Доповіді та повідомлення
Львівського державного університету імені Ів. Франка
Випуск VII, частина III 1957

МЕХАНІКА ТА МАТЕМАТИКА

И. Н. ПЕСИН

ОБ ОДНОМ ОПРЕДЕЛЕНИИ КВАЗИКОНФОРМНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

Р. Каччиополи [1] ввел в рассмотрение класс отображений $W=(z)$, именуемых в дальнейшем q — отображениями, обладающих следующими свойствами: а) $f(z)$ осуществляет внутреннее отображение некоторой области G_z, $f(G_z) = G_w$; б) почти на всех сечениях $x=c$, $y=c$ области имеет место абсолютная непрерывность отображения; в) если $\lambda = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \left|\frac{\Delta W}{\Delta z}\right|$, $\Lambda = \overline{\lim\limits_{\Delta z \to 0}} \left|\frac{\Delta W}{\Delta z}\right|$, то почти всюду $q\lambda \geqslant \Lambda$.*

Такие отображения еще ранее рассматривались Б. В. Шабатом в качестве решений эллиптической системы линейных дифференциальных уравнений. Среди других недоказанных утверждений Каччиополи посчитал очевидным следующее: q — отображение обладает N — свойством почти на всех кривых $u(x, y)=c$, $v(x, y)=c$, где $u+iv$ — аналитическая функция в G_z. Я не вижу, каким образом такое утверждение непосредственно вытекало бы из определения q — отображения. Однако оно будет следовать из такой общей теоремы:

Теорема. q — отображение является общим Q-квазиконформным отображением.

Прежде всего, несколько непосредственно устанавливаемых свойств Q — отображения**: 1) из условия в) и теоремы В. В. Степанова следует дифференцируемость q — отображения почти всюду; 2) из свойства б) и теоремы В. В. Меньшова следует возможность применимости к q — отображениям формулы

* Каччиополи требовал от q — отображений положительности якобиана почти всюду; можно показать, что это условие есть следствие остальных.

** По поводу этих свойств см. [2].

Грина; 3) q — отображения инвариантны относительно конформных преобразований в плоскости W и преобразований подобия, переноса и отражения относительно прямой в плоскости z.

Доказательство теоремы базируется на следующих леммах.

Лемма 1. Семейство q — отображений компактно.

Доказательство. Достаточно показать равностепенную непрерывность класса, которая устанавливается таким же образом, как соответствующая лемма М. А. Лаврентьева [3] для (p,Θ) — квазиконформных отображений, причем вместо окружностей рассматриваются концентрические квадраты и используется преобразование симметрии относительно сторон квадрата.

Лемма 2. Пусть $p(z)$ — характеристика q — отображения $W=f(z)$ круга $|z|<1$ на круг $|W|<1$ и $f(0)=0$; $f(1)=1$ и $\iint\limits_E (p(z)-1)a\sigma_z < \varepsilon$, где E — множество точек, в которых якобиан отображения $W=f(z)$ положителен. Тогда

$$|f(z)-z| \leqslant \lambda(\varepsilon), \ \lim_{\varepsilon\to 0} \lambda(\varepsilon) = 0.$$

Доказательство леммы основано на применении формулы Грина, а затем теоремы Морера.

Доказательство теоремы. Достаточно рассмотреть отображение $w=f(z)$ круга $|z|<1$ на круг $|w|<1$. Характеристика $p(z)$ отображения определена почти во всех точках, в которых якобиан отображения положителен; доопределим ее во всем круге $|z|<1$ произвольной постоянной и затем определим последовательность измеримых множеств E_n, $|E_n|\to\pi$ и функций $p_n(z)$, $\Theta_n(z)$, $p_n(z)\leqslant q$, непрерывных в круге $|z|\leqslant 1$, причем $p_n(z)=p(z)$ при $z\in E_n$, а $\Theta_n(z)$ совпадает с характеристикой $\Theta(z)$ отображения $W=f(z)$ в тех точках множества E_n, в которых $p(z)>1$. Пусть $p_n(W)=p_n(f^{-1}(W))$, $\Theta_n(W)=\Theta_n(f^{-1}(W))$; $p_n(W)$, $\Theta_n(W)$ непрерывные функции в круге $|W|<1$. В силу известных результатов Б. В. Шабата существует последовательность квазиконформных отображений $\varphi_n(W)$ круга $|W|<1$ на круг $|\zeta|<1$, непрерывно дифференцируемых с характеристиками $p_n^x(W)$, $\Theta_n^x(W)$, $|p_n^x(W)-p_n(W)|<\varepsilon_n|\Theta_n^x(W)-\Theta_n(W)|<\varepsilon_n$, с нормировкой $\varphi_n(0)=0$, $\varphi_n(1)=1$. В силу дифференцируемости при этих отображениях множество длины нуль переходит в множество длины нуль. Последовательность ε возьмем настолько быстро сходящейся к нулю, чтобы семейство эллипсов с характеристиками $p_n(W)$, $\Theta_n(W)$ при этих отображениях переходило в регулярное семейство (см. [2]) кривых с параметром $1+\alpha_n$, причем $\alpha_n(W)\to 0$ равномерно в $|W|<1$. Таким образом, последовательность отображений $\Psi_n(z) = \varphi_n(f(z))$, являющихся, очевидно, q — отображениями, удовлетворяет условиям леммы 2, поэтому всякая окружность $|z - z_o| = r$ плоскости z преобразуется в кривую Γ, для которой

$$\lim \frac{\max\limits_{|z-z_o|=r} \left| \Psi_n(z) - \Psi_n(z_o) \right|}{\min\limits_{|z-z_o|=r} \left| \Psi_n(z) - \Psi_n(z_o) \right|} = 1.$$

Из написанного соотношения и из теоремы искажения при квазиконформных отображениях следует, что семейство окружностей с центром в произвольной точке z преобразуется в регулярное семейство кривых в плоскости w с параметром регулярности, верхняя грань которого в круге $[w] < 1$ зависит от q. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Caccioppoli. Atti Nazionale dei Lincei, **13**, № 5, 197—204 (1952).
2. И. Н. Песин. ДАН СССР, **102**, № 2, 223—224 (1955).
3. М. А. Лаврентьев. Математический сборник, **42**, № 4, 407—424 (1935).

С. А. ГРАЧ

ИЗГИБ КРУГЛОЙ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛИТЫ, КРАЯ КОТОРОЙ ПОДКРЕПЛЕНЫ ТОНКИМИ УПРУГИМИ КОЛЬЦЕВЫМИ РЕБРАМИ ЖЕСТКОСТИ

§ 1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Круглые и кольцевые плиты в качестве элементов конструкций встречаются на практике весьма часто. Большинство круглых плит работает на осесимметричную нагрузку, изменяющуюся только по направлению радиуса r. Во многих случаях плиты усиливаются кольцевыми ребрами жесткости, например диски турбин и вентиляторов, шестерни и ряд других ответственных деталей машин и сооружений.

Рассмотрим конечную круглую пластинку, ослабленную круглым отверстием, края которой усилены тонкими упругими кольцами жесткости постоянного сечения. Пластинка свободно оперта по наружному контуру и нагружена равномерно по окружности радиуса R поперечными усилиями $p = \text{const}$.