. Бернштейн. О весовых функциях. Собр. сочинений, т. II, 1954.

3. С. Н. Бернштейн. О связи квазианалитических функций с весовыми функциями. Собр. сочинений, т. II, 1954.

4. С. Н. Мергелян. Некоторые вопросы конструктивной теории функций. Труды института им. В. А. Стеклова, т. 37, 1951.

Л. М. ЗОРІЙ

ДОСТАТНІ УМОВИ СТІЙКОСТІ В ЦІЛОМУ ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

В роботі розглядається система рівнянь збуреного руху виду:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= F_{11}(x, y) + F_{12}(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= F_{21}(x, y) + F_{22}(x, y). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Наведені достатні умови асимптотичної стійкості очевидного розв'язку $x = y = 0$ в цілому. Методом побудови функції Ляпунова доведені:

Теорема 2.1. Якщо виконуються умови

(а) $xF_{11}(x, y) = -a_{11}(x, y)x^2 < 0$ при $x \neq 0$, $y \neq 0$;
$yF_{22}(x, y) = -a_{22}(x, y)y^2 < 0$ „ „

(б) $yF_{12}(x, y) = \varphi_{12}(x)\psi_{12}(y)f(x, y)y^2 > 2$ „ „
$xF_{21}(x, y) = -\varphi_{21}(x)\psi_{21}(y)f(x, y)x^2 < 0$ „ „

$$\int_0^x \frac{\varphi_{21}(x)}{\psi_{12}(x)} x dx \to \infty \text{ при } |x| \to \infty,$$

(в)

$$\int_0^y \frac{\psi_{12}(y)}{\psi_{21}(y)} y dy \to \infty \text{ при } |y| \to \infty$$

і функції φ_{ij} та ψ_{ij} $(i, j = 1, 2, i \neq j$ одного знаку, то очевидний розв'язок системи (1.1) асимптотично стійкий в цілому.

Теорема 2. 2. Якщо в усьому просторі $-\infty < x < +\infty$, $-\infty < y < +\infty$ виконуються нерівності

$$F_1(x, y) \leqslant a_{11}(x, y); \quad F_2(x, y) \leqslant a_{22}(x, y),$$

причому хоча б в одній із них має місце строга нерівність, то нульовий розв'язок системи (2, 1)* асимптотично стійкий в цілому.

Розглядається ряд прикладів, з яких випливає, що наші умови в деякому розумінні є кращими, ніж наведені в роботах [4, 5, 6].

В § 3 розглядається система

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{i,j=1}^{3} F_{ij}(x_1, x_2, x_3) \quad (i,\ j = 1, 2, 3) \qquad (3, 1)$$

і доводяться:

Теорема 3.1. Якщо в усьому просторі $-\infty < x_i < +\infty$ $(i = 1, 2, 3)$ виконуються умови

$$\begin{aligned}
&1)\ x_i F_{ii}(x_1, x_2, x_3) = -a_{ii}(x_1, x_2, x_3)\, x_i^2 < 0 \text{ при } x \neq 0 \quad (i = 1, 2, 3);\\
&2)\ x_2 F_{12}(x_1, x_2, x_3) = a_{12}(x_1, x_2, x_3)\, x_2^2 > 0 \quad \text{„} \quad x_2 \neq 0;\\
&\quad x_3 F_{13}(x_1, x_2, x_3) = a_{13}(x_1, x_2, x_3)\, x_3^2 > 0 \quad \text{„} \quad x_3 \neq 0;\\
&\quad x_3 F_{23}(x_1, x_2, x_3) = a_{23}(x_1, x_2, x_3)\, x_3^2 > 0 \quad \text{„} \quad x_3 \neq 0;\\
&3)\ x_1 F_{21}(x_1, x_2, x_3) = -a_{12}(x_1, x_2, x_3)\, x_1^2 < 0 \quad \text{„} \quad x_1 \neq 0;\\
&\quad x_1 F_{31}(x_1, x_2, x_3) = -a_{13}(x_1, x_2, x_3)\, x_1^2 < 0 \quad \text{„} \quad x_1 \neq 0;\\
&\quad x_2 F_{32}(x_1, x_2, x_3) = -a_{23}(x_1, x_2, x_3)\, x_2^2 < 0 \quad \text{„} \quad x_2 \neq 0,
\end{aligned}$$

то нульовий розв'язок системи (3. 1) асимптотично стійкий в цілому.

Теорема 3. 2. Якщо для системи (3. 1) виконані умови

1) теореми 3. 1,

$$\begin{aligned}
&2)\ F_{21} = -a_{21}A_{11}(x_1)\, x_1, \qquad F_{31} = -a_{31}A_{11}(x_1)\, x_1,\\
&\quad F_{12} = a_{12}A_{22}(x_2)\, x_2, \qquad F_{32} = -a_{32}A_{22}(x_2)\, x_2,\\
&\quad F_{13} = a_{13}A_{33}(x_3)\, x_3, \qquad F_{23} = a_{23}A_{33}(x_3)\, x_3,
\end{aligned}$$

3) $a_{23}a_{31}a_{12} = a_{32}a_{13}a_{21}$,

$$4)\ \lim_{|x_i| \to \infty} \int_0^{x_i} A_{ii}(x_i)\, x_i dx_i = \infty \qquad (i = 1, 2, 3),$$

де функції $A_{ii}(x_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ додатні для довільних значень аргументів, а постійні $a_{ij} > 0$ $(i \neq j)$, то нульовий розв'язок системи (3. 1) асимптотично стійкий в цілому.

Вказано, що аналогічні теореми можна одержати для систем n рівнянь. Як приклад розглядається система, досліджена в праці [7]. Показано, що умова $c^2 - 4b > 0$ є зайвою.

ЛІТЕРАТУРА

1. В. В. Немыцкий, В. В. Степанов. Качественная теория дифференциальных уравнений. Гостеортехиздат, М.-Л. (1949).

2. Н. П. Еругин. Качественные методы в теории устойчивости. ПММ, т. XIX, вып. 5 (1955).

3. Е. А. Барбашин, Н. Н. Красовский. Об устойчивости движения в целом. ДАН СССР, т. LXXXVI, № 3 (1952).

4. Н. Н. Красовский. Теоремы об устойчивости движений, определяемых системой 2-х уравнений. ПММ, т. XVI, вып. 5 (1955).

5. Б. С. Разумихин. Об устойчивости тривиального решения систем 2-го порядка. ПММ, т. XIX, вып. 3 (1955).

6. Н. Н. Красовский. Об устойчивости движения в целом при постоянно действующих возмущениях. ПММ, т. XVIII, вып. 1 (1954).

7. В. А. Плисс. Необходимые и достаточные условия устойчивости в целом для системы n дифференциальных уравнений. ДАН СССР, т. 103, № 1 (1955).

8. И. Г. Малкин. Теория устойчивости движения. Гостеортехиздат, М.-Л. (1952).

М. П. ШЕРЕМЕТЬЕВ и Д. Г. ХЛЕБНИКОВ

УПРУГОЕ РАВНОВЕСИЕ ПОЛУПЛОСКОСТИ С ПОДКРЕПЛЕННЫМ КРАЕМ

Рассмотрим упругую изотропную полуплоскость ($y \leqslant o$), граница которой спаяна с бесконечно длинным тонким упругим прямолинейным стержнем постоянной жесткости. Будем считать, что одна из главных осей инерции каждого поперечного сечения стержня лежит в рассматриваемой плоскости. На стержень действуют распределенные поперечная и продольная нагрузка и изгибающий момент, интенсивность которых соответственно $q(x)$, $n(x)$ и $m(x)$.

Очевидно на контуре спая ($y=o$) будут выполняться следующие условия:

$$X_y = X^o{}_y, \quad Y_y = Y^o{}_y \tag{1}$$

и

$$u = u^o, \quad v = v^o, \tag{2}$$

где через X_y, Y_y, u, v обозначены компоненты напряжения и смещения по осям координат для полуплоскости, а через $X^o{}_y$, $Y^o{}_y$, u^o, v^o — те же величины для стержня. Обозначив нормальный и касательный компоненты напряжения на контуре спая через $f(x)$ и $g(x)$, установим зависимость между $f(x)$, $g(x)$ и компонентами смещения оси стержня u^o, v^o, воспользовавшись для этой цели работой М. П. Шереметьева [1].

Зависимость между компонентами смещения u^o, v^o, относительным удлинением $\varepsilon_o = \varepsilon_o(x)$ и углом поворота $\Theta = \Theta(x)$ элемента оси стержня в данном случае будет иметь вид:

$$\frac{du^o}{dx} = \varepsilon_o(x), \quad \frac{\partial v^o}{dx} = \Theta(x). \tag{3}$$

Закон Гука возьмем в виде:

$$\varepsilon_o = \frac{N}{G_1}, \quad \frac{d\Theta}{dx} = \frac{M}{G_2}, \tag{4}$$

где N и M — продольная сила и изгибающий момент, действующие в любом сечении стержня, а G_1 и G_2 — жесткости на растяжение и изгиб.

Условия равновесия элемента стержня dx дают [2]:

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dx} &= n(x) + g(x), \\ \frac{dQ}{dx} &= -q(x) - f(x), \\ \frac{dM}{dx} &= Q + m(x), \end{aligned} \tag{5}$$

где Q — перерезывающая сила.

Из (3), (4), (5) получаем зависимость между смещениями стержня и действующей на него нагрузкой:

$$\begin{aligned} \frac{d^2u^0}{dx^2} &= \frac{1}{G_1}[n(x) + g(x)]; \\ \frac{d^4v^0}{dx^4} &= \frac{1}{G_2}\left[\frac{dm}{dx} - q(x) - f(x)\right]. \end{aligned} \tag{6}$$

Первое из уравнений (6) характеризует растяжение оси стержня, второе — его изгиб и известно из курса сопротивления материалов. Составим уравнения для нахождения $f(x)$ и $g(x)$. Производные смещений на границе упругой полуплоскости связаны с напряжениями на границе следующими соотношениями [3]:

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{y=0} &= \alpha f(x) + \frac{\beta}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(t)\,dt}{t-x} \\ \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{y=0} &= \frac{\beta}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)\,dt}{t-x} - \alpha g(x) \end{aligned}\right\}. \tag{7}$$

где α и β — упругие постоянные, выражающиеся для плоской деформации через модуль упругости E и коэффициент Пуассона ν формулами:

$$\alpha = \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E}, \quad \beta = \frac{2(1-\nu^2)}{E} \tag{8}$$

и интегралы в правых частях (7) понимаются в смысле главного значения.

Из (6) и (7) получаем согласно (2):

$$\left.\begin{aligned} &G_1\alpha f'(x) - g(x) + \frac{G_1\beta}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g'(t)\,dt}{t-x} = n(x) \\ &\frac{G_2\beta}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f'''(t)\,dt}{t-x} + f(x) - G_2\alpha g'''(x) = \frac{dm}{dx} - q(x) \end{aligned}\right\}. \tag{9}$$

Система (9) является исходной для определения напряжений на контуре спая $f(x)$ и $g(x)$.

Пусть на стержень действует нагрузка вида:

$$\begin{aligned} q(x) &= a_1\cos\lambda x + a_2\sin\lambda x, \\ n(x) &= b_1\cos\lambda x + b_2\sin\lambda x, \\ m(x) &= c_1\cos\lambda x + c_2\sin\lambda x, \end{aligned} \tag{10}$$

где λ — вещественный положительный параметр, a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 — постоянные, зависящие от λ.

Замечая, что

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\lambda t dt}{t-x} = -\sin\lambda x, \\ &\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\lambda t dt}{t-x} = \cos\lambda x, \end{aligned} \tag{11}$$

будем искать решение уравнений (9) в виде:

$$\begin{aligned} f(x) &= f_1\cos\lambda x + f_2\sin\lambda x, \\ g(x) &= g_1\cos\lambda x + g_2\sin\lambda x. \end{aligned} \tag{12}$$

Подставляя (10) и (12) в уравнения (9) и учитывая (11), находим значения неизвестных постоянных:

$$f_1 = \frac{1}{D(\lambda)}\Big[-(G_1\beta\lambda+1)\,a_1 + G_2\alpha\lambda^3 b_2 + (G_1\beta\lambda+1)\lambda c_2\Big]$$

$$f_2 = \frac{1}{D(\lambda)}\Big[-(G_1\beta\lambda+1)\,a_2 - G_2\alpha\lambda^3 b_1 - (G_1\beta\lambda+1)\,\lambda c_1\Big] \qquad (13)$$

$$g_1 = \frac{1}{D(\lambda)}\Big[-G_1\alpha\lambda a_2 - (G_2\beta\lambda^3+1)\,b_1 - G_1\alpha\lambda^2 c_1\Big]$$

$$g_2 = \frac{1}{D(\lambda)}\Big[G_1\alpha\lambda a_1 - (G_2\beta\lambda^3+1)b_2 - G_1\alpha\lambda^2 c_2\Big],$$

где

$$D(\lambda) = G_1G_2(\beta^2-\alpha^2)\,\lambda^4 + G_2\beta\lambda^3 + G_1\beta\lambda + 1. \qquad (14)$$

От нагрузки вида (10) легко перейти к случаю нагрузки общего вида, представимой в виде интеграла Фурье.

Действительно, пусть функции $q(x)$, $n(x)$, $m(x)$ удовлетворяют условиям Дирихле во всяком конечном промежутке, будучи абсолютно интегрируемым в интервале $(-\infty, \infty)$. Тогда, как известно, можно представить:

$$q(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty d\lambda\int\limits_{-\infty}^\infty q(t)\,\cos\lambda(t-x)\,dt,$$

$$n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty d\lambda\int\limits_{-\infty}^\infty n(t)\cos\lambda(t-x)\,dt, \qquad (15)$$

$$m(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty d\lambda\int\limits_{-\infty}^\infty m(t)\cos\lambda(t-x)\,dt.$$

Элементарная нагрузка

$$\Delta q = \frac{1}{\pi}\,\Delta\lambda\int\limits_{-\infty}^\infty q(t)\cos\lambda t dt\cdot\cos\lambda x + \frac{1}{\pi}\,\Delta\lambda\int\limits_{-\infty}^\infty q(t)\sin\lambda t dt\cdot\sin\lambda x,$$

$$\Delta n = \frac{1}{\pi}\,\Delta\lambda\int\limits_{-\infty}^\infty n(t)\cos\lambda t dt\cdot\cos\lambda x + \frac{1}{\pi}\,\Delta\lambda\int\limits_{-\infty}^\infty n(t)\sin\lambda t dt\cdot\sin\lambda x,$$

$$\Delta m = \frac{1}{\pi}\,\Delta\lambda \int\limits_{-\infty}^{\infty} m(t)\cos\lambda t dt\cdot\cos\lambda x + \frac{1}{\pi}\,\Delta\lambda \int\limits_{-\infty}^{\infty} m(t)\sin\lambda t dt\cdot\sin\lambda x$$

вызовет, согласно (13), напряжения на контуре спая:

$$\Delta f = -\frac{\Delta\lambda}{\pi}\cdot\frac{G_1\beta\lambda+1}{D(\lambda)}\int\limits_{-\infty}^{\infty} q(t)\cos\lambda(t-x)\,dt +$$

$$+\frac{\Delta\lambda}{\pi}\cdot\frac{G_2\alpha\lambda^3}{D(\lambda)}\int\limits_{-\infty}^{\infty} n(t)\sin\lambda(t-x)\,dt +$$

$$+\frac{\Delta\lambda}{\pi}\cdot\frac{\lambda(G_1\beta\lambda+1)}{D(\lambda)}\int\limits_{-\infty}^{\infty} m(t)\sin\lambda(t-x)\,dt,$$

$$\Delta g = -\frac{\Delta\lambda}{\pi}\cdot\frac{G_1\alpha\lambda}{D(\lambda)}\int\limits_{-\infty}^{\infty} q(t)\sin\lambda(t-x)\,dt -$$

$$-\frac{\Delta\lambda}{\pi}\cdot\frac{G_2\beta\lambda^3+1}{D(\lambda)}\int\limits_{-\infty}^{\infty} n(t)\cos\lambda(t-x)\,dt -$$

$$-\frac{\Delta\lambda}{\pi}\cdot\frac{G_1\alpha\lambda^2}{D(\lambda)}\int\limits_{-\infty}^{\infty} m(t)\cos\lambda(t-x)\,dt.$$

Поэтому нагрузка вида (15) вызовет напряжения:

$$f(x) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{G_1\beta\lambda+1}{D(\lambda)}\,d\lambda\int\limits_{-\infty}^{\infty} q(t)\cos\lambda(t-x)\,dt +$$

$$+\frac{G_2\alpha}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{\lambda^3 d\lambda}{D(\lambda)}\int\limits_{-\infty}^{\infty} n(t)\sin\lambda(t-x)\,dt +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{G_1\beta\lambda+1}{D(\lambda)}\,\lambda d\lambda\int\limits_{-\infty}^{\infty} m(t)\sin\lambda(t-x)\,dt, \qquad (16)$$

$$g(x) = -\frac{G_1\alpha}{\pi}\int_0^\infty \frac{\lambda d\lambda}{D(\lambda)}\int_{-\infty}^\infty q(t)\sin\lambda(t-x)\,dt -$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{G_2\beta\lambda^3+1}{D(\lambda)}\,d\lambda\int_{-\infty}^\infty n(t)\cos\lambda(t-x)\,dt -$$

$$-\frac{G_1a}{\pi}\int_0^\infty \frac{\lambda^2 d\lambda}{D(\lambda)}\int_{-\infty}^\infty m(t)\cos\lambda(t-x)\,dt.$$

Интегралы в правых частях формул (16) будут сходиться, если помимо абсолютной интегрируемости функций $q(x)$, $n(x)$ и $m(x)$ потребовать, чтобы функции $n(x)$ и $m(x)$ имели всюду ограниченную интегрируемую производную. Тогда сходимость интеграла

$$\int_0^\infty \frac{\lambda^3 d\lambda}{D(\lambda)}\int_{-\infty}^\infty n(t)\sin\lambda(t-x)\,dt = \int_0^\infty \frac{\lambda^3\cos\lambda x d\lambda}{D(\lambda)}\int_{-\infty}^\infty n(t)\sin\lambda t dt -$$

$$-\int_0^\infty \frac{\lambda^3\sin\lambda x d\lambda}{D(\lambda)}\int_{-\infty}^\infty n(t)\cos\lambda t dt \tag{17}$$

следует из того, что интегралы $\int_{-\infty}^\infty n(t)\sin\lambda t dt$ и $\int_{-\infty}^\infty n(t)\cos\lambda t dt$ в силу теоремы Лебега-Римана [5] сходятся для любого значения λ и при $\lambda \to \infty$ ведут себя, как $0\left(\frac{1}{\lambda}\right)$.

Напряженное состояние полуплоскости можно определить теперь по формулам [4]:

$$X_x = -\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{yf(\xi)+(x-\xi)g(\xi)}{[y^2+(x-\xi)^2]^2}(x-\xi)^2\,d\xi,$$

$$X_y = -\frac{2y}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{yf(\xi)+(X-\xi)g(\xi)}{[y^2+(x-\xi)^2]^2}(x-\xi)\,d\xi, \tag{18}$$

$$y_y = -\frac{2y^2}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{yf(\xi)+(x-\xi)g(\xi)}{[y^2+(x-\xi)^2]^2}d\xi.$$

В частном случае, если на подкрепляющий стержень действует перпендикулярная к его оси сосредоточенная сила P, приложенная в начале координат, формулы (16) примут вид:

$$f(x) = -\frac{P}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{G_1\beta\lambda+1}{D(\lambda)}\cos\lambda x d\lambda,$$

$$g(x) = \frac{PG_1\alpha}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{\lambda\sin\lambda x d\lambda}{D(\lambda)}. \qquad (19)$$

Если положить здесь $G_1 = G_2 = 0$, т. е. считать, что подкрепляющий стержень отсутствует, то из (18) получается известное из курса теории упругости решение задачи Фламана.

Случаи действия на подкрепляющий стержень сосредоточенной силы, направленной по его оси, или сосредоточенного момента также легко получаются из формул (16).

Аналогичным путем в такой же постановке решается задача и для анизотропной полуплоскости.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. П. Шереметьев. Плоско-напряженное состояние пластинки с подкрепленным круговым отверстием. Инж. сборник, т. 14 (1953).

2. М. М. Филоненко-Бородич и др. Курс сопротивления материалов, т. 1, М. (1955).

3. Л. А. Галин. Контактные задачи теории упругости. М. (1953).

4. Н. Н. Лебедев и др. Сборник задач по математической физике. М., стр. 169—170 (1955).

5. Е. Титчмарш. Введение в теорию интегралов Фурье. Гостехиздат (1948).

Н. П. ФЛЕЙШМАН

ЗАМЕЧАНИЯ К ОДНОЙ СТАТЬЕ М. П. ШЕРЕМЕТЬЕВА

§ I. В работе [1] М. П. Шереметьев вывел граничные условия для пластинки, в криволинейное отверстие которой впаяно тонкое кольцо постоянного сечения. При этом кольцо принято за упругую линию, обладающую жесткостью на растяжение и изгиб. Решение задачи получено для кругового отверстия. Там же [1, стр. 91] имеется указание на то, что для тонких колец влияние жесткости кольца на изгиб g_2 настолько невелико, что в решении можно положить $g_2 = 0$, т. е. рассматривать кольцо как работающее только на растяжение.

В статье [4], выполненной под руководством М. П. Шереметьева, К. Н. Русинко частично воспользовался этим указанием и решил приближенно задачу о растяжении плоскости с подкрепленным эллиптическим отверстием, пренебрегая в законе Гука (для кольца) влиянием изгибающего момента на величину относительного удлинения оси кольца ε и влиянием ε на величину угла поворота сечения кольца.

Используя то же указание М. П. Шереметьева, мы рассматриваем кольцо как криволинейный стержень, работающий только на растяжение или сжатие. При этом мы полностью пренебрегаем действием изгибающих моментов в поперечных сечениях кольца и смягчаем условия спая между кольцом и пластинкой, потребовав только выполнения условия равенства относительных удлинений в пластинке и кольце вдоль контура спая L. Это значительно упрощает граничное условие и решение задачи и дает возможность с достаточной для практики точностью подсчитать напряжения в пластинке даже в тех случаях, когда кольцо не слишком тонкое (см. § 2).

Закон Гука, уравнение совместности деформаций и условие равновесия для кольца имеют в данном случае частный вид (см. формулы (1.12), (1.13) и (1.4) [1].

$$N_1 = \varepsilon\, E_1 F, \quad \varepsilon = -\,Re\left[ie^{-i\alpha}\frac{d}{ds}(u^\circ + iv^\circ)\right],$$
$$2h\int_o^s (X_n^\circ + iY_n^\circ)\,ds = \int_o^s (P_x + iP_y)\,ds + i\,N_1 e^{i\alpha} + \text{const}, \tag{1.1}$$

где E_1F — переменная, вообще говоря, жесткость кольца на растяжение; u° и v° — проекции на оси координат Ox и Oy вектора смещения точек оси кольца; s — дуга на контуре спая L, на котором выбрано положительное направление, оставляющее слева часть плоскости, занятую пластинкой; X°_n и Y°_n — это проекции неизвестных напряжений, действующих со стороны кольца на пластинку, а P_x и P_y — проекции заданной внешней нагрузки, приложенной к кольцу; N_1 — нормальная растягивающая сила, действующая в поперечном сечении s кольца; α — угол, который внешняя нормаль n к L составляет с осью Ox и который отсчитывается от этой последней; $2h$ — толщина пластинки.

Проинтегрировав по s второе граничное условие (1.3) работы [1] и принимая во внимание вышеприведенные формулы (1.1), можно без труда исключить неизвестные правые части условий спая и получить следующее граничное условие для пластинки, край которой подкреплен безмоментным кольцом:

$$-\frac{E_1F}{4\mu h} e^{ia} Re \left\{ ie^{-ia}\left[\varkappa\varphi_1(t) - \overline{t\varphi_1'(t)} - \overline{\psi_1(t)}\right]\right\} +$$

$$+\varphi_1(t) + \overline{t\varphi_1'(t)} + \overline{\psi_1(t)} = f \text{ на } L, \tag{1.2}$$

где t — аффикс точки на L, μ — модуль сдвига материала пластинки, $\varkappa = (3-\nu)/(1+\nu)$, ν—коэффициент Пуассона, $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ — функции от комплексного переменного $z=x+iy$, голоморфные в области пластинки, а через f обозначено

$$f = f(t) = f(s) = \frac{i}{2h}\int_0^s (P_x + iP_y)\, ds + \text{const}. \tag{1.3}$$

В частном случае, когда L представляет собою окружность радиуса R, граничное условие (1.2) принимает вид

$$\pm\, \delta t\, Re\left\{\frac{d}{dt}\left[\varkappa\varphi_1(t) - \overline{t\varphi_1'(t)} - \overline{\psi_1(t)}\right]\right\} +$$

$$+\varphi_1(t) + \overline{t\varphi_1'(t)} + \overline{\psi_1(t)} = f, \tag{1.4}$$

где $\delta = E_1F/4\mu hR$. Здесь и в дальнейшем верхний (нижний) знак плюс (минус) относится к случаю, когда пластинка занимает внутренность (внешность) L.

Исходя из условия (1.7) и применяя метод рядов Фурье, можно легко решить ряд технически важных задач для пластинок с подкрепленной круговой границей.

Если область, занимаемая пластинкой, односвязна, можно воспользоваться ее конформным отображением на внешность или внутренность единичного круга γ на плоскости $\zeta = \varrho e^{i\Theta} = \varrho\sigma$ при помощи отображающей функции $z = \omega(\zeta)$

В плоскости ζ условие (1.2) записывается в виде

$$\pm\frac{E_1F}{4\mu h}\frac{\omega'(\sigma)}{|\omega'(\sigma)|}\sigma\, Re\left\{\frac{1}{\omega'(\sigma)}\frac{d}{d\sigma}\left[\varkappa\varphi(\sigma) - \frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\ \overline{\varphi'(\sigma)} -\right.\right.$$

$$\left.\left.-\overline{\psi(\sigma)}\right]\right\} + \varphi(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}}\overline{\varphi'(\sigma)} + \overline{\psi(\sigma)} = f \text{ на } \gamma, \tag{1.5}$$

где

$$\varphi(\zeta) = \varphi_1(z) = \varphi_1[\omega(\zeta)],\quad \psi(\zeta) = \psi_1(z) = \psi_1[\omega(\zeta)].$$

§ 2. В качестве примера рассмотрим растяжение пластинки с подкрепленным круговым отверстием.

Бесконечная пластинка растягивается усилиями $\sigma_x^{(\infty)} = p$ и $\sigma_y^{(\infty)} = q$. Подкрепляющее кольцо свободно от внешних усилий. По аналогии с [2] возьмем функции $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ в виде

$$\varphi_1(z) = \frac{p+q}{4} z + \alpha_{-1} \frac{R}{z}, \quad \psi_1(z) = \frac{q-p}{2} z + \beta_{-1} \frac{R}{z} + \\ + \beta_{-3} \frac{R^3}{z^3}. \qquad (2.1)$$

Для определения неизвестных коэффициентов α_{-1}, β_{-1} и β_{-3} подставляем (2. 1) в (1. 4) и сравниваем коэффициенты при одинаковых степенях σ. В результате получаем систему уравнений, из которой находим[1]:

$$\alpha_{-1} = \frac{R(p-q)(1+\delta)}{2+\delta(\varkappa+3)}, \quad \beta_{-1} = \frac{R(p+q)}{4} \cdot \frac{\delta(\varkappa-1)-2}{1+\delta}, \\ \beta_{-3} = \frac{(p-q)R}{2} \cdot \frac{2+\delta(1-\varkappa)}{2+\delta(\varkappa+3)}. \qquad (2.2)$$

Решение этой задачи получено значительно более сложным путем в работе [3] в предположении, что материал кольца и пластинки одинаков.

В таблице приведены значения напряжений σ_Θ при $\Theta = \frac{\pi}{2}$, возникающих в пластинке на контуре спая с кольцом ($r = R$). Эти напряжения подсчитывались для случая одноосного растяжения ($q = 0$) пластинки, подкрепленной кольцом прямоугольного поперечного сечения с размерами $2b \times 2h_1$ при $\frac{E_1 h_1}{Eh} = 1{,}833$, $\varkappa = 2{,}08$, $\delta = 4{,}7658 \frac{b}{R}$ и при различных значениях $k = \frac{b}{R-b}$. Для сравнения в этой же таблице приведены напряжения σ_Θ, заимствованные нами из работ Г. Н. Савина [2] и М. П. Шереметьева [1]. В работе [2] напряженное состояние подкрепляющего кольца удовлетворяет уравнениям плоской теории упругости, а в работе [1] кольцо рассматривается как упругая линия, работающая на растяжение и изгиб.

Таблица

Значения напряжений σ_Θ/p при $\Theta = \frac{\pi}{2}$ на контуре спая

$\kappa = \frac{b}{R-b}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{100}$
По решению (2. 2)	1,536	1,814	2,387	2,585	2,771
По данным Г. Н. Савина [2]	1,301	1,660	2,349	2,569	2,776
По данным М. П. Шереметьева [1]	1,12	1,57	2,35	—	—

[1] См. [1] при $g_2 = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. П. Шереметьев. Инженерный сборник, т. XIV. Изд. АН СССР (1953).
2. Г. Н. Савин. Концентрация напряжений около отверстий, гл. V, Гостехиздат (1951).
3. R. M. Radok. Journal of Applied Mechanics, 22, № 2, 1955.
4. К. Н. Русинко. Бюллетень наукової студентської конференції 1954 р., частина II. Видавн. Львівського університету, 1955.

В. І. ТУЛЬЧІЙ

ЗГИН БЕЗМЕЖНОЇ ПЛАСТИНКИ, ОСЛАБЛЕНОЇ ДВОМА КРУГОВИМИ ОТВОРАМИ, ГРАНИЦІ ЯКИХ ПІДКРІПЛЕНІ ТОНКИМИ КІЛЬЦЯМИ

Розглядаючи задачу пружної рівноваги безмежної, ізотропної і однорідної пластинки, припустимо, що вона ослаблена двома довільними круговими отворами, границі яких підкріплені тонкими пружними кільцями.

Будемо вважати, що головний вектор і головний момент зусиль, прикладених до кожного із підкріплюючих кілець, рівні нулеві. Поверхня пластинки вільна від навантаження, а напружений стан на безмежності однорідний, тобто величини $M_{x(\infty)}$, $H_{xy(\infty)}$, $M_{y(\infty)}$ — обмежені.

Покладаючи $z = \omega(\zeta)$, де

$$\omega(\zeta) = \frac{\zeta}{1 - a\zeta}, \quad a > 0$$

відобразимо область пластинки на кругове кільце, обмежене колами γ_1, γ_2.

Граничні умови задачі, одержані в роботі [1], після нескладних перетворень можуть бути записані в вигляді:

$$2A^o_j \Big\{ \overline{\varphi'}(\bar\sigma_j)\,\dot{\bar\sigma}_j + \frac{\overline{\omega'}(\bar\sigma_j)}{\omega'(\sigma_j)}\,\varphi'(\sigma_j)\,\dot\sigma_j + \frac{\overline{\omega}(\bar\sigma_j)}{[\omega'(\sigma_j)]^2}\Big[\varphi''(\sigma_j)\,\omega'(\sigma_j) - \varphi'(\sigma_j)\,\omega''(\sigma_j)\Big]\,\dot\sigma_j + \psi'(\sigma_j)\,\dot\sigma_j \Big\} + 2iD\Big\{(3+\mu)\,\overline{\varphi}(\bar\sigma_j) - (1-\mu)\Big[\frac{\overline{\omega}(\bar\sigma_j)}{\omega'(\sigma_j)} + \psi(\sigma_j)\Big]\Big\} = f'_{1j} + if'_{2j}, \tag{1.1}$$

де $$f'_{1j} + if'_{2j} = \Big\{\overline{C}_{oj} - \overline{\omega}(\bar\sigma_j)V'_{ozj} + i\int\limits_0^s \bar z_j m_j(s)\,ds +$$

$$+\int\limits_{o}^{s}\left[\overline{z}_j(s)-\overline{z}_j(\alpha)\right]_{(j=1,\,2)} p_j(\alpha)\,d\alpha\ \Big\}. \qquad (1.2)$$

При цьому σ_j — афікс точки кола γ_j ($j = 1, 2$).

Розкладаючи два останні члени із (1.2) в ряд Фур'є, маємо

$$f'_{1j}+if'_{2j}=\overline{C}_{oj}-\overline{\omega}(\overline{\sigma}_j)\,V'_{ozj}+\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{nj}\,\sigma_j^n+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\beta_{nj}\,\sigma_j^{-n}. \qquad (1.3)$$

Будемо шукати розв'язок рівнянь (1.1) в вигляді

$$\varphi(\sigma_j)=\overset{(2)}{B}\omega(\sigma_j)+\varphi_o(\sigma_j),$$

$$\psi(\sigma_j)=(B'+iC')\,\omega(\sigma_j)+\psi_o(\sigma_j). \qquad (1.4)$$

Примінюючи спосіб, використаний в роботі [2], покладемо

$$\varphi_o(\sigma_j)=P_1(\sigma_j)+P_2(\sigma_j),$$

$$\psi_o(\sigma_j)=Q_1(\sigma_j)+Q_2(\sigma_j),$$

де

$$P_1(\sigma_j)=\sum_{1}^{\infty}a_k\sigma_j{}^k,\quad Q_1(\sigma_j)=\sum_{0}^{\infty}c_k\sigma_j{}^k,$$

$$P_2(\sigma_j)=\sum_{1}^{\infty}b_k\sigma_j{}^{-k},\quad Q_2(\sigma_j)=\sum_{1}^{\infty}d_k\sigma_j{}^{-k} \qquad (1.5)$$

Враховуючи (1.5), підставимо вираз (1.4) в граничні умови (1.1). Потім ліву і праву частини одержаних рівностей помножимо на

$$\frac{1}{2\pi i}\,\frac{d\sigma_j}{\sigma_j-\zeta}$$

та, покладаючи $A^o{}_j=A_j\varrho_j{}^{-1}$, проінтегруємо їх по $\gamma_j\,(j=1, 2)$

В результаті інтегрування по γ_2 ($|\zeta|<\varrho_2$) і γ_1 ($|\zeta|<\varrho_1$) відповідно знаходимо

$$A^o{}_2\left\{\varrho_2{}^2\zeta^{-2}(1-a\zeta)\,(\zeta-a\varrho_2{}^2)^2\,\overline{P'}_2\left(\frac{\varrho_2{}^2}{\zeta}\right)+\right.$$

$$+a\varrho_2{}^2(a\varrho_2{}^2-\zeta)\,\overline{a}_1+(1-a\zeta)^3\,\varrho_2{}^2P'_1(\zeta)+$$

$$+\varrho_2^2(1-a^2\varrho_2^2)^3 P'_2(a\varrho_2^2)-\varrho^2{}_2a^3(a\varrho_2^2-\zeta)\,b_1+$$
$$+\varrho_2^2(1-a\zeta)^3(a\varrho_2^2-\zeta)\,P''_1(\zeta)-2a^2\varrho_2^2(1-a\zeta)^2$$
$$(a\varrho_2^2-\varsigma)\,P'_1(\zeta)-(1-a\zeta)(\varsigma-a\varrho_2^2)^2\,Q'_1(\varsigma)+$$
$$+a(a\varrho_2^2-\zeta)\,d_1\Big\}+D\left\{(3+\mu)(a\varrho_2^2-\zeta)\,\overline{P_2}\left(\frac{\varrho_2^2}{\zeta}\right)+\right.$$
$$+(1-\mu)\Big[\varrho_2^2(1-a\zeta)^2 P_1'(\zeta)+\varrho_2^2(1-a^2\varrho_2^2)^2 P'_2(a\varrho^2{}_2)-$$
$$\left.-(a\varrho_2^2-\zeta)\,Q_1(\zeta)\Big]\right\}=-\frac{i}{2}(a\varrho_2^2-\zeta)\sum_0^\infty a_{n,\,2}\,\zeta^n-$$
$$-\frac{B'+iC'}{a}\Big[D(1-\mu)-A^o{}_2\Big](a\varrho_2^2-\zeta)+2\overset{(2)}{B}a\varrho_2^2A^o{}_2\zeta+$$
$$+2\overset{(2)}{B}\Big[D(1+\mu)-A^o{}_2\Big]\varrho_2^2-\frac{i}{2}(a\varrho_2^2-\zeta)\,\overline{C}_{02}-$$
$$-\frac{i}{2}\varrho_2^2\,V'_{oz2}. \qquad (1.6)$$

$$A^o{}_1\left\{\varrho_1^2\zeta^{-2}(a\zeta-1)\;(\zeta-a\varrho_1^2)^2\,\overline{P}'_2\left(\frac{\varrho_1^2}{\zeta}\right)+\right.$$
$$+a\varrho_1^2(\zeta-a\varrho_1^2)\,\overline{a}_1-a^3\varrho_1^2(\zeta-a\varrho_1^2)\,b_1-$$
$$-\varrho_1^2(1-a\zeta)^3P'_1(\zeta)+\varrho_1^2(1-a^2\varrho^2{}_1)^3P'_1(a\varrho_1^2)+$$
$$+\varrho_1^2(1-a\zeta)^3(\zeta-a\varrho_1^2)\,P''_1(\zeta)-$$
$$-2a\varrho_1^2(1-a\zeta)^2(\zeta-a\varrho_1^2)\,P'_1(\zeta)+$$
$$\left.+(1-a\zeta)(\zeta-a\varrho_1^2)^2\,Q'_1(\zeta)+a(\zeta-a\varrho_1^2)\,d_1\right\}+$$
$$+D\left\{(3+\mu)(\zeta-a\varrho_1^2)\overline{P}_2\left(\frac{\varrho_1^2}{\zeta}\right)-(1-\mu)\Big[\varrho_1^2(1-a\zeta)^2P'_1(\zeta)-\right.$$
$$\left.-\varrho_1^2(1-a^2\varrho_1^2)^2P'_1(a\varrho_1^2)+(\varsigma-a\varrho_1^2)\,Q_1(\zeta)\Big]\right\}=-$$
$$-\frac{i}{2}(\zeta-a\varrho_1^2)\sum_0^\infty a_{n,\,1}\,\zeta^n-2a\varrho_1^2(\zeta-a\varrho_1^2)\,A^o{}_1B^{(2)}+$$
$$+(B'+iC')\Big\{\Big[D(1-\mu)-A^o{}_1\Big]\zeta+a\varrho^2{}_1A^o{}_1\Big\}(\zeta-a\varrho_1^2)\sum_0^\infty(a\zeta)^k-$$
$$-\frac{i}{2}(\zeta-a\varrho^2{}_1)\,\overline{C}_{01}. \qquad (1.7)$$

Інтегруючи по тих же колах γ_2, γ_1, але покладаючи відповідно $|\zeta| > \varrho_2$, $|\zeta| > \varrho_1$, одержимо слідуючі дві тотожності

$$A^o{}_2 \Big\{ - \varrho^2{}_2 (1 - a\zeta)(\zeta - a\varrho_2{}^2)^2 P'{}_1 \left(\frac{\varrho_2{}^2}{\zeta}\right) +$$
$$+ a\varrho_2{}^2 (a\varrho_2{}^2 - \zeta)\, \overline{a}_1 - \varrho_2{}^2 (1 - a\zeta)^3 P'{}_2 (\zeta) +$$
$$+ \varrho_2{}^2 (1 - a^2\varrho_2{}^2)^3 P'{}_2 (a\varrho_2{}^2) - a^3\varrho_2{}^2 (a\varrho_2{}^2 - \zeta)\, b_1 -$$
$$- \varrho_2{}^2 (1 - a\zeta)^3 (a\varrho_2{}^2 - \zeta) P''{}_2 (\zeta) +$$
$$+ 2a\varrho_2{}^2 (1 - a\zeta)^2 (a\varrho_2{}^2 - \zeta) P'{}_2 (\zeta) +$$
$$+ (1 - a\zeta)(\zeta - a\varrho_2{}^2)^2 Q'{}_2 (\zeta) + a (a\varrho_2{}^2 - \zeta)\, d_1 \Big\} +$$
$$+ D \Big\{ (3 + \mu)(\zeta - a\varrho_2{}^2)\, \overline{P}_1 \left(\frac{\varrho_1{}^2}{\zeta}\right) -$$
$$- (1 - \mu) \Big[\varrho_2{}^2 (1 - a\zeta)^2 P'{}_2 (\zeta) + (\zeta - a\varrho_2{}^2)\, Q_2 (\zeta) -$$
$$- \varrho_2{}^2 (1 - a^2\varrho_2{}^2)^2 P'{}_2 (a\varrho_2{}^2) \Big] \Big\} = \frac{i}{2} (a\varrho_2{}^2 - \zeta) \sum_1^\infty \beta_{n,2} \zeta^{-n} +$$
$$+ \varrho_2{}^2 A^o{}_2 (B'{}_2 + iC')(a\varrho_2{}^2 - \zeta)\, \zeta^{-1} +$$
$$+ \frac{B' + iC'}{a} \Big\{ (a\varrho_2{}^2 - \zeta) \Big[D (1 - \mu) - A^o{}_2 +$$
$$+ A^o{}_2 a\varrho_2{}^2 \zeta^{-1} \Big] \Big\} \sum_1^\infty \left(\frac{1}{a\zeta}\right)^k. \qquad (1.8)$$

$$A^o{}_1 \Big\{ 1 - \varrho_1{}^2 \zeta^{-2} (1 - a\zeta)(\zeta - a\varrho_1{}^2)^2\, \overline{P'}_1 \left(\frac{\varrho_1{}^2}{\zeta}\right) -$$
$$- a\varrho_1{}^2 (\zeta - a\varrho^2{}_1)\, \overline{a}_1 - \varrho_1{}^2 (1 - a\zeta)^3 P'{}_2 (\zeta) +$$
$$+ a^3\varrho_1{}^2 (\zeta - a\varrho_1{}^2)\, b_1 - \varrho_1{}^2 (1 - a^2\varrho_1{}^2)^3 P'{}_1 (a\varrho_1{}^2) +$$
$$+ \varrho_1{}^2 (1 - a\zeta)^3 (\zeta - a\varrho_1{}^2) P''{}_2 (\zeta) - a (\zeta - a\varrho_1{}^2)\, d_1 +$$
$$+ (1 - a\zeta)(\zeta - a\varrho_1{}^2)^2 Q'{}_2 (\zeta) -$$
$$- 2a\varrho_1{}^2 (1 - a\zeta)^2 (\zeta - a\varrho_1{}^2) P'{}_2 (\zeta) \Big\} +$$
$$+ D \Big\{ (3 + \mu)(\zeta - a\varrho_1{}^2)\, \overline{P}_1 \left(\frac{\varrho_1{}^2}{\zeta}\right) -$$
$$- (1 - \mu) \Big[\varrho^2{}_1 (1 - a\zeta)^2 P'{}_2 (\zeta) + \varrho_1{}^2 (1 - a^2\varrho_1{}^2) P'{}_1 (a\varrho_1{}^2) +$$

$$+(\zeta - a\varrho_1^2)\,Q_2(\zeta)\Big]\Big\} = \frac{i}{2}\varrho_1^2\,V'_{oz1} - 2\varrho_1^2)\,\overset{(2)}{B}\Big[\,D(1+\mu) -$$

$$- A^o{}_1(1 - a\zeta)\Big] + 2a\varrho_1^2 A^o{}_1 \overset{(2)}{B}(\zeta - a\varrho_1^2) -$$

$$- \frac{i}{2}(\zeta - a\varrho_1^2)\sum_1^\infty \beta_{n,1}\zeta^{-n}. \qquad (1.9)$$

Коефіцієнти $c\,C_{n+1}, b_{n+1}$ $(n \geqslant 2)$ функцій $Q_1(\zeta)$ та $P_2(\zeta)$ легко визначити із (1.6), (1.7), якщо кожний доданок лівих частин замінити відповідним рядом по додатніх степенях ζ. Виконавши цей розклад і зрівнявши коефіцієнти при одинакових степенях ζ^n $(n \geqslant 2)$, після нескладних підрахунків знаходимо.

$$C_{n+1} = L_{(n+1)}\Big\{\overset{(n+1)}{P_1}\,\bar{b}_n + \overset{(n+1)}{P_2}\,\bar{b}_{n-1} + \overset{(n+1)}{P_3}\,\bar{b}_{n-2} +$$

$$+ \overset{(n+1)}{P_4}\,a_{n+2} + \overset{(n+1)}{P_5}\,a_{n+1} + \overset{(n+1)}{P_6}\,a_n +$$

$$+ \overset{(n+1)}{P_7}\,a_{n-1} + \overset{(n+1)}{P_8}\,a_{n-2} + \overset{(n+1)}{P_9}\,c_n +$$

$$+ \overset{(n+1)}{P_{10}}\,c_{n-1} + \overset{(n+1)}{P_{11}}\,c_{n-2} + \overset{(2)}{P_{12}}\,\varrho_1^{-2(1+n)}\,a_{n,2} -$$

$$- \overset{(2)}{P_{13}}\,\varrho_1^{-2(1+n)}\,a_{n-1,2} - \overset{(1)}{P_{12}}\,\varrho_2^{-2(1+n)}\,a_{n,1} +$$

$$+ \overset{(1)}{P_{13}}\,\varrho_2^{-2(1+n)}\,a_{n-1,2} +$$

$$+ (\overset{(1)}{P_{15}} - \overset{(1)}{P_{14}} - \overset{(1)}{P_{16}} + \overset{(1)}{P_{17}})\,\varrho_2^{-2(1+n)}\Big\}. \qquad (1.10)$$

$$\bar{b}_{n+1} = \overset{(n+1)}{P_{10}}\,\bar{b}_n + \overset{(n+1)}{P_{20}}\,\bar{b}_{n-1} + \overset{(n+1)}{P_{30}}\,\bar{b}_{n-2} +$$

$$\overset{(n+1)}{P_{50}}\,a_{n+1} +$$

$$+ \overset{(n+1)}{P_{60}}\,a_n + \overset{(n+1)}{P_{70}}\,a_{n-1} + \overset{(n+1)}{P_{80}}\,a_{n-2} + \overset{(n+1)}{P_{90}}\,c_n +$$

$$+ \overset{(n+1)}{P_{100}}\,c_{n-1} + \overset{(n+1)}{P_{110}}\,c_{n-2} + L_{(n+1)}\Big\{\overset{(1)}{P_{12}}\,a_{n,1} - \overset{(1)}{P_{13}}\,a_{n-1,1} +$$

$$+ \overset{(1)}{P_{14}} - \overset{(1)}{P_{15}} + \overset{(1)}{P_{16}} - \overset{(1)}{P_{17}} - \overset{(2)}{P_{12}}\,a_{n,2} + \overset{(2)}{P_{13}}\,a_{n-1,2}\Big\}. \qquad (1.11)$$

В цих формулах покладено

$$\overset{(j)}{P_1} = \frac{\varrho_j^{-2n}}{(1+n)a\varrho_j^2}\Big\{n\,(2 + a^2\varrho_j^2) + \delta_j(3+\mu)\Big\},$$

$$P_2^{(j)} = \frac{\varrho_j^{2(1-n)}}{(1+n)\,a^2\varrho_j^4}\left\{(n-1)(1+2a^2\varrho_j^2)+\delta_j(3+\mu)\right\},$$

$$P_3^{(j)} = \frac{n-2}{a(1+n)}\varrho_j^{-2n\,(j)}\quad,\quad P_4 = \frac{n+2}{a},\ P_5^{(j)} = \frac{1}{a^2\varrho_j^2}$$

$$\left\{1-(1+3a^2\varrho^2_j)\ n-2a^2\varrho_j^2+\delta_j\ (1-\mu)\right\},$$

$$P_6^{(j)} = \frac{1}{(1+n)\,a\varrho_j^2}\left\{4a^2\varrho_j^2-1+3(n-1)(1+a^2\varrho_j^2)-\delta_j(1-\mu)2\right\}.$$

$$P_{13}^{(j)} = \frac{i}{2(1+n)\ A^\circ_j\,a^2\varrho_j^4},\ P_7^{(j)} = \frac{n-1}{(1+n)\,\varrho^2_j}$$

$$\left\{\delta_j\ (1-\mu)-(1+4a^2\varrho_j^2)-(n-2)\ (3+a^2\varrho_j^2\right\},$$

$$P_{12}^{(j)} = \frac{i}{2(1+n)\ A_j^\circ a\varrho_j^2},\ P_9(j) = \frac{1}{(1+n)\ a\varrho_j^2}$$

$$\left\{n\ (2+a^2\varrho_j^2)-\delta_j(1-\mu)\right\},\ P_{10}^{(j)} = \frac{1}{(1+n)\,a^2\varrho_j^4}$$

$$\left\{(n-1)\ (1+2a^2\varrho_j^2)-\delta_j\ (1-\mu)\right\},$$

$$P_8^{(j)} = \frac{(n-2)^2a}{(n+1)\ \varrho_j^2},\ P_{14}^{(j)} = \frac{(B'+iC')\ [\delta_j(1-\mu)-1]}{(1+n)\ a^2\varrho_j^4}\,a^{n-2},$$

$$P_{11}^{(j)} = \frac{n-2}{(1+n)\,a\varrho_j^4},\ P_{15}^{(j)} = \frac{(B'+iC')\,[\delta_j(1-\mu)-1]}{(1+n)\,a\varrho_j^2}\,a^{n-1}.$$

$$P_{16}^{(j)} = \frac{B'+iC'}{(1+n)\,a\varrho_j^2}\,a^{n-1},\ P_{17}^{(1)} = \frac{B'+iC'}{n+1}\,a^n.$$

$$\delta_j = \frac{D}{A^\circ_j},\ (j=1,\ 2). \tag{1.12}$$

І крім того

$$P_2^{(n+1)} = P_2^{(1)}\varrho_2^{-2(1+n)} - P_2^{(2)}\varrho_1^{-2(1+n)},\ P_{10}^{(n+1)} = P_{10}^{(1)}\varrho_2^{-2(1+n)} -$$

$$-P_{10}^{(2)}\varrho_1^{-2(1+n)},\ P_{20}^{(1+n)} = L_{(n+1)}\ [P_2^{(2)}-P_2^{(1)}],$$

$$P_{100}^{(1+n)} = L_{(n+1)}\ [P_1^{(2)}-P_1^{(1)}],\ P_k^{(1+n)} = P_k^{(2)}\varrho_1^{-2(1+n)} -$$

$$-P_k^{(1)}\varrho_2^{-2(1+n)},\ P_{ko}^{(1+n)} = L_{(n+1)}\ [P_k^{(1)}-P_k^{(2)}],$$

$$L_{(1+n)} = \frac{1}{\varrho_1^{-2(n+1)}-\varrho_2^{-2(n+1)}}. \tag{1.13}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, 11), (n = 2, 3, 4 \ldots).$$

Аналогічно, замінивши доданки лівих частин (1.8), (1.9) відповідними рядами по від'ємних степенях ζ і зрівнюючи коефіцієнти при однакових степенях змінної, ми можемо визначити коефіцієнти a_{n+2}, d_{n+2} $(n \geqslant 1)$ функцій $P_1(\zeta)$, $Q_2(\zeta)$.

Дійсно, виконавши елементарні математичні дії, остаточно одержимо

$$d_{n+2} = N_{(n+2)} \left\{ R_1^{(n+2)} \bar{a}_{n+1} + R_2^{(n+2)} \bar{a}_n + R_3^{(n+2)} \bar{a}_{n-1} + \right.$$
$$+ R_4^{(n+2)} b_{n+2} + R_5^{(n+2)} b_{n+1} + R_6^{(n+2)} b_n + R_7^{(n+2)} b_{n-1} +$$
$$+ R_8^{(n+2)} b_{n-2} + R_9^{(n+2)} d_{n+1} + R_{10}^{(n+2)} d_n + R_{11}^{(n+2)} d_{n+1} +$$
$$\left. + R_{12}^{(n+2)} + R_{13}^{(n+2)} + R_{14}^{(n+2)} + R_{15}^{(n+2)} + R_{16}^{(n+2)} \right\}, \qquad (1.14)$$

$$\bar{a}_{n+2} = N_{(n+2)} \left\{ R_{10}^{(n+2)} \bar{a}_{n+1} + R_{20}^{(n+2)} \bar{a}_n + \right.$$
$$+ R_{30}^{(n+2)} \bar{a}_{n-1} + R_{40}^{(n+2)} b_{n+2} + R_{50}^{(n+2)} b_{n+1} +$$
$$+ R_{60}^{(n+2)} b_n + R_{70}^{(n+2)} b_{n-1} + R_{80}^{(n+2)} b_{n-2} + R_{90}^{(n+2)} d_{n+1} +$$
$$+ R_{100}^{(n+2)} d_n + R_{110}^{(n+2)} d_{n-1} + R_{120}^{(n+2)} + R_{13}^{(n+2)} + R_{14}^{(n+2)} +$$
$$\left. + R_{15}^{(n+2)} + R_{16}^{(n+2)} \right\}, \qquad (1.15),$$

де покладено

$$R_k^{(n+2)} = \left\{ R_k^{(1)} \varrho_2^{2n+4} - R_k^{(2)} \varrho_1^{2n+4} \right\}, \; R_{ko}^{(n+2)} =$$
$$= \left\{ R_k^{(2)} - R_k^{(1)} \right\}, \; R_{13}^{(n+2)} = - R_{13}^{(2)} \varrho_1^{2n+4}, \; R_{14}^{(n+2)} = -$$
$$- R_{14}^{(2)} \varrho_1^{2n+4}, \; R_{15}^{(n+2)} = - R_{15}^{(2)} \varrho_1^{2n+4}, \; R_{16}^{(n+2)} = - R_{16}^{(2)} \varrho_1^{2n+4}$$

$$N_{(n+2)} = \frac{1}{\varrho_2^{2n+4} - \varrho_1^{2n+4}}, \; (n = 1, 2, 3, \ldots) \qquad (1.16)$$

при цьому

$$R_1^{(j)} = \frac{\varrho_j^{2(1+n)}}{a(2+n)} \left\{ (1+n)(1+2a^2\varrho_j^2) - \delta_j(3-\mu) \right\},$$

$$R_2^{(j)} = \frac{\varrho_j^{2(1+n)}}{n+2} \left\{ \delta_j (3+\mu) - n(2+a^2\varrho_j^2) \right\},$$

$$R_3^{(j)} = \frac{n-1}{n+2}\, a\varrho_j^{2(1+n)}, \quad R_5^{(j)} = -\frac{(n+1)\, a\varrho_j^2}{n+2}$$

$$\left\{5 + n\,(3 + a^2\varrho_j^2) + \delta\,(1-\mu)\right\},\; R_4^{(j)} = (n+2)\, a^2\varrho_j^2,$$

$$R_6^{(j)} = \frac{n\varrho^2{}_j}{n+2}\left\{4 - a^2\varrho_j^2 + 3n\,(1 + a^2\varrho_j^2) + 2\delta_j\,(1-\mu)\right\},$$

$$R_7^{(j)} = -\frac{(n-1)\,\varrho_j^2}{a\,(n+2)}\left\{1 - 2a^2\varrho_j^2 + n\,(1 + 3a^2\varrho_j^2) + \delta_j(1-\mu)\right\},$$

$$R_{11}^{(j)} = \frac{n-1}{n+2}\, a\varrho_j^4,\; R_8^{(j)} = \frac{(n-1)\,(n-2)}{(n+2)}\,\varrho_j^4,$$

$$R_9^{(j)} = \frac{1}{a\,(n+2)}\left\{(n+1)\,(1 + 2a^2\varrho_j^2) + \delta_j\,(1-\mu)\right\}.$$

$$R_{10}^{(j)} = -\frac{\varrho_j^2}{n+2}\left\{n\,(2 + a^2\varrho_j^2)\,1 - \delta_j\,(1-\mu)\right\},$$

$$R_{14}^{(j)} = \frac{B' + iC'}{(n+2)\, a^{n+2}}\, a^2\varrho_2^4,$$

$$R_{12}^{(j)} = \frac{i}{2A^\circ{}_2\,(n+2)\, a}\left\{a\varrho_j^2\beta_{n,\,j} - \beta_{n+1,\,j}\right\},$$

$$R_{15}^{(j)} = -\frac{(B' + iC')\,\varrho_2^2}{(n+2)\, a^{n+1}},$$

$$R_{13}^{(j)} = -\frac{B' + iC'}{(n+2)\, a^{n+3}}\left\{\delta_2\,(1-\mu) - 1\right\},$$

$$R_{16}^{(j)} = \frac{\varrho^2{}_2\,(B' + iC')}{(n+2)\, a^{n+2}}\left\{\delta_2\,(1-\mu) - 1\right\}.$$

$$(n \geqslant 2),\; (j = 1{,}2) \qquad (1.17)$$

Для визначення $C_\circ$ покладемо в рівності (1,6) $\zeta = 0$. Групуючи подібні члени, знаходимо:

$$c_o = \frac{A^\circ{}_2}{D(1-\mu)a}\left\{a^2\varrho^2{}_2\bar{a}_1 - a^2\bar{b}_1 + \left[1 - 2a^2\varrho_2^2 + \frac{D\,(1-\mu)}{A^\circ{}_2}\right]a_1 + \right.$$

$$+ (1 - a^2\varrho_2^2)^2\left[1 - a^2\varrho_2^2 + \frac{D\,(1-\mu)}{A^\circ{}_2}\right]P'_2\,(a\varrho_2^2) -$$

$$- a^4\varrho^2{}_2 b_1 + 2a\varrho_2^2 a_2 - a^2\varrho_2^2 c_1 + a^2\varrho_2 d_1 +$$

$$+\frac{ia}{2A^o_2}\alpha_{0,2}+(B'+iC')\left[\frac{D(1-\mu)}{A^o_2}-1\right]-$$

$$-2B^{(2)}\left[\frac{D(1+\mu)}{A^o_2}-1\right]+\frac{i}{2A^o_2}V'_{oz2}+\frac{ia}{2A^o_2}\overline{C}_{o2}\Big\}. \quad (1.18)$$

Шляхом порівнювання коефіцієнтів при нулевій і першій степенях ζ, із рівностей (1.6), (1.7), знаходимо

$$d_1=\frac{1}{\varrho_2{}^2-\varrho_1{}^2}\left\{[\overset{(1)}{\Gamma_1}\varrho_2{}^2-\overset{(2)}{\Gamma_1}\varrho_1{}^2]a_1+\overset{(1)}{\Gamma_7}c_o+(\varrho_2{}^2-\right.$$

$$\left.-\varrho_1{}^2)\overline{b}_1+\overset{(1)}{\Gamma_6}\varrho_2{}^2-\overset{(2)}{\Gamma_6}\varrho_1{}^2\right\}$$

$$a_2=\frac{a}{2(\varrho^2{}_2-\varrho_1{}^2)}\left\{(\overset{(2)}{\Gamma_1}-\overset{(1)}{\Gamma_1})a_1-(\varrho_2{}^2-\varrho_1{}^2)\overline{a}_1+\right.$$

$$\left.+\overset{(2)}{\Gamma_8}c_o+a^2(\varrho_2{}^2-\varrho_1{}^2)b_1+(\varrho_2{}^2-\varrho_1{}^2)c_1+\overset{(2)}{\Gamma_6}-\overset{(1)}{\Gamma_6}\right\}, \quad (1.20)$$

$$\overline{b}_2=\frac{(\varrho_1\varrho_2)^4}{\varrho_2{}^4-\varrho_1{}^4}\left\{(\overset{(1)}{T_1}-\overset{(2)}{T_1})b_1+(\overset{(1)}{T_2}-\overset{(2)}{T_2})\overline{b}_1+\right.$$

$$+(\overset{(1)}{T_3}-\overset{(2)}{T_3})a_2+(\overset{(1)}{T_4}-\overset{(2)}{T_4})a_1+\overset{(1)}{T_9}+(\overset{(1)}{T_6}-\overset{(2)}{T_6})d_1+$$

$$\left.+(\overset{(1)}{T_7}-\overset{(2)}{T_7})c_1+(\overset{(1)}{T_8}-\overset{(2)}{T_8})\overline{a}_1+T_{10}c_o-\overset{(2)}{T_9}\right\}$$

$$c_2=\frac{1}{\varrho_2{}^4-\varrho_1{}^4}\left\{(\varrho_2{}^4\overset{(2)}{T_1}-\varrho_1{}^4\overset{(1)}{T_1})b_1+(\varrho_2{}^4\overset{(2)}{T_2}-\varrho_1{}^4\overset{(1)}{T_2})\overline{b}_1+\right.$$

$$+(\varrho_2{}^4\overset{(2)}{T_3}-\varrho_1{}^4\overset{(1)}{T_3})a_2+(\varrho_2{}^4\overset{(2)}{T_4}-\varrho_1{}^4\overset{(1)}{T_4})a_1+(\varrho_2{}^4\overset{(2)}{T_5}-$$

$$-\varrho_1{}^4\overset{(1)}{T_5})a_3+(\varrho_2{}^4\overset{(2)}{T_6}-\varrho_1{}^4\overset{(1)}{T_6})d_1+(\varrho_2{}^4\overset{(2)}{T_7}-\varrho_1{}^4\overset{(1)}{T_7})c_1+$$

$$\left.+(\varrho_2{}^4\overset{(2)}{T_8}-\varrho_1{}^4\overset{(1)}{T_8})\overline{a}_1+T_{11}c_o+\varrho_2{}^4\overset{(2)}{T_9}+\varrho_1{}^4\overset{(1)}{T_9}\right\}, \quad (1.22)$$

де покладено

$$\overset{(j)}{\Gamma_1}=-\frac{1}{a^2}\left\{1-2a^2\varrho_j{}^2+\delta_j(1-\mu)\right\},\quad \overset{(2)}{\Gamma_8}=\frac{D(1-\mu)}{a}$$

$$\left\{\frac{1}{A^o_2}-\frac{1}{A^o_1}\right\},\ \overset{(2)}{\Gamma_6}=-\frac{(1-a^2\varrho_j{}^2)^2P'_2(a\varrho_2{}^2)}{a^2}$$

$$\left\{1-a^2\varrho^2{}_2+\delta_2(1-\mu)\right\}-\frac{i}{2A_2{}^\circ a}\left\{\alpha_{0,2}+\overline{C}_{02}+\right.$$

$$+\frac{V^1_{0z2}}{a}\Big\}-\frac{B'+iC'}{a^2}\Big\{\delta_2(1-\mu)-1\Big\}+\frac{2\overset{(2)}{B}}{a^2}$$

$$\Big\{\delta_2(1-\mu)-1\Big\},\ \overset{(1)}{\Gamma_7}=\frac{D(1-\mu)}{a}\Big\{\frac{\varrho_2^2}{A_1^0}-\frac{\varrho_1^2}{A_2^0}\Big\}, \tag{1.23}$$

$$\overset{(1)}{\Gamma_6}=\frac{(1-a\varrho_1^2)^2P'_1(a\varrho_1^2)}{a^2}\Big\{1-a^2\varrho_1^2+\delta_1(1-\mu)\Big\}-$$

$$-\frac{i}{2A^o{}_1a}\Big\{\alpha_{0,1}+\overline{C}_{01}\Big\}-2\varrho_1^2\overset{(2)}{B}+(B'+iC')\varrho_1^2,$$

і крім того

$$\overset{(j)}{T_1}=\frac{a}{2\varrho_j^2},\ \overset{(j)}{T_2}=\frac{1}{2a\varrho_j^4}\Big\{2+a^2\varrho_j^2+\delta_j(3+\mu)\Big\},$$

$$\overset{(j)}{T_3}=-\frac{1}{a^2\varrho_j^2}\Big\{5a^2\varrho_j^2-\delta_j(1-\mu)\Big\},$$

$$\overset{(j)}{T_4}=-\frac{1}{2a\varrho_j^2}\Big\{1-4a^2\varrho_j^2+2\delta_j(1-\mu)\Big\},$$

$$\overset{(j)}{T_5}=C\frac{3}{a},\ T^{(j)}{}_6=-\frac{1}{2a\varrho_j^4},$$

$$\overset{(j)}{T_7}=\frac{1}{2a\varrho_j^2}\Big\{2+a^2\varrho_j^2-\delta_j(1-\mu)\Big\},$$

$$\overset{(1)}{T_9}=\frac{i}{4A^o{}_1a^2\varrho_1^4}\Big\{a\varrho_1^2\alpha_{1,1}-\alpha_{0,1}-\overline{C}_{01}\Big\},$$

$$-\frac{B'+iC'}{2a\varrho^2{}_1}\Big\{\delta_1(1-\mu)-1\Big\}+\frac{B'+iC'}{2a\varrho^2{}_2}\Big\{1-a^2\varrho^2{}_1\Big\}-$$

$$-\frac{\overset{(2)}{B}}{a\varrho_1^2},\quad \overset{(j)}{T_8}=-\frac{1}{2a\varrho_j^2},$$

$$\overset{(2)}{T_9}=\frac{i}{4a^2\varrho_2^4A^o{}_2}\Big\{a\varrho_2^2\alpha_{1,2}-\alpha_{0,2}-\overline{C}_{02}\Big\}-$$

$$-\frac{B'+iC'}{2a^3\varrho_2^4}\Big\{\delta_2(1-\mu)-1\Big\}-\frac{\overset{(2)}{B}}{a\varrho_2^2},$$

$$T_{10}=\frac{D(1-\mu)}{2a^2}\Big\{\frac{1}{A^o{}_2\varrho_2^4}-\frac{1}{A^o{}_1\varrho^4{}_1}\Big\}.$$

$$T_{11}=\frac{D(1-\mu)}{2a^2}\Big\{\frac{1}{A^o{}_2}-\frac{1}{A^o{}_1}\Big\},\ (j=1,2). \tag{1.24}$$

На основі співвідношень (1.18), (1.19), (1.20) та (1.21) бачимо, що коефіцієнти b_2, $\bar{a}_2$, d_1, C_0 виражаються через a_1, b_1, $P'_j\,(a\varrho_j^2)$, V'_{ozj}, $\bar{C}_{oj}$ $(j = 1, 2)$ та їм спряжені величини.

Враховуючи це і зрівнюючи вільні члени лівих і правих частин співвідношень (1.8), (1.9) — одержимо ще два рівняння для визначення $\bar{c}_1$, d_2, а саме:

$$\overset{(2)}{H_1}\bar{c}_1 + \overset{(2)}{H_2} d_2 = \overset{(2)}{\Phi}$$

$$\overset{(1)}{H_1}\bar{c}_1 + \overset{(1)}{H_2} d_2 = \overset{(1)}{\Phi}. \qquad (1.25)$$

де $\overset{(j)}{H_1}$, $\overset{(j)}{H_2}$ — відомі числа, а $\overset{(j)}{\Phi}$ $(j = 1, 2)$ лінійно залежить від a_1, b_1, $\bar{a}_1$, $\bar{b}_1$, $P'_j\,(a\varrho_j^2)$, $\bar{P}'_j\,(a\varrho_j^2)$, V'_{ozj}, $\bar{c}_{oj}$, c_{oj} $(j = 1, 2)$.

Таким чином, на основі вище викладеного всі коефіцієнти c_k, d_k, a_{k+1}, b_{k+1} $(k \geqslant 1)$ виражаються через a_1, b_1, $\bar{a}_1$, $\bar{b}_1$ та $P'_j\,(a\varrho_j^2)$, $\bar{P}'_j\,(a\varrho_j^2)$, V'_{ozj}, $\bar{C}_{oj}$, C_{oj} $(j = 1, 2)$.

Нехай для заданої степені точності підрахунків досить залишити l коефіцієнтів функції $P_1(\zeta)$ та m коефіцієнтів функції $P_2(\zeta)$. В цьому випадку постійні $P'_1\,(a\varrho_1^2)$, $P'_2\,(a\varrho_2^2)$ приймуть слідуючі значення

$$P'_1\,(a\varrho_1^2) = \sum_1^l k a_k\,(a\varrho_1^2)^{k-1}, \quad P'_2\,(a\varrho_2^2) = -$$

$$- \sum_1^m k b_k\,(a\varrho_2^2)^{k-1}. \qquad (1.26)$$

Підставимо в праві частини (1.26) і їм спряжених виразів замість a_k, b_k, $\bar{a}_k$, $\bar{b}_k$ $(k \geqslant 2)$ їх значення через a_1, b_1, $\bar{a}_1$, $\bar{b}_1$ $P'_j\,(a\varrho_j^2)$, $\bar{P}'_j\,(a\varrho_j^2)$, V'_{ozj}, $\bar{C}_{oj}$, C_{oj} $(j = 1, 2)$.

Розв'язавши одержану систему відносно $P'_j\,(a\varrho_j^2)$, $\bar{P}'_j\,(a\varrho_j^2$, $(j = 1, 2)$, ми виразимо ці постійні через a_1, b_1, $\bar{a}_1$, $\bar{b}_1$, V'_{ozj}, $\bar{C}_{oj}$, C_{oj} $(j = 1, 2)$.

Далі, так як при заданій степені точності

$$a_{l+1} = \bar{a}_{l+1} = b_{m+1} = \bar{b}_{m+1} = 0, \qquad (1.27)$$

то, замінюючи ліві частини цих рівнянь їх значення через a_1, $\bar{a}_1$, b_1, $\bar{b}_1$, V'_{ozj}. C_{oj}, $\bar{C}_{oj}$ $(j = 1, 2)$, ми одержимо ще 4 рівняння для визначення a_1, b_1, $\bar{a}_1$ та $\bar{b}_1$ через V'_{ozj}, C_{oj}, $\bar{C}_{oj}$ $(j = 1,2)$.

Постійні V'_{ozj}, C_{oj} $(j = 1,2)$, як показано в роботі [3], визначаються з умов однозначності кутів повороту осей підкріплюючих кілець та однозначності прогинів пластинки.

Отже, всі коефіцієнти функцій $P_1(\zeta), P_2(\zeta), Q_1(\zeta)$ і $Q_2(\zeta)$ нами визначені, чим і вичерпано рішення поставленої задачі[1].

Як приклад, розглянемо випадок, коли підкріплюючі кільця вільні від навантаження, а напружений стан на безмежності задано у вигляді $M_{x(\infty)} = M_{y(\infty)} = M$. Як пластинка, так і підкріплюючі її кільця — мідні з $E = 1{,}1 \cdot 10^6 kГ/см^2, \mu = 0{,}33$.

Нехай радіуси r_1, r_2 ослаблюючих отворів та розміри обох кілець — однакові. Далі, з рівності між собою жорсткостей на згин та кручення для підкріплюючих кілець, випливає співвідношення $b = 1{,}86\,h$, де b — ширина кільця, а h — його висота. Приймаючи, що пластинка має товщину $h = 1$ *см*, покладемо $h = 1{,}1\,h_1$. З метою з'ясування залежності концентрації напружень від віддалі[2] l_1, покладемо $r_1 = 20$ *см*.

Підрахунки показують, що при прийнятій нами системі навантажень, розрахунковим є момент M_Θ, а найнебезпечнішою є точка x_1[3].

Як видно з таблиці 1, в якій подано значення M_Θ в точках x_1, x_2, зі збільшенням l_1 концентрація зменшується і при $l_1 \geqslant 6\,r_1$ не відрізняється від її значення у випадку наявності в пластинці лише одного отвору.

Таблиця 1

$\frac{M_\Theta}{M}$ \ $\frac{l_1}{r_1}$	1	2	4	6	∞
$\left(\frac{M_\Theta}{M}\right)_{x_1}$	$\frac{2{,}53}{2{,}89}$	$\frac{2{,}15}{2{,}47}$	$\frac{1{,}87}{2{,}16}$	$\frac{1{,}79}{2{,}06}$	$\frac{1{,}76}{2{,}00}$
$\left(\frac{M_\Theta}{M}\right)_{x_2}$	$\frac{1{,}94}{2{,}24}$	$\frac{1{,}86}{2{,}17}$	$\frac{1{,}79}{2{,}08}$	$\frac{1{,}77}{2{,}04}$	$\frac{1{,}76}{2{,}00}$

Знаменники дробів в таблиці 1 відповідають випадку абсолютно гнучких кілець і взяті нами із роботи [4].

---

[1] З метою полегшення підрахунків при розв'язуванні конкретних задач доцільно функції $Q_1(\zeta)$ та $Q_2(\zeta)$ явно виразити через функції $P_1(\zeta)$, $P_2(\zeta)$. Це легко зробити, використовуючи рівності (1.6), (1.7), (1.8), (1.9).

[2] Під l_1 розуміємо найкоротшу віддаль між ослаблюючими пластинку отворами.

[3] Вважаємо, що x_1, x_2, є точки перетину центральної прямої з колом ослаблюючого отвору, причому x_1 розміщена ближче до другого кола ніж x_2.

Таблиця 2

$\frac{M_\theta}{M}$ \ $\frac{l_1}{r_1}$	1	2	4
$\left(\frac{M_\theta}{M}\right)_{x_1}$	6,28	5,43	4,83
$\left(\frac{M_\theta}{M}\right)_{x_2}$	4,83	4,75	4,67

Значення M_θ в найбільш небезпечних точках підкріплюючих кілець приведені в таблиці 2.

ЛІТЕРАТУРА

1. М. П. Шереметьев. Изгиб анизотропных и изотропных плит, ослабленных отверстием, край которого подкреплен тонким кольцом, ДАН УССР, № 6, 1950.
2. М. П. Шереметьев. Упругое равновесие эллиптического кольца. ПММ, т. XVII, вып. I, 1953.
3. М. П. Шереметьев. Пластинка, край которой подкреплен тонким упругим кольцом постоянного сечения. ДАН УССР, № 1, 1952.
4. Н. И. Калыняк. Изгиб изотропных плит с двумя равными круговыми отверстиями.

Научные записки (Львовский политехнический институт), вып. 30, серия физико-математических наук, № 1, 1955.

Статті цього розділу надійшли до видавництва у червні 1956 р.