Максимальная деформация на поверхности кольцевых ребер жесткости легко подсчитать по формуле [4]:

$$\varepsilon_{\Theta}{}^{o} = \frac{-6h_1 (M_{\Theta} - \mu M_r)}{Eh^3}. \tag{9}$$

§ 2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

Объектом экспериментального исследования являлась мартеновская листовая сталь марки 3 толщиной в 22 *мм* в отожженном состоянии. Размеры плиты в *мм*: $2R=55$, $2R_1=280$, $2R_2=60$, $h=6$, $h_1=18$. Прогибы измерялись на специально изготовленном стенде при помощи прогибомеров с двухмикронными индикаторами.

Для определения экспериментальным путем деформаций применялись как кольцевые, так и петлеобразные тензодатчики омического сопротивления.

Для нашей модели плиты мы имеем следующие данные: $E_1=E_2=E=2{,}0 \cdot 10^6$ *кг/см²*; $\mu=0{,}285$. Для сравнения опыты производились также над плитой с одним лишь внешним или внутренним ребром жесткости и над неподкрепленной кольцевой плитой.

В таблицах 1 и 2 приведены теоретические и экспериментальные значения максимальных прогибов и максимальных деформаций $\varepsilon^{o}{}_{\Theta}$ по внутреннему кольцу для разных ступеней нагрузок и для всех четырех плит.

Как явствует из таблиц 1 и 2, разница между экспериментальными и теоретическими значениями не превышает 7%.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. П. Тимошенко. Пластинки и оболочки. Гостехиздат (1948).
2. Г. Н. Савин и Н. П. Флейшман. Инженерный сборник. Изд АН СССР, т. VIII (1950).
3. Н. П. Флейшман. Ученые записки Львовского университета, т. XXII, сер. физико-математическая, вып. V (1953).
4. М. П. Шереметьев. Украинский математический журнал, т. V, № 1 (1953).

Г. Н. ГЕСТРИН

ОДНА ТЕОРЕМА О ЕДИНСТВЕННОСТИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОГО РЯДА

В 1928 г. Зигмунд доказал следующую теорему: пусть $\{\alpha_n\}$ — произвольная числовая последовательность, сходящаяся к нулю. Каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, можно указать такое множество E, мера которого не более ε и такое, что если на этом множестве сходится к нулю тригонометрический ряд $\sum_{1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$, коэффициенты которого стремятся к нулю быстрее, чем $\{a_n\}$, то тогда они равны нулю:

$$a_k = b_k = 0.$$

В настоящей заметке, опираясь на этот результат Зигмунда, мы доказываем такую теорему: пусть о двух последовательностях чисел $\{a_k\}$ и $\{b_k\}$ известно, что они убывают, как $\frac{1}{(\ln k)^r}$ $(r>1)$. Каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, можно указать такое открытое множество E, зависящее только от ε, что $|E| < \varepsilon$, и если тригонометрический ряд с коэффициентами a_k и b_k суммируем почти всюду на E к 0 методом Римана и там его частичные суммы равномерно ограничены суммируемой функцией, то для всех k: $a_k = b_k = 0$.

Лемма. Пусть на отрезке $[a, b]$ дана функция $\varphi(x)$, которая имеет на $[a, b]$ почти всюду Шварцеву производную $\varphi^{[\prime\prime]}(x)$, и пусть при достаточно малых h, $\left|\frac{\Delta_h^2 \varphi(x)}{4h^2}\right| < F(x) \in L$. Пусть далее $[p, q]$ — любой отрезок, лежащий внутри $[a, b]$ и в некоторых окрестностях концевых точек p и q существует непрерывная первая производная. Те же предположения делаются и относительно второй функции $\psi(x)$. Тогда справедливо равенство

$$\int_p^q \varphi^{[\prime\prime]}(\xi+x)\,\psi(\xi)\,d\xi = \varphi'(\xi+x)\,\psi(\xi) - \varphi(\xi+x)\cdot\psi'(\xi)\Big|_p^q + \int_p^q \varphi(x+\xi)\,\psi^{[\prime\prime]}(\xi)\,d\xi.$$

Доказательство этой леммы мы опускаем.

Для данного ряда $\sum_{1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$ строим функцию Римана:

$$\varphi(x) = -\sum_{1}^{\infty} \frac{a_k \cos kx + b_k \sin kx}{k^2}. \qquad (1)$$

Так как в силу предположения о скорости стремления к нулю коэффициентов a_k и b_k ряд $\sum_{1}^{\infty} \frac{-b_k \cos kx + a_k \sin kx}{k}$

сходится равномерно, то $\varphi(x)$ имеет повсюду непрерывную первую производную $\varphi'(x)$.

Далее на множестве E мы, очевидно, имеем:

$$\frac{\Delta_h^2\varphi(x)}{4h^2} = \sum_1^\infty (a_k\cos kx + b_k\sin kx)\left(\frac{\sin kx}{kh}\right)^2 =$$

$$= \sum_1^\infty S_k(x)\left\{\left(\frac{\sin(k-1)h}{(k-1)h}\right)^2 - \left(\frac{\sin kh}{kh}\right)^2\right\};$$

$$\left|\frac{\Delta_h^2\varphi(x)}{4h^2}\right| < F(x)\cdot\sum_1^\infty\left|\left(\frac{\sin(k-1)h}{(k-1)h}\right)^2 - \left(\frac{\sin kh}{kh}\right)^2\right| <$$

$$< F(x)\sum_{\to}^\infty\int_{(k-1)h}^{kh}\left|\frac{d}{dz}\left(\frac{\sin z}{z}\right)^2\right|dz < F(x)\int_0^\infty\left|\frac{d}{dz}\left(\frac{\sin z}{z}\right)^2\right|dz.$$

Берем теперь в теореме Зигмунда в качестве последовательности $\{\alpha_n\}$ последовательность $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ и строим множество Зигмунда меры, меньшей, чем $\frac{\varepsilon}{6}$, где ε наперед задано.

Покроем это множество системой интервалов $e_1, e_2, e_3, \ldots$ так, чтобы $\sum_1^\infty \operatorname{mes} e_i < \frac{\varepsilon}{3}$. Будем считать, что интервалы занумерованы в порядке убывания длин. Растянем каждый из этих интервалов в три раза концентрически. Полученные таким образом интервалы обозначим через $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$. Утверждается, что всякое множество $\mathfrak{M} \subset \sum_1^\infty \mu_i$ и имеющее ту же меру, что и $\sum_1^\infty \mu_i$, есть искомое множество. Очевидно, что $\left|\sum_1^\infty \mu_i\right| < \varepsilon$. Для доказательства каждый из интервалов e_i передвинем таким образом, чтобы центр его попал в начало координат. Так как они были занумерованы в порядке убывания длин, то получаем систему вложенных интервалов, $(-\alpha_i, +\alpha_i) = \bar{e}_i$, стягивающуюся к 0. Пусть функция $U(\xi)$ дважды непрерывно дифференцируема и обладает следующими свойствами:

$$\begin{cases} U(\pm\alpha_i) = \pm\alpha_i \\ U'(\pm\alpha_i) = 0. \end{cases}$$

К паре функций $\varphi(x+\xi)$ и $U(\xi)$ применим доказанную выше лемму:

$$\int\limits_{-\alpha_i}^{+\alpha_i} \varphi^{[''|}(\xi + x)\, U(\xi)\, d\xi =$$

$$= \varphi'(\xi + x)\, U(\xi)\Big|_{-\alpha_i}^{+\alpha_i} - \varphi(\xi + x)\, U'(\xi)\Big|_{-\alpha_i}^{+\alpha_i} + \int\limits_{-\alpha_i}^{+\alpha_i} \varphi(\xi + x)\, U''(\xi)\, d\xi.$$

При этом точка $x \in e_i$. Значит, точка $\xi + x \in \mu_i$. Но почти всюду на $\mu^i\, \varphi^{[''|}(t) = 0$, то есть мы имеем:

$$\varphi'(\xi + x)\, U(\xi)\Big|_{-\alpha_i}^{+\alpha_i} - \varphi(\xi + x)\, U'(\xi)\Big|_{-\alpha_i}^{+\alpha_i} + \int\limits_{-\alpha_i}^{+\alpha_i} \varphi(x + \xi)\, U''(\xi)\, d\xi.$$

Для всякого $x \in e_i$. Важно заметить, что это же самое равенство выполняется и для всех $x \in e_k$, где $k < i$. Действительно, т. к. $\xi \in \bar{e}_i$, то оно принадлежит и всякому $\bar{e}_k$ в силу вложенности. Но тогда $\xi + x \in \mu_k$ и формула сохраняется. Далее имеем:

$$U''(0) = \lim_{\alpha_i \to 0} \frac{U'(+\alpha_i) - U'(-\alpha_i)}{2\alpha_i} = 0.$$

Деля обе части последнего равенства на $2\alpha_i$ и переходя к пределу при $\alpha_i \to 0$, найдем

$$\varphi'(x) + \lim_{\alpha_i \to 0} \frac{1}{2\alpha_i} \int\limits_{-\alpha_i}^{+\alpha_i} \varphi(x + \xi)\, U''(\xi)\, d\xi = 0.$$

$$\left| \frac{1}{2\alpha_i} \int\limits_{-\alpha_i}^{+\alpha_i} \left\{ \varphi(x + \xi) - \varphi(x) \right\} U''(\xi)\, d\xi + \right.$$

$$\left. + \varphi(x) \frac{1}{2\alpha_i} \int\limits_{-\alpha_i}^{+\alpha_i} U''(\xi)\, d\xi \right| = \left| \frac{1}{2\alpha_i} \int\limits_{-\alpha_i}^{+\alpha_i} \left\{ \varphi(x + \xi) - \right. \right.$$

$$-\varphi(x)\Big\}\, U''(\xi)\, d\xi\Big| < \varepsilon \max_{[-\alpha_i, +\alpha_i]}\Big| U''(\xi)\Big| .$$

Но так как $U''(\xi)$ непрерывна, а $U''(0) = 0$, то находим окончательно: $\varphi'(x) = 0$, когда $x \in \mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$. Следовательно, равенство $\sum_{1}^{\infty} \frac{a_k \sin kx - b_k \cos kx}{k} = 0$ выполнено и на множестве Зигмунда. Отсюда, по теореме Зигмунда, $a_k = b_k = 0$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

А. Зигмунд. Contribution á l'uricité du développement trigonometrique. Math. Zeitschr., 24, 40—46 (1926).

Д. В. ГРИЛИЦЬКИЙ

ПРО КРУЧЕННЯ АНІЗОТРОПНИХ ВАЛІВ ЗМІННОГО ПЕРЕРІЗУ

Задача про кручення анізотропного вала, обмеженого поверхнею обертання, вперше була розв'язана С. Г. Лехніцьким [1] для часткового випадку циліндричної анізотропії: трансверсально-ізотропної. В монографії [2] Лехніцький поширює цей розв'язок на більш загальний випадок циліндричної анізотропії: всі радіальні площини є площинами пружної симетрії, і вісь анізотропії співпадає з геометричною віссю вала. При цих допущеннях тіло обертання залишається тілом обертання і в деформованому стані. Причому С. Г. Лехніцький розв'язує задачу за допомогою функції напружень.

В цій замітці ми будуємо розв'язок задачі при тих же допущеннях за допомогою другої функції, функції зміщень, а також наводимо один приклад.

Нехай маємо вал обертання з циліндричною анізотропією виду: вісь анізотропії співпадає з геометричною віссю вала, і всі радіальні площини є площинами пружної симетрії. На кінцях діють зусилля, які приводяться до взаємо зрівноважуючих скручуючих моментів M. Бічна поверхня вала вільна від зовнішніх напружень. Потрібно визначити напружений та деформований стан у валі, який перебуває під дією скручуючих моментів.