из прямых фигуры Φ, и примем ее за окружность инверсии. Строим фигуру Φ', инверсную фигуре Φ. Фигура Φ' будет состоять только из окружностей, проходящих через одну и ту же точку — центр инверсии O.

Итак, если в плоскости чертежа задана (начерчена) некоторая фигура, состоящая из прямых линий и отрезков, то все задачи на построение, которые можно решить методом Штейнера, принимая эту фигуру в качестве вспомогательной, всегда можно решить одним циркулем так, что *все* окружности, за исключением одной — окружности инверсии, будут проходить через одну и ту же произвольную точку плоскости O.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Адлер. Теория геометрических построений, Одесса (1924).
2. Я. Штейнер. Геометрические построения, выполняемые с помощью прямой линии и неподвижного круга, М. (1939).

А. Л. ГАРКАВИ

О КВАЗИАНАЛИТИЧЕСКИХ *(В)* ФУНКЦИЯХ

1. Обозначим через $B\{n_k\}$ класс квазианалитических (B) в смысле С. Н. Бернштейна [1] функций, для которых существует такая последовательность целых чисел $\{n'_k\}$, что

$$\frac{1}{A} < \frac{n_k}{n'_k} < A, (A = \text{const.};\ k = 1,\ 2, \ldots),$$

и

$$\lim_{k \to \infty} \sqrt[n'_k]{E_{n'_k}(f_1 [a, b])} = \varrho < 1, \tag{1}$$

где $E_{n'_k}(f_1 [a, b])$ — наилучшее приближение функции $f(x)$ многочленами степени n'_k на отрезке $[a, b]$, а $\{n_k\}$ — фиксированная последовательность целых чисел.

Классом квазианалитических $(Д)$ (в смысле Данжуа) функций назовем такую их совокупность, что если $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — любые принадлежащие ей функции, то их разность $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ также является функцией квазианалитической $(Д)$, т. е. удовлетворяет условию:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{M_n}} = \infty;\ M_n = \max_{[a,\ b]} |f^{(n)}(x)|. \tag{2}$$

Теорема: а) Для того, чтобы все функции класса $B\{n_k\}$ являлись квазианалитическими ($Д$), необходимо и достаточно, чтобы существовала такая четная весовая, нормально возрастающая функция $F(x)$, что выполнимы неравенства —

$$\ln F(n_{k+1}) \leqslant n_k \quad (k = 1, 2, \ldots), \tag{A}$$

б) При этом все классы $B\{n_k\}$, для которых (A) выполнимо при одной и той же функции $F(x)$, образуют один класс квазианалитических ($Д$) функций.

Доказательство опирается на теорему С. Н. Бернштейна [2, 3], согласно которой ряд (2) расходится тогда и только тогда, когда существует такая четная весовая нормально возрастающая функция $F(x)$, что

$$E_n(f) \leqslant \frac{1}{F(n)} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Следствие I: Если $\frac{n_{k+1}}{n_k} \leqslant \ln n_k \ldots \ln_p n_k$, ($\ln_p n_k = \ln \ln_{p-1} n_k$; $p \geqslant 1$), то класс $B\{n_k\}$ квазианалитичен (D). Например, квазианалитичными ($Д$) являются классы, определяемые следующими последовательностями:

1) $n_k = k'$; 2) $n_k = k^k$; 3) $n_{k+1} = [n_k \ln n_n]$ ($n_1 = 3$) и т. д. (здесь всюду $n_{k+1} \leqslant n_k \ln n_k$).

Следствие II: Если две квазианалитические (B) функции, принадлежащие совокупности классов $B\{n_k\}$, для которых условие (A) выполняется при фиксированной функции $F(x)$, совпадают на произвольно малой части отрезка, то они тождественны на всем отрезке.

Следствие III: Не существует неоднозначной квазианалитической функции [1], все ветви которой принадлежат классам $B\{n_k\}$, для которых соотношение (A) выполнимо при одной и той же функции $F(x)$. Т. е. последовательности $\{n_k\}$ определяющие классы, которым принадлежат ветви, не могут быть все слишком частыми (например, такими, чтобы для всех было $n_{k+1} \leqslant n_k \ln n_k$).

Следствие IV: Если $E_{n_k}(f) = e^{-\frac{cn_k}{\ln n_k \ldots \ln_p n_k}}$

$$\frac{n_{k+1}}{n_k} \leqslant \ln_{p+1} n_k \ldots \ln_{p+1} n_k \qquad (q, s \leqslant 1)$$

и $f(x) = 0$ на части отрезка, то $f(x) \equiv 0$ на всем рассматриваемом отрезке.

2. Если квазианалитическую (B) на отрезке $[ab]$ функцию $f(x)$ можно продолжить на отрезок $[bc]$ так, что полученная

функция будет допускать на отрезке $[ac]$ равномерное приближение многочленами степеней n_k $(k = 1, 2, \ldots)$, сходящимися квазианалитически к $f(x)$ на отрезке $[ab]$, то такое продолжение, называемое псевдоаналитическим [1], однозначно определяется в некоторой окрестности точки b.

Теорема: а) Любая непрерывная на $[ab]$ функция $\varphi(x)$ (в том числе и тождественный 0) может быть псевдоаналитическим продолжением некоторой квазианалитической на $[bc]$ функции.

б) При этом, если функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условию Липшица, она может быть псевдоаналитическим продолжением квазианалитической функции, принадлежащей любому заданному классу $B\{n_k\}$, для которого

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln n_{n+1}}{n_k} = \alpha > 0.$$

Из теоремы вытекает, в частности, отрицательный ответ (для случая достаточно редкой последовательности $\{n_k\}$) на упоминаемый С. Н. Бернштейном вопрос [1] о возможности однозначного восстановления квазианалитической функции по ее псевдоаналитическому продолжению.

Отметим попутно, что можно построить пример функции, допускающей счетное число различных псевдоаналитических продолжений (относительно разных последовательностей).

3. Пусть $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[n_k]{E_{n_k}(f, [ab])} = 0$, а $\varphi(x)$ — монотонная, стремящаяся к 0 вместе с x, функция, такая, что

$$\varphi\left(\max_{k\geqslant k_0} A\sqrt{E_{n_k}(f)}\right) \leqslant C\, E_{n_{k_0}}(f) \quad (A > 1,\ C > 0 \text{ — постоянные}).$$

Пусть, далее, F — замкнутое счетное множество на отрезке $[ab]$ и Δx — смежный к F интервал. Положим

$$P_F(x_0\, x) = \max_{\Delta x} |\Delta x \cdot [x_0\, x]|.$$

При этих обозначениях имеет место:

Теорема: Если $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[n_k]{E_{n_k}(f, [ab])} = 0$ и $|f(x)| \leqslant \varphi(|x_0 - x|)$ на $F\cdot[x_0\, x]$, причем $\varrho_F(x_0\, x) \leqslant \varphi(|x_0 - x|)$ $(|x_0 - x| < \delta)$, то $f(x) \equiv 0$ на отрезке $[ab]$.

Этот результат частично содержится в работе С. Н. Мергеляна [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Н. Бернштейн. Аналитические функции вещественной переменной, их возникновение и пути обобщений. Собр. сочинений, т. I, 1952.

2. С. Н. Бернштейн. О весовых функциях. Собр. сочинений, т. II, 1954.
3. С. Н. Бернштейн. О связи квазианалитических функций с весовыми функциями. Собр. сочинений, т. II, 1954.
4. С. Н. Мергелян. Некоторые вопросы конструктивной теории функций. Труды института им. В. А. Стеклова, т. 37, 1951.

Л. М. ЗОРІЙ

ДОСТАТНІ УМОВИ СТІЙКОСТІ В ЦІЛОМУ ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

В роботі розглядається система рівнянь збуреного руху виду:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= F_{11}(x, y) + F_{12}(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= F_{21}(x, y) + F_{22}(x, y). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Наведені достатні умови асимптотичної стійкості очевидного розв'язку $x = y = 0$ в цілому. Методом побудови функції Ляпунова доведені:

Теорема 2.1. Якщо виконуються умови

(а) $xF_{11}(x, y) = -a_{11}(x, y)x^2 < 0$ при $x \neq 0$, $y \neq 0$;
$yF_{22}(x, y) = -a_{22}(x, y)y^2 < 0$ „ „

(б) $yF_{12}(x, y) = \varphi_{12}(x)\psi_{12}(y)f(x, y)y^2 > 2$ „ „
$xF_{21}(x, y) = -\varphi_{21}(x)\psi_{21}(y)f(x, y)x^2 < 0$ „ „

(в)
$$\int_0^x \frac{\varphi_{21}(x)}{\psi_{12}(x)} x\,dx \to \infty \text{ при } |x| \to \infty,$$
$$\int_0^y \frac{\psi_{12}(y)}{\psi_{21}(y)} y\,dy \to \infty \text{ при } |y| \to \infty$$

і функції φ_{ij} та ψ_{ij} $(i, j = 1, 2, i \neq j$ одного знаку, то очевидний розв'язок системи (1.1) асимптотично стійкий в цілому.

Теорема 2. 2. Якщо в усьому просторі $-\infty < x < +\infty$, $-\infty < y < +\infty$ виконуються нерівності

$$F_1(x, y) \leqslant a_{11}(x, y); \quad F_2(x, y) \leqslant a_{22}(x, y),$$