последовательность отображений $\Psi_n(z) = \varphi_n(f(z))$, являющихся, очевидно, q — отображениями, удовлетворяет условиям леммы 2, поэтому всякая окружность $|z - z_o| = r$ плоскости z преобразуется в кривую Γ, для которой

$$\lim \frac{\max\limits_{|z-z_o|=r} \left| \Psi_n(z) - \Psi_n(z_o) \right|}{\min\limits_{|z-z_o|=r} \left| \Psi_n(z) - \Psi_n(z_o) \right|} = 1.$$

Из написанного соотношения и из теоремы искажения при квазиконформных отображениях следует, что семейство окружностей с центром в произвольной точке z преобразуется в регулярное семейство кривых в плоскости w с параметром регулярности, верхняя грань которого в круге $[w] < 1$ зависит от q. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Cacciopoli. Atti Nazionale dei Lincei, **13**, № 5, 197—204 (1952).
2. И. Н. Песин. ДАН СССР, **102**, № 2, 223—224 (1955).
3. М. А. Лаврентьев. Математический сборник, **42**, № 4, 407—424 (1935).

С. А. ГРАЧ

ИЗГИБ КРУГЛОЙ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛИТЫ, КРАЯ КОТОРОЙ ПОДКРЕПЛЕНЫ ТОНКИМИ УПРУГИМИ КОЛЬЦЕВЫМИ РЕБРАМИ ЖЕСТКОСТИ

§ 1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Круглые и кольцевые плиты в качестве элементов конструкций встречаются на практике весьма часто. Большинство круглых плит работает на осесимметричную нагрузку, изменяющуюся только по направлению радиуса r. Во многих случаях плиты усиливаются кольцевыми ребрами жесткости, например диски турбин и вентиляторов, шестерни и ряд других ответственных деталей машин и сооружений.

Рассмотрим конечную круглую пластинку, ослабленную круглым отверстием, края которой усилены тонкими упругими кольцами жесткости постоянного сечения. Пластинка свободно оперта по наружному контуру и нагружена равномерно по окружности радиуса R поперечными усилиями $p = \text{const}$.

В рассматриваемом случае прогибы зависят только от радиуса, следовательно, $W=f(r)$ и уравнение прогиба будет иметь следующий вид [1]:

$$W = C_1 \ln\frac{r}{R} + C_2 \frac{r^2}{R^2}\ln\frac{r}{R} + C_3 + C_4\frac{r^2}{R^2}, \qquad (1)$$

где C_1, C_2, C_3, и C_4 — постоянные коэффициенты и определяются из следующих граничных условий [2]:

$$\frac{d^2W}{dr^2} + \frac{\mu - \delta_1}{R}\cdot\frac{dW}{dr} = 0 \qquad \text{при } r = R; \qquad (2)$$

$$-D\frac{d}{dr}\left(\frac{d^2W}{dr^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{dW}{dr}\right) = p \qquad \text{при } r = R; \qquad (3)$$

$$\frac{d^2W}{dr^2} + \frac{\mu + \delta_2}{R_1}\cdot\frac{dW}{dr} = 0 \qquad \text{при } r = R_1; \qquad (4)$$

$$W = 0 \qquad \text{при } r = R_1; \qquad (5)$$

где $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ — цилиндрическая жесткость пластинки при изгибе;

$\delta_1 = \frac{E_1 I_1}{RD}$ — относительная жесткость на изгиб внутреннего подкрепляющего кольца;

$\delta_2 = \frac{E_2 I_2}{R_1 D}$ — относительная жесткость на изгиб внешнего подкрепляющего кольца;

E_1 и E_2 — соответствующие модули упругости материалов, из которых изготовлены ребра жесткости;

I_1 и I_2 — соответствующие моменты инерции площадей поперечных сечений кольцевых ребер жесткости.

Подставляя (1) в (2)—(5), получаем систему четырех уравнений, из которой определяем:

$$C_1 = \frac{C_2}{(\mu - \delta_1 - 1)}\left[\frac{A}{B}(\mu - \delta_1 + 1) - (\mu - \delta_1 + 3)\right];$$

$$C_2 = \frac{PR^3}{4D};$$

$$C_3 = \frac{C_2}{(\mu - \delta_1 - 1)}\left\{\left[(\mu - \delta_1 + 3) - \eta^2(\mu - \delta_1 - 1) - \frac{A}{B}(\mu - \delta_1 + 1)\right]\ln\eta + \frac{A}{2B}\eta^2(\mu - \delta_1 - 1)\right\};$$

$$C_4 = -\frac{C_2 A}{2B}$$

где

$$A = \eta^2 (\mu - \delta_1 - 1) [2\ln \eta (\mu + \delta_2 + 1) + (\mu + \delta_2 + 3)] - $$
$$- (\mu - \delta_1 + 3)(\mu + \delta_2 - 1);$$

$$B = \eta^2 (\mu - \delta_1 - 1)(1 + \mu + \delta_2) - (\mu - \delta_1 + 1)(\mu + \delta_2 - 1)$$

$$\eta = \frac{R_1}{R};$$

Подставляя значения найденных коэффициентов в (1), получим:

$$W = \frac{PR}{4D} \left\{ \left[(\mu - \delta_1 + 3) - \frac{A}{B}(\mu - \delta_1 + 1) \right] \frac{R^2 \ln \frac{R_1}{r}}{(\mu - \delta_1 - 1)} + \right.$$
$$\left. + (R_1^2 - r^2)\left(\frac{A}{2B} + \ln R\right) + r^2 \ln r - R_1^2 \ln R_1 \right\}. \quad (6)$$

Некоторые важные для практики случаи можно получить как частные из данной общей формулы (6). Так, при $\delta_2 = 0$ получаем решение задачи об изгибе плиты с подкрепленным внутренним краем [3]. Если же $\delta_1 = 0$, а $\delta_2 \neq 0$, получается решение той же задачи для случая подкрепления лишь внешнего края плиты.

При $\delta_1 = \delta_2 = \infty$ получается решение для случая жесткого защемленного края плиты [1], и, наконец, когда $\delta_1 = \delta_2 = 0$, получаем решение для круглой пластинки постоянного сечения, ослабленной круговым отверстием и нагруженной равномерно по внутреннему краю радиуса R [1].

Приняв в нашем решении, что $R = 0$ из уравнения (6), получим целый ряд других частных случаев, которые весьма часто встречаются на практике в качестве элементов как строительных, так и машиностроительных конструкций.

Для нашей задачи соответствующие моменты, изгибающие плиту в радиальном и тангенциальном направлениях будут выражаться:

$$M_r = \frac{-D}{R^2} \left\{ C_2 \left[2(1 + \mu) \ln \frac{r}{R} + \mu + 3 \right] + \right.$$
$$\left. + \frac{C_1 R}{r^2}(\mu r - R) + 2C_4(1 + \mu) \right\}, \quad (7)$$

$$M_\Theta = \frac{-D}{R^2} \left\{ C_2 \left[2(1 + \mu) \ln \frac{r}{R} + 1 + 3\mu \right] + \right.$$
$$\left. + \frac{C_1 R}{r^2}(r - \mu R) + 2C_4(1 + \mu) \right\}. \quad (8)$$

Таблица 1

Нагрузка на плиту $P = 2\pi Rp$ (в *кг*)	Значения прогибов $W \cdot 10^2$ при $r = R_{\varphi}$ (в *мм*)							
	Плита с двумя ребрами		Плита с одним внутренним ребром		Плита с одним внешним ребром		Плита без ребер жесткости	
	теорет.	эксперим.	теорет.	эксперим.	теорет.	эксперим.	теорет.	эксперим.
0	0	0	0	0	0	0	0	0
32	4,3	4,1	5,8	5,78	7,33	7,1	10,19	10,76
64	8,61	8,6	11,58	10,92	14,67	14,1	20,38	21,94
100	13,46	13,6	18,09	17,2	22,92	22,2	31,85	32,00
128	17,22	17,2	23,151	22,0	29,34	29,3	40,77	44,0
160	21,53	21,3	28,94	28,0	36,67	36,9	50,96	55,0
200	26,91	26,2	36,173	35,9	45,84	44,5	63,7	63,6
300	40,4	38,4	54,26	54,6	68,76	67,1	95,55	94,8
400	53,8	51,0	72,35	74,0	91,67	89,2	127,4	126,8
500	67,3	63,2	90,43	92,0	114,59	110,3	159,25	158,3
600	80,7	76,0	108,52	111,4	137,51	138,0	191,1	190,7
700	94,2	88,2	126,61	130,0	160,43	153,1	222,95	—
800	107,65	101,00	144,7	148,4	183,35	175,6	254,8	—
900	121,11	113,20	162,78	—	206,27	194,5	286,65	—
1000	134,57	127,3	180,86	—	229,19	218,4	313,5	—

Таблица 2

Нагрузка на плиту $P = 2\pi Rp$ (в *кг*)	Значения относительных деформаций $\varepsilon^{\circ}_{\theta} \cdot 10^6$							
	Плита с двумя ребрами		Плита с одним внутренним ребром		Плита с одним внешним ребром		Плита без ребер жесткости	
	теорет.	эксперим.	теорет.	эксперим.	теорет.	эксперим.	теорет.	эксперим.
0	0	0	0	0	0	0	0	0
32	35,66	33,31	41,64	40,71	87,36	83,17	108,25	105,18
64	71,32	66,62	83,28	80,90	174,72	165,64	216,5	210,74
100	111,43	106,60	130,42	129,2	273,00	262,73	338,28	335,35
128	142,63	134,57	166,55	163,11	349,44	337,85	433,00	427,89
160	178,29	167,88	208,19	202,25	436,80	420,60	541,26	530,23
200	222,87	213,18	260,24	258,4	546,00	529,72	676,57	670,69
300	334,30	319,78	390,36	386,2	819,00	798,51	1014,85	1006,04
400	445,73	426,37	520,48	515,4	1092,00	1057,43	1353,14	1341,39
500	557,17	532,96	650,60	643,3	1365,00	1323,37	1691,42	1702,54
600	668,60	639,55	780,72	775,1	1638,00	1587,84	2029,71	2141,06
700	780,04	746,15	910,84	902,43	1911,00	1869,16		
800	891,47	852,74	1040,96	1035,27	2184,00	—		

Максимальная деформация на поверхности кольцевых ребер жесткости легко подсчитать по формуле [4]:

$$\varepsilon_{\Theta}{}^{o} = \frac{-6h_1 (M_{\Theta} - \mu M_r)}{Eh^3}. \tag{9}$$

§ 2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

Объектом экспериментального исследования являлась мартеновская листовая сталь марки 3 толщиной в 22 *мм* в отожженном состоянии. Размеры плиты в *мм*: $2R=55$, $2R_1=280$, $2R_2=60$, $h=6$, $h_1=18$. Прогибы измерялись на специально изготовленном стенде при помощи прогибомеров с двухмикронными индикаторами.

Для определения экспериментальным путем деформаций применялись как кольцевые, так и петлеобразные тензодатчики омического сопротивления.

Для нашей модели плиты мы имеем следующие данные: $E_1=E_2=E=2{,}0 \cdot 10^6$ *кг/см*^{2}; $\mu=0{,}285$. Для сравнения опыты производились также над плитой с одним лишь внешним или внутренним ребром жесткости и над неподкрепленной кольцевой плитой.

В таблицах 1 и 2 приведены теоретические и экспериментальные значения максимальных прогибов и максимальных деформаций $\varepsilon^o{}_{\Theta}$ по внутреннему кольцу для разных ступеней нагрузок и для всех четырех плит.

Как явствует из таблиц 1 и 2, разница между экспериментальными и теоретическими значениями не превышает 7%.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. П. Тимошенко. Пластинки и оболочки. Гостехиздат (1948).

2. Г. Н. Савин и Н. П. Флейшман. Инженерный сборник. Изд АН СССР, т. VIII (1950).

3. Н. П. Флейшман. Ученые записки Львовского университета, т. XXII, сер. физико-математическая, вып. V (1953).

4. М. П. Шереметьев. Украинский математический журнал, т. V, № 1 (1953).

Г. Н. ГЕСТРИН

ОДНА ТЕОРЕМА О ЕДИНСТВЕННОСТИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО РЯДА

В 1928 г. Зигмунд доказал следующую теорему: пусть $\{\alpha_n\}$ — произвольная числовая последовательность, сходящаяся к нулю. Каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, можно указать такое множе-