$$-\varphi(x)\Big\} U''(\xi)\,d\xi\Big| < \varepsilon \max_{[-\alpha_i,\,+\alpha_i]}\Big|U''(\xi)\Big| .$$

Но так как $U''(\xi)$ непрерывна, а $U''(0) = 0$, то находим окончательно: $\varphi'(x) = 0$, когда $x \in \mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$. Следовательно, равенство $\sum_1^\infty \frac{a_k \sin kx - b_k \cos kx}{k} = 0$ выполнено и на множестве Зигмунда. Отсюда, по теореме Зигмунда, $a_k = b_k = 0$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

А. Зигмунд. Contribution á l'uricité du développement trigonometrique. Math. Zeitschr., 24, 40—46 (1926).

Д. В. ГРИЛИЦЬКИЙ

ПРО КРУЧЕННЯ АНІЗОТРОПНИХ ВАЛІВ ЗМІННОГО ПЕРЕРІЗУ

Задача про кручення анізотропного вала, обмеженого поверхнею обертання, вперше була розв'язана С. Г. Лехніцьким [1] для часткового випадку циліндричної анізотропії: трансверсально-ізотропної. В монографії [2] Лехніцький поширює цей розв'язок на більш загальний випадок циліндричної анізотропії: всі радіальні площини є площинами пружної симетрії, і вісь анізотропії співпадає з геометричною віссю вала. При цих допущеннях тіло обертання залишається тілом обертання і в деформованому стані. Причому С. Г. Лехніцький розв'язує задачу за допомогою функції напружень.

В цій замітці ми будуємо розв'язок задачі при тих же допущеннях за допомогою другої функції, функції зміщень, а також наводимо один приклад.

Нехай маємо вал обертання з циліндричною анізотропією виду: вісь анізотропії співпадає з геометричною віссю вала, і всі радіальні площини є площинами пружної симетрії. На кінцях діють зусилля, які приводяться до взаємо зрівноважуючих скручуючих моментів M. Бічна поверхня вала вільна від зовнішніх напружень. Потрібно визначити напружений та деформований стан у валі, який перебуває під дією скручуючих моментів.

Віднесемо вал до циліндричної системи координат, сумістивши вісь Z з віссю вала. Рівняння узагальненого закону Гука в циліндричних координатах для цього випадку анізотропії запишуться таким чином:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_r &= a_{11}\sigma_r + a_{12}\sigma_\Theta + a_{13}\sigma_z + a_{15}\tau_{rz},\\
\varepsilon_\Theta &= a_{12}\sigma_r + a_{22}\sigma_\Theta + a_{23}\sigma_z + a_{25}\tau_{rz},\\
\varepsilon_z &= a_{13}\sigma_r + a_{23}\sigma_\Theta + a_{33}\sigma_z + a_{35}\tau_{rz},\\
\gamma_{rz} &= a_{15}\sigma_r + a_{25}\sigma_\Theta + a_{35}\sigma_z + a_{55}\tau_{rz},\\
\gamma_{\Theta z} &= a_{44}\tau_{\Theta z} + a_{46}\tau_{\Theta r},\\
\gamma_{\Theta r} &= a_{46}\tau_{\Theta z} + a_{66}\tau_{\Theta r}.
\end{aligned} \tag{1}$$

Приєднаємо до рівнянь узагальненого закону Гука рівняння рівноваги суцільного середовища в циліндричних координатах при відсутності об'ємних сил:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{\Theta r}}{\partial\Theta} + \frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\Theta}{r} = 0,\\
&\frac{\partial\tau_{\Theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_\Theta}{\partial\Theta} + \frac{\partial\tau_{\Theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\Theta}}{r} = 0,\\
&\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{\Theta z}}{\partial\Theta} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0.
\end{aligned} \tag{2}$$

Так само, як і у випадку ізотропного тіла припустимо, що

$$U_r = 0, \; W = 0, \; U_\Theta = r\varphi(r, z), \tag{3}$$

де U_r — зміщення в радіальному напрямку, W — зміщення в напрямку осі z, U_Θ — тангенціальне зміщення; функція $\varphi(r, z) = \frac{U_\Theta}{r}$ називається функцією зміщень.

Із співвідношень

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_r = \frac{\partial U_r}{\partial r}, \; \varepsilon_\Theta = \frac{1}{r}\frac{\partial U_\Theta}{\partial\Theta} + \frac{U_r}{r}, \; \varepsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z},\\
&\gamma_{rz} = \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial U_r}{\partial z}, \; \gamma_{\Theta z} = \frac{\partial U_\Theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial\Theta},\\
&\gamma_{r\Theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial U_r}{\partial\Theta} + \frac{\partial U_\Theta}{\partial r} - \frac{U_\Theta}{r},
\end{aligned}$$

враховуючи (3), одержуємо:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_r = \varepsilon_\Theta = \varepsilon_z = \gamma_{rz} = 0,\\
&\gamma_{\Theta z} = r\frac{\partial\varphi}{\partial z}, \quad \gamma_{r\Theta} = r\frac{\partial\varphi}{\partial r}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Із рівнянь (1), при враховуванні (5), випливає, що $\sigma_r = \sigma_\Theta = \sigma_z = \tau_{rz} = 0$; відмінними від нуля будуть лише дві складові напруження $\tau_{\Theta z}$ і $\tau_{r\Theta}$. Три рівняння рівноваги (2) зводяться до одного:

$$\frac{\partial \tau_{r\Theta}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{\Theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\Theta}}{r} = 0. \qquad (6)$$

Із (5) і останніх двох співвідношень (1) знаходимо:

$$\tau_{\Theta z} = \frac{r}{a_{44}a_{66} - a^2_{46}} \left(a_{66} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - a_{46} \frac{\partial \varphi}{\partial r}\right),$$

$$\tau_{r\Theta} = \frac{r}{a_{44}a_{66} - a^2_{46}} \left(a_{44} \frac{\partial \varphi}{\partial r} - a_{46} \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right). \qquad (7)$$

Підставляючи вирази для напружень (7) в рівняння рівноваги (6), одержимо рівняння, якому задовольняє функція зміщень:

$$a_{44} r \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} - 2a_{46} r \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial z} + a_{66} r \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + 3a_{44} \frac{\partial \varphi}{\partial r} -$$

$$- 3a_{46} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0. \qquad (8)$$

Умова на бічній поверхні запишеться:

$$\tau_{\Theta z} \cos(n, z) + \tau_{r\Theta} \cos(n, r) = 0. \qquad (9)$$

Але оскільки

$$\cos(n, r) = \frac{dz}{ds}, \ \cos(n, z) = -\frac{dr}{ds},$$

(де s — дуга меридіана), то із співвідношення (9) отримуємо:

$$\frac{dz}{dr} = \frac{a_{66} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - a_{46} \frac{\partial \varphi}{\partial r}}{a_{44} \frac{\partial \varphi}{\partial r} - a_{46} \frac{\partial \varphi}{\partial z}}. \qquad (10)$$

Як бачимо, задача звелася до визначення функції $\varphi(r, z)$, яка задовольняє рівнянню (8) і граничній умові (10).

Введемо нові змінні ϱ і ζ, які зв'язані з r і z залежностями [2]:

$$\varrho = r, \ \zeta = \frac{z + mr}{\sqrt{n^2 - m^2}}, \qquad (11)$$

де

$$n = \sqrt{\frac{a_{66}}{a_{44}}}, \quad m = \frac{a_{46}}{a_{44}}. \qquad (12)$$

Із (11) знаходимо обернені співвідношення:

$$r = \varrho, \ z = \sqrt{n^2 - m^2}\ \zeta - m\varrho. \tag{13}$$

В нових змінних функція буде задовольняти рівнянню:

$$\varrho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \varrho^2} + 3 \frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} + \varrho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} = 0 \tag{14}$$

і граничній умові:

$$\frac{d\zeta}{d\varrho} = \frac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial \zeta}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial \varrho}}. \tag{15}$$

Рівняння (14) і (15) відповідають задачі про кручення ізотропного стрижня.

Задачу можна розв'язувати як прямим, так і напівоберненим методом. При прямому методі розв'язання функція $\varphi(\varrho, \zeta)$ повинна бути визначена в області, яка одержується з області меридіонального перетину заданого анізотропного вала, шляхом афінного перетворення (11).

При розв'язанні задачі напівзворотним методом ми задаємося яким-небудь розв'язком рівняння (14), а із граничної умови (15) з відомою правою частиною знаходимо контур вала, який відповідає заданому розв'язку.

Зауважимо також, що при напівзворотному методі розв'язування задачі відповідний анізотропний вал може не бути тілом обертання, якщо ізотропний вал був тілом обертання. Отже, для того, щоб тіло обертання залишилося тілом обертання і після деформації, необхідно покласти

$$m = 0, \tag{16}$$

тобто

$$a_{46} = 0. \tag{16^1}$$

Умова (16)^1 вказує на те, що крім радіальних площин пружної симетрії, повинні існувати площини пружної симетрії і нормальні до осі вала, тобто матеріал вала повинен бути ортотропним.

Отже, відповідний анізотропний вал, як це випливає із співвідношень (13) при умові (16), буде того ж поперечного перетину, що і ізотропний вал, але видовжений або вкорочений по осі ζ в n число разів.

Наведемо приклад.

Візьмемо розв'язок рівняння (14) у вигляді [3]:

$$\varphi = Al^{p\zeta}\varrho^{-1} J_1(q\varrho), \tag{17}$$

де q — довільна константа, яка вибирається так, що $(q\zeta)$

і $(q\varrho)$ — безрозмірні координати, $J_1(q\varrho)$ — функція Бесселя першого порядку першого роду, A — довільна константа.

Графічно інтегруючи граничну умову (15), Н. Рейснер і Г. Венагель одержують графік твірної кривої ізотропного вала, коли $(q\varrho)$ змінюється в границях від 0 до 3,832.

Функцію зміщень для відповідного оротропного вала ми одержимо, заміняючи у виразі (17) ζ на $\frac{z}{n}$. Твірна крива анізотропного вала, як це випливає з наведених міркувань, буде мати ту ж форму, що й твірна крива ізотропного вала, якщо тільки ми замінимо безрозмірну координату $(q\zeta)$ новою координатою $\left(\frac{qz}{n}\right)$, а $(q\varrho)$ на (qr).

Маючи функцію зміщень, зміщення і напруження визначаться за вищенаведеними формулами:

$$\varphi = Al^{\frac{qz}{n}}\, r^{-1} J_1(qr),$$

$$U_\theta = Ae^{\frac{qz}{n}} J_1(qr), \tag{18}$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{Aq}{a_{44}\, n} e^{\frac{qz}{n}} J_1(qr),$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{Aq}{a_{66}} e^{\frac{qz}{n}} J_2(qr)$$

Константа A визначається з тієї умови, що момент дотичних зусиль у будь-якому поперечному перерезі відносно осі z повинен бути рівний моменту M, який прикладений до кінців вала:

$$A = \frac{Mq^2\, n\, a_{44}}{11{,}8\pi}. \tag{19}$$

ЛІТЕРАТУРА

1. С. Г. Лехницкий. Симметричная деформация и кручение тела вращения с анизотропией частного вида, Прикладная математика и механика, т. IV, в. 3 (1940).
2. С. Г. Лехницкий. Теория упругости анизотропного тела (1950).
3. H. J. Reissner and &. G. J. Wennagel. Iorsion of Nancylindrical Shafts of Circular Cross Section, Journal of Applied Mechanics, sept., vol. 17, № 3 (1950).