$$\sum_{\kappa,l=1}^{n} a_{kl}\frac{\partial^2 \xi_i}{\partial x_k\,\partial x_l}+2\sum_{j=1}^{n} b_j\frac{\partial \xi_j}{\partial x_j}+m\xi_i=\Theta_i,\ \xi_i/s=0.$$

Этот метод применим для приближенного нахождения решений и других краевых задач для эллиптического уравнения, только границы его применимости определяются сложнее.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. А. Чаплыгин. Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. М. (1919). Избранные труды по механике и математике. Гостехиздат (1954).

2. К. В. Задирака. Приближенное интегрирование линейных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами методом С. А. Чаплыгина. Украинский математический журнал, т. IV, № 3 (1952).

3. В. Я. Скоробогатько. Единственность и существование решений некоторых краевых задач для дифференциального уравнения эллиптического типа второго порядка. Автореферат диссертации. Львов (1954).

А. Н. КОСТОВСКИЙ

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ ОДНИМ ЦИРКУЛЕМ (С УСЛОВИЕМ, ЧТО ВСЕ ОКРУЖНОСТИ ПРОХОДЯТ ЧЕРЕЗ ОДНУ И ТУ ЖЕ ТОЧКУ)

Условимся окружность с центром в точке O и радиусом равным $AB = r$ обозначать символом (O, AB) или (O, r). Вместо символа (O, OB) будем писать (O, B). Кроме того, условимся считать законной для циркуля следующую операцию: через данную точку A провести окружность радиуса a, центр которой лежит на данной кривой L. Для этого делаем раствор циркуля равным a, ставим острие карандаша в точку A, затем, не изменяя раствора циркуля, устанавливаем вторую ножку так, чтобы острие иголки попало в некоторую точку N данной кривой L. Окружность (N, a) — искомая.

Теперь нетрудно решить следующую задачу: построить отрезок в 3^k $(k = 1, 2,...)$ раз больше данного отрезка AB так, чтобы все окружности в этом построении проходили через точку A. Для построения описываем окружность (B, A), делаем раствор циркуля равным AB и ставим острие карандаша циркуля в точку A; острие иголки определит на окружности (B, A) сначала точку E [описываем при этом окружность $(E,$

AB)], а затем точку E_1 [описываем теперь окружность (E_1, AB)]; проведенные окружности пересекут окружность (B, A) в точках C и C_1. Точка B_1 пересечения окружностей (C, AB) и (C_1, AB) — искомая. Отрезок $AB_1 = 3AB$. Аналогично построим отрезок $AB_2 = 3\ AB_1 = 9\ AB$ и т. д. $AB_k = 3^k AB$. Все окружности, проведенные в этом построении, проходят через точку A.

Пусть дана окружность инверсии (O, r) и точка X. Если $OX > \frac{r}{2}$, то с помощью одного циркуля можно построить точку X^1, инверсную точке X, с условием, что все окружности проведенного построения будут проходить через одну точку — центр инверсии O*. Если же $OX \leqslant \frac{r}{2}$, то приходится предварительно строить точку X_1 с условием $OX_1 = nOX > \frac{r}{2}$. Для того чтобы и в этом случае все окружности построения проходили через центр инверсии, будем вместо точки X_1 разобранным выше способом строить точку $У_1$ с условием, что $OУ_1 = 3^к OX > \frac{r}{2}$.

Теперь нетрудно усмотреть, что в построении одним циркулем окружности, инверсной данной прямой, и в построении точек прямой, инверсной данной окружности, проходящей через центр инверсии O, все окружности будут проходить через центр инверсии O.**

Я. Штейнер показал, что все задачи на построение, разрешимые циркулем и линейкой, могут быть решены и одной линейкой, если в плоскости чертежа дана постоянная окружность (O, R) и ее центр.***

Предположим теперь, что данная задача на построение решена методом Штейнера. В результате этого построения в плоскости чертежа получим фигуру Φ, состоящую, кроме одной окружности (O, R), только из прямых линий. Если теперь за окружность инверсии взять произвольную окружность (O, r) с центром, не лежащим ни на одной из прямых и на окружности (O, R) фигуры Φ, то ей инверсная фигура Φ' будет состоять только из окружностей, за исключением двух [окружности инверсии (O, r) и окружности, инверсной вспомогательной (O, R)], проходящих через одну и ту же точку — центр инверсии O.

Возьмем теперь окружность инверсии так, чтобы она пересекала вспомогательную окружность в построении Штейнера под прямым углом. Для этого на вспомогательной окружности (O, R) берем две произвольные точки K и M и проводим окружность (M, K), пересекающую окружность (O, R)

* См. [1], § 20.

** См. [1], § 20.

*** См. [2].

в точке P; если теперь описать окружность (K, P) в пересечении с окружностью (M, K), получим точку O; как нетрудно доказать, (O, K) пересекает окружность (O, R) под прямым углом. Можно считать, что точка O не лежит ни на одной из прямых фигуры Φ. В противном случае, изменяя положение точек K и M, следует построить другую точку O. Примем окружность (O, K) за окружность инверсии и обозначим ее через (O, r) $(OK=r)$. Построим фигуру Φ', инверсную фигуре Φ построения Штейнера; окружность (O, R) сама себе инверсна, так как пересекает окружность инверсии под прямым углом, следовательно, при построении фигуры Φ' придется строить только образы (окружности, проходящие через центр инверсии O), инверсные прямым фигуры Φ.

Следовательно, каждую геометрическую задачу на построение, разрешимую с помощью циркуля и линейки, можно всегда решить одним циркулем так, что не только окружности фигуры Φ', а *все* окружности, в том числе и окружности, с помощью которых производится построение фигуры Φ', будут проходить через *одну* и ту же точку плоскости O; исключение составляют только две окружности (окружности инверсии (O, r) и вспомогательная окружность (O, R) построения Штейнера), которые не проходят через точку O. Заметим, что окружности (M, K) и (K, P), которые проводились для построения центра инверсии O, также проходят через точку O.

Пусть некоторая задача на построение решена методом Штейнера; в результате получим фигуру Φ, состоящую, кроме одной окружности (O, R), только из прямых линий. Если за окружность инверсии принять вспомогательную окружность (O, R) и построить фигуру Φ', инверсную фигуре Φ, то получим фигуру, состоящую из *окружностей* и *прямых линий**, причем *все* эти прямые и окружности, за исключением окружности (O, R), будут проходить через одну и ту же наперед заданную точку O.

Таким образом, каждую геометрическую задачу на построение можно всегда решить *циркулем* и *линейкой* так, что *все* окружности и прямые этого построения, за исключением одной окружности [окружности инверсии $(O\ R)$], будут проходить через одну и ту же произвольно выбранную точку плоскости O.

* А. Адлер берет вспомогательную окружность (O, R) за окружность инверсии и утверждает: «Не только возможно, как это показал еще Маскерони, решить все геометрические конструктивные задачи второй степени при исключительном пользовании циркулем, но можно даже поставить еще условие, *чтобы все входящие в построение окружности, за исключением одной из них, проходили через одну и ту же произвольно выбранную точку*». Ошибочность этого утверждения следует из того, что все задачи на построение, разрешимые циркулем и линейкой, решить невозможно одной линейкой, если центр вспомогательной окружности O неизвестен, т. е., если через центр O вспомогательной окружности не проводить прямых линий, которые, как известно, сами себе инверсны, т. е. будут принадлежать фигуре Φ'.

Допустим теперь, что при решении геометрических задач на построение одним циркулем допускается однократное употребление линейки (или положим, что в плоскости чертежа имеется начерченная линейкой прямая линия AB). Возьмем произвольную окружность (O, r), центр O которой не лежит на прямой AB, за окружность инверсии и построим окружность (O', R), инверсную данной прямой AB. $R = OO'$, так как окружность (O', R) проходит через центр инверсии O. Решение любой задачи на построение методом Штейнера относительно окружности (O', R) даст фигуру Φ, состоящую только из прямых линий; ей инверсная фигура Φ' будет состоять из одних окружностей, проходящих через одну и ту же точку O. Конечно, при решении задачи методом Штейнера мы предполагаем, что ни одна из прямых, не прошла через точку O, лежащую на вспомогательной окружности (O', R); в противном случае за окружность инверсии (O, r) следует взять другую окружность. Если прямая линия AB не начерчена, а допускается однократное употребление линейки, то берем в плоскости произвольную окружность (O', R) в качестве вспомогательной и решаем задачу методом Штейнера. Затем на этой окружности берем произвольную точку O с одним только условием — чтобы она не лежала ни на одной из прямых фигуры Φ построения Штейнера. Радиусом $(r < 2R)$ описываем окружность, которая пересечет данную окружность (O', R) в точках A и B. Берем линейку и проводим прямую AB, которая будет инверсна окружности (O', R), если (O, r) принять за окружность инверсии. Дальше строим фигуру Φ', инверсную фигуре Φ.

Таким образом, если в плоскости чертежа начерчена прямая линия (допускается однократное употребление линейки), то *все* задачи на построение, разрешимые циркулем и линейкой, можно решить и одним циркулем, с условием, что все окружности этого построения, за исключением одной [окружности инверсии (O, r)] будут проходить через одну и ту же точку плоскости O. (Некоторая аналогия результату Штейнера для построений одной линейкой с постоянной окружностью).

Пусть, наконец, в плоскости чертежа задана (начерчена) фигура Ψ, состоящая только из прямых линий и отрезков (например, две параллельные прямые линии, или параллелограмм, или квадрат, или правильный многоугольник и т. д.). Предположим теперь, что какую-нибудь геометрическую задачу на построение мы решили методом Штейнера, приняв фигуру Ψ в качестве вспомогательной; тогда получим некоторый геометрический образ, некоторую фигуру Φ, состоящую только из прямых линий. Данная фигура Ψ будет частью фигуры Φ.

Возьмем произвольную окружность (O, r) с единственным условием, что центр O этой окружности не лежит ни на одной из прямых фигуры Φ, и примем ее за окружность инверсии. Строим фигуру Φ', инверсную фигуре Φ. Фигура Φ' будет состоять только из окружностей, проходящих через одну и ту же точку — центр инверсии O.

Итак, если в плоскости чертежа задана (начерчена) некоторая фигура, состоящая из прямых линий и отрезков, то все задачи на построение, которые можно решить методом Штейнера, принимая эту фигуру в качестве вспомогательной, всегда можно решить одним циркулем так, что *все* окружности, за исключением одной — окружности инверсии, будут проходить через одну и ту же произвольную точку плоскости O.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Адлер. Теория геометрических построений, Одесса (1924).
2. Я. Штейнер. Геометрические построения, выполняемые с помощью прямой линии и неподвижного круга, М. (1939).

А. Л. ГАРКАВИ

О КВАЗИАНАЛИТИЧЕСКИХ *(B)* ФУНКЦИЯХ

1. Обозначим через $B\{n_k\}$ класс квазианалитических (B) в смысле С. Н. Бернштейна [1] функций, для которых существует такая последовательность целых чисел $\{n'_k\}$, что

$$\frac{1}{A} < \frac{n_k}{n'_k} < A, (A = \text{const.};\ k = 1,\ 2, \ldots),$$

и

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[n'_k]{E_{n'_k}(f_1\,[a, b])} = \varrho < 1, \tag{1}$$

где $E_{n'_k}(f_1\,[a, b])$ — наилучшее приближение функции $f(x)$ многочленами степени n'_k на отрезке $[a, b]$, а $\{n_k\}$ — фиксированная последовательность целых чисел.

Классом квазианалитических $(Д)$ (в смысле Данжуа) функций назовем такую их совокупность, что если $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — любые принадлежащие ей функции, то их разность $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ также является функцией квазианалитической $(Д)$, т. е. удовлетворяет условию:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{M_n}} = \infty;\ M_n = \max_{[a,\ b]} |f^{(n)}(x)|. \tag{2}$$