В. Я. СКОРОБОГАТЬКО

АНАЛОГ МЕТОДА ПРИБЛИЖЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ АКАДЕМИКА С. А. ЧАПЛЫГИНА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В работе [3] было установлено, что первая краевая задача, поставленная для эллиптического уравнения

$$Lu = \sum_{k,\,l=1}^{n} a_{kl} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l} + \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + cu = 0 \qquad (1)$$

разрешима в данной области D, если только в этой области могут быть определены функции $B_1,\ldots, B_n$, удовлетворяющие неравенству

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & A_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} & A_n \\ A_1 & \ldots & A_n & R \end{vmatrix} \geqslant 0, \text{ где } \quad A_l = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial a_{kl}}{\partial x_k} - b_l + B_l, \quad R = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial B_i}{\partial x_i} - C \qquad (2)$$

Данные функции предполагались достаточно гладкими, а функции $B_1,\ldots, B_n$, вообще говоря, непрерывными с кусочно непрерывными первыми производными.

Коэффициент C не предполагался неположительным.

В настоящей заметке устанавливается связь между результатами, изложенными в [3] и результатами С. А. Чаплыгина [1]. Обозначим через C_2 класс функций дважды непрерывно дифференцируемых в D с непрерывными первыми производными в $\overline{D}$.

Т е о р е м а 1. Если в конечной области D с границей S типа Ляпунова оператора Lu удовлетворяет неравенству $Lu < 0$, $u/s = 0$, $u \in C_2$ и в этой области выполняется неравенство (2), то в области D функция $u \geqslant 0$. Считаем коэффициенты a_{kl} непрерывно дифференцируемыми, b_j, C — непрерывными. Отметим основное для доказательства теоремы 1.

Предположим, что в некоторой точке $y \in D$ функция $u(y) < 0$, но тогда, вследствие непрерывности $u < 0$ и в некоторой области $D^1 \in D$, содержащей точку y, и на границе S^1 области D^1 функция $u=0$. Допустим сначала, что граница S^1 области D^1 столь гладка, что возможно применять формулу

Остроградского. Составим выражение uLu и проинтегрируем его по частям, предварительно положив

$$c = c_o + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial B_j}{\partial x_j}.$$

Получим

$$\int \underset{D'}{(n)} \int u\, Lud\tau = -\int (n \underset{S'}{-} 1) \int upud\sigma -$$

$$-\int \underset{D'}{(n)} \int A\left(u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) d\tau, \qquad (3)$$

$A\left(u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$ — квадратическая форма, неотрицательная из-за условия (2). Интеграл $\int (n \underset{S'}{-} 1) \int upud\sigma = 0$, так как $u/s' = 0$. Левая часть формулы (3) строго положительна, а правая неположительна. Полученное противоречие доказывает теорему.

Доказательство теоремы 1 можно уточнить, если провести предыдущее рассуждение для области с кусочно гладкой границей, близкой к S'. Уточнение доказательства проводится на основании следующих соображений.

Из условия $Lu < 0$ следует, что какая-либо произвольная $\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l} \neq 0$ в точках $y \in S'$, где $\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0$, $i = 1, \ldots, n$.

Множество точек $y \in S'$, в которых $\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0$, $i = 1, \ldots, n$, обозначим через G. Далее, в некоторой окрестности точки $y \in G$ все точки $x \in G$ расположены на гладкой поверхности $x_k = f_k(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n)$ (по теореме о неявной функции) нетрудно заметить, что каждую точку $y \in G$ можно заключить в область $F_y^{\varepsilon\eta}$, определяемую неравенствами

$$f_k - \varepsilon \leqslant x_k \leqslant f_k + \varepsilon,$$

$$\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_{k-1} - y_{k-1})^2 + (x_{k+1} - y_{k+1})^2 + \ldots + (y_n - x_n)^2} \leqslant \eta;$$

$$\varepsilon,\ \eta = \text{const}.$$

По лемме Бореля множество G помещается в конечном числе областей $F_y^{\varepsilon\eta}$. Каждая область $F_y^{\varepsilon\eta}$ разбивается плоскостями, перпендикулярными к координатным осям ox_i, $i = 1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n$ на конечное число частей $f_y^{\varepsilon\eta}$; множество G можно заключить в замыкание области $T''' = \sum_{y} f_y^{\varepsilon\eta}$, состоящей из тех областей $f_y^{\varepsilon\eta}$, которые содержат точки $y \in G$. Ясно, что область $D'' = D' - T'''$ имеет кусочно гладкую границу.

Нетрудно увидеть теперь, что величина $\left|\int (n - 1) \int_{S''} u\, pud\sigma\right|$ может принять сколь угодно малое значение при достаточно большом числе областей $f_y^{\varepsilon\eta}$ и достаточно малом ε. Теорема 1 обобщает теорему Чаплыгина [1, стр. 501]. Неравенство (2) назовем защитным.

Заметим, что если (1) самосопряженное уравнение и коэффициент $C < 0$ в области D, то функции $B_1 = \ldots = B_n \equiv 0$ удовлетворяют неравенству (2) и, следовательно, теорема 1 имеет место.

Последнее замечание объясняет слова С. А. Чаплыгина, относящиеся к этому случаю: «Любопытно отметить, что никакого ограничения, вроде предела приложимости, который появляется при применении основной теоремы, на этот раз мы не встречаем» [1, стр. 503].

Предел приложимости теоремы 1 как раз возникает тогда, когда коэффициент C способен принимать и положительные значения.

Следствие теоремы 1. Если $f_1 = Lu_1 > Lu_2 = f_2$, $\underset{i=1,2}{u_i} \in C_2$ и $u_1 = u_2/_s$, то везде в области D функция $u_1 \leqslant u_2$. При большей гладкости данных функций (эти условия перечислены в [3]) условие $Lu<0$ в формулировке теоремы 1 можно ослабить, заменив его условием $Lu \leqslant 0$, при этом утверждение теоремы сохраняется.

Используя идею К. В. Задираки [2], укажем метод приближенного решения 1-й краевой задачи, поставленной для уравнения $\Delta u + c(x_1, \ldots, x_n)\, u = 0$, предполагая соответствующее защитное неравенство выполненным. Пусть известны такие функции φ_1 и ω_1, принадлежащие классу C_2, что $\Theta_1 = \Delta\omega_1 + C\omega_1 \leqslant 0$ и $f_1 = \Delta\varphi_1 + C\varphi_1 \geqslant 0$, $\varphi_1 = \omega_1 = f$ на границе S области D. По теореме 1 везде в D выполняется неравенство $\varphi_1 \leqslant u \leqslant \omega_1$. Введем вспомогательные функции ξ и η по формулам $\varphi_1 + \eta = u$, $u + \xi = \omega_1$. Рассмотрим уравнения

$$\Delta\eta_1 + m\eta_1 + f_1 = 0, \qquad \eta_1/s = 0, \quad m = \min_D C$$
$$\Delta\xi_1 + m\xi_1 - \Theta_1 = 0, \qquad \xi_1/s = 0.$$

По теореме 1 заключаем, что $\eta \geqslant \eta_1 \geqslant 0$, $\xi \geqslant \xi_1 \geqslant 0$. Поэтому

$$\varphi_1 \leqslant \varphi_2 \leqslant u \leqslant \omega_2 \leqslant \omega_1,$$

где

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \eta_1, \ \omega_2 = \omega_1 - \xi_1$$

функции φ_2 и ω_2 принимаем за вторые приближения и решения.

Вообще n-ые приближения определяются формулами

$$\varphi_n = \varphi_{n-1} + \eta_{n-1} = \varphi_1 + \sum_{i=1}^{n-1} \eta_i,$$

$$\omega_n = \omega_{n-1} - \xi_{n-1} = \omega_1 - \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i.$$

Функции η_{n-1} и ξ_{n-1} —решения краевых задач

$$\Delta\eta_{n-1} + m\eta_{n-1} + f_{n-1} = 0, \quad \eta_{n-1}/s = 0$$

где

$$f_{n-1} = \Delta\varphi_{n-1} + c\varphi_{n-1} \geqslant 0$$

$$\Delta\xi_{n-1} + m\xi_{n-1} - \Theta_{n-1} = 0, \quad \xi_{n-1}/s = 0 \quad \Theta_{n-1} = \Delta\omega_{n-1} + c\omega_{n-1} \leqslant 0.$$

Между приближениями искомого решения выполняются неравенства

$$\varphi_1 \leqslant \varphi_2 \leqslant \ldots \leqslant \varphi_n \leqslant u \leqslant \omega_n \leqslant \omega_{n-1} \leqslant \ldots \leqslant \omega_1,$$

Если в области D выполняется неравенство

$$\frac{1}{\max\limits_{(x)\in D} \int\limits_D (n) \int G_1(x, \xi)\, d\xi} > M, \; M = \max_D |C|,$$

в котором $G_1(x, \xi)$ — функция Грина оператора Лапласа для первой краевой задачи в области D, то можно доказать и сходимость вышеуказанного процесса. В этом случае оценка быстроты сходимости следующая:

$$|\varphi_n - \omega_n| \leqslant p_2 \frac{(M - m)^{n-1} R^{n-1}}{(1 - |m| R)^{n-1} (1 - MR)}, \; m = \min C$$

$$p_2 = \max_D |f_1 - \Theta_1|. \quad R = \max_{(x)\in D} \int\limits_D (n) \int G(x, \xi)\, d\xi, \tag{4}$$

Предложенный метод применим как к обыкновенным уравнениям второго порядка, так и к общему эллиптическому уравнению в частных производных. В последнем случае η_i и ξ_i являются решениями краевых задач

$$\sum_{k,l=1}^{n} a_{kl} \frac{\partial^2 \eta_i}{\partial x_k \partial x_l} + 2 \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial \eta_i}{\partial x_j} + m\eta_i = f_i, \; \eta_i/s = 0$$

$$\sum_{\kappa,l=1}^{n} a_{kl} \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial x_k \, \partial x_l} + 2 \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial \xi_j}{\partial x_j} + m\xi_i = \Theta_i, \; \xi_i/s = 0.$$

Этот метод применим для приближенного нахождения решений и других краевых задач для эллиптического уравнения, только границы его применимости определяются сложнее.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. А. Чаплыгин. Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. М. (1919). Избранные труды по механике и математике. Гостехиздат (1954).
2. К. В. Задирака. Приближенное интегрирование линейных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами методом С. А. Чаплыгина. Украинский математический журнал, т. IV, № 3 (1952).
3. В. Я. Скоробогатько. Единственность и существование решений некоторых краевых задач для дифференциального уравнения эллиптического типа второго порядка. Автореферат диссертации. Львов (1954).

А. Н. КОСТОВСКИЙ

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ ОДНИМ ЦИРКУЛЕМ (С УСЛОВИЕМ, ЧТО ВСЕ ОКРУЖНОСТИ ПРОХОДЯТ ЧЕРЕЗ ОДНУ И ТУ ЖЕ ТОЧКУ)

Условимся окружность с центром в точке O и радиусом равным $AB = r$ обозначать символом (O, AB) или (O, r). Вместо символа (O, OB) будем писать (O, B). Кроме того, условимся считать законной для циркуля следующую операцию: через данную точку A провести окружность радиуса a, центр которой лежит на данной кривой L. Для этого делаем раствор циркуля равным a, ставим острие карандаша в точку A, затем, не изменяя раствора циркуля, устанавливаем вторую ножку так, чтобы острие иголки попало в некоторую точку N данной кривой L. Окружность (N, a) — искомая.

Теперь нетрудно решить следующую задачу: построить отрезок в 3^k $(k = 1, 2,...)$ раз больше данного отрезка AB так, чтобы все окружности в этом построении проходили через точку A. Для построения описываем окружность (B, A), делаем раствор циркуля равным AB и ставим острие карандаша циркуля в точку A; острие иголки определит на окружности (B, A) сначала точку E [описываем при этом окружность $(E,$