ЛІТЕРАТУРА

1. В. В. Немыцкий, В. В. Степанов. Качественная теория дифференциальных уравнений. Гостеортехиздат, М.-Л. (1949).
2. Н. П. Еругин. Качественные методы в теории устойчивости. ПММ, т. XIX, вып. 5 (1955).
3. Е. А. Барбашин, Н. Н. Красовский. Об устойчивости движения в целом. ДАН СССР, т. LXXXVI, № 3 (1952).
4. Н. Н. Красовский. Теоремы об устойчивости движений, определяемых системой 2-х уравнений. ПММ, т. XVI, вып. 5 (1955).
5. Б. С. Разумихин. Об устойчивости тривиального решения систем 2-го порядка. ПММ, т. XIX, вып. 3 (1955).
6. Н. Н. Красовский. Об устойчивости движения в целом при постоянно действующих возмущениях. ПММ, т. XVIII, вып. 1 (1954).
7. В. А. Плисс. Необходимые и достаточные условия устойчивости в целом для системы n дифференциальных уравнений. ДАН СССР, т. 103, № 1 (1955).
8. И. Г. Малкин. Теория устойчивости движения. Гостеортехиздат, М.-Л. (1952).

М. П. ШЕРЕМЕТЬЕВ и Д. Г. ХЛЕБНИКОВ

УПРУГОЕ РАВНОВЕСИЕ ПОЛУПЛОСКОСТИ С ПОДКРЕПЛЕННЫМ КРАЕМ

Рассмотрим упругую изотропную полуплоскость ($y \leqslant o$), граница которой спаяна с бесконечно длинным тонким упругим прямолинейным стержнем постоянной жесткости. Будем считать, что одна из главных осей инерции каждого поперечного сечения стержня лежит в рассматриваемой плоскости. На стержень действуют распределенные поперечная и продольная нагрузка и изгибающий момент, интенсивность которых соответственно $q(x)$, $n(x)$ и $m(x)$.

Очевидно на контуре спая ($y=o$) будут выполняться следующие условия:

$$X_y = X^o{}_y, \quad Y_y = Y^o{}_y \tag{1}$$

и

$$u = u^o, \quad v = v^o, \tag{2}$$

где через X_y, Y_y, u, v обозначены компоненты напряжения и смещения по осям координат для полуплоскости, а через $X^o{}_y$, $Y^o{}_y$, u^o, v^o — те же величины для стержня. Обозначив нормальный и касательный компоненты напряжения на контуре спая через $f(x)$ и $g(x)$, установим зависимость между $f(x)$, $g(x)$ и компонентами смещения оси стержня u^o, v^o, воспользовавшись для этой цели работой М. П. Шереметьева [1].

Зависимость между компонентами смещения u^o, v^o, относительным удлинением $\varepsilon_o = \varepsilon_o(x)$ и углом поворота $\Theta = \Theta(x)$ элемента оси стержня в данном случае будет иметь вид:

$$\frac{du^o}{dx} = \varepsilon_o(x), \quad \frac{\partial v^o}{dx} = \Theta(x). \tag{3}$$

Закон Гука возьмем в виде:

$$\varepsilon_\circ = \frac{N}{G_1}, \quad \frac{d\Theta}{dx} = \frac{M}{G_2}, \tag{4}$$

где N и M — продольная сила и изгибающий момент, действующие в любом сечении стержня, а G_1 и G_2 — жесткости на растяжение и изгиб.

Условия равновесия элемента стержня dx дают [2]:

$$\begin{aligned} &\frac{dN}{dx} = n(x) + g(x), \\ &\frac{dQ}{dx} = -q(x) - f(x), \\ &\frac{dM}{dx} = Q + m(x), \end{aligned} \tag{5}$$

где Q — перерезывающая сила.

Из (3), (4), (5) получаем зависимость между смещениями стержня и действующей на него нагрузкой:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2u^0}{dx^2} = \frac{1}{G_1}\left[n(x) + g(x)\right]; \\ &\frac{d^4v^0}{dx^4} = \frac{1}{G_2}\left[\frac{dm}{dx} - q(x) - f(x)\right]. \end{aligned} \tag{6}$$

Первое из уравнений (6) характеризует растяжение оси стержня, второе — его изгиб и известно из курса сопротивления материалов. Составим уравнения для нахождения $f(x)$ и $g(x)$. Производные смещений на границе упругой полуплоскости связаны с напряжениями на границе следующими соотношениями [3]:

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{y=0} = \alpha f(x) + \frac{\beta}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(t)\,dt}{t-x} \\ &\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{y=0} = \frac{\beta}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)\,dt}{t-x} - \alpha g(x) \end{aligned}\right\}. \tag{7}$$

где α и β — упругие постоянные, выражающиеся для плоской деформации через модуль упругости E и коэффициент Пуассона ν формулами:

$$\alpha = \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E}, \quad \beta = \frac{2(1-\nu^2)}{E} \tag{8}$$

и интегралы в правых частях (7) понимаются в смысле главного значения.

Из (6) и (7) получаем согласно (2):

$$\left.\begin{aligned} & G_1\alpha f'(x) - g(x) + \frac{G_1\beta}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g'(t)\,dt}{t-x} = n(x) \\ & \frac{G_2\beta}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f'''(t)\,dt}{t-x} + f(x) - G_2\alpha g'''(x) = \frac{dm}{dx} - q(x) \end{aligned}\right\}. \tag{9}$$

Система (9) является исходной для определения напряжений на контуре спая $f(x)$ и $g(x)$.

Пусть на стержень действует нагрузка вида:

$$\begin{aligned} q(x) &= a_1\cos\lambda x + a_2\sin\lambda x, \\ n(x) &= b_1\cos\lambda x + b_2\sin\lambda x, \\ m(x) &= c_1\cos\lambda x + c_2\sin\lambda x, \end{aligned} \tag{10}$$

где λ — вещественный положительный параметр, a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 — постоянные, зависящие от λ.

Замечая, что

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\lambda t\,dt}{t-x} = -\sin\lambda x, \\ & \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\lambda t\,dt}{t-x} = \cos\lambda x, \end{aligned} \tag{11}$$

будем искать решение уравнений (9) в виде:

$$\begin{aligned} f(x) &= f_1\cos\lambda x + f_2\sin\lambda x, \\ g(x) &= g_1\cos\lambda x + g_2\sin\lambda x. \end{aligned} \tag{12}$$

Подставляя (10) и (12) в уравнения (9) и учитывая (11), находим значения неизвестных постоянных:

$$f_1 = \frac{1}{D(\lambda)}\Big[-(G_1\beta\lambda+1)\,a_1 + G_2\alpha\lambda^3 b_2 + (G_1\beta\lambda+1)\lambda c_2\Big]$$

$$f_2 = \frac{1}{D(\lambda)}\Big[-(G_1\beta\lambda+1)\,a_2 - G_2\alpha\lambda^3 b_1 - (G_1\beta\lambda+1)\,\lambda c_1\Big] \qquad (13)$$

$$g_1 = \frac{1}{D(\lambda)}\Big[-G_1\alpha\lambda a_2 - (G_2\beta\lambda^3+1)\,b_1 - G_1\alpha\lambda^2 c_1\Big]$$

$$g_2 = \frac{1}{D(\lambda)}\Big[G_1\alpha\lambda a_1 - (G_2\beta\lambda^3+1)b_2 - G_1\alpha\lambda^2 c_2\Big],$$

где

$$D(\lambda) = G_1G_2(\beta^2-\alpha^2)\,\lambda^4 + G_2\beta\lambda^3 + G_1\beta\lambda + 1. \qquad (14)$$

От нагрузки вида (10) легко перейти к случаю нагрузки общего вида, представимой в виде интеграла Фурье.

Действительно, пусть функции $q(x)$, $n(x)$, $m(x)$ удовлетворяют условиям Дирихле во всяком конечном промежутке, будучи абсолютно интегрируемым в интервале $(-\infty, \infty)$. Тогда, как известно, можно представить:

$$q(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty d\lambda\int\limits_{-\infty}^\infty q(t)\,\cos\lambda(t-x)\,dt,$$

$$n(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty d\lambda\int\limits_{-\infty}^\infty n(t)\cos\lambda(t-x)\,dt, \qquad (15)$$

$$m(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty d\lambda\int\limits_{-\infty}^\infty m(t)\cos\lambda(t-x)\,dt.$$

Элементарная нагрузка

$$\Delta q = \frac{1}{\pi}\,\Delta\lambda\int\limits_{-\infty}^\infty q(t)\cos\lambda t dt\cdot\cos\lambda x + \frac{1}{\pi}\,\Delta\lambda\int\limits_{-\infty}^\infty q(t)\sin\lambda t dt\cdot\sin\lambda x,$$

$$\Delta n = \frac{1}{\pi}\,\Delta\lambda\int\limits_{-\infty}^\infty n(t)\cos\lambda t dt\cdot\cos\lambda x + \frac{1}{\pi}\,\Delta\lambda\int\limits_{-\infty}^\infty n(t)\sin\lambda t dt\cdot\sin\lambda x,$$

$$\Delta m=\frac{1}{\pi}\,\Delta\lambda\int\limits_{-\infty}^{\infty}m(t)\cos\lambda t dt\cdot\cos\lambda x+\frac{1}{\pi}\,\Delta\lambda\int\limits_{-\infty}^{\infty}m(t)\sin\lambda t dt\cdot\sin\lambda x$$

вызовет, согласно (13), напряжения на контуре спая:

$$\Delta f=-\frac{\Delta\lambda}{\pi}\cdot\frac{G_1\beta\lambda+1}{D(\lambda)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}q(t)\cos\lambda(t-x)\,dt+$$

$$+\frac{\Delta\lambda}{\pi}\cdot\frac{G_2\alpha\lambda^3}{D(\lambda)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}n(t)\sin\lambda(t-x)\,dt+$$

$$+\frac{\Delta\lambda}{\pi}\cdot\frac{\lambda(G_1\beta\lambda+1)}{D(\lambda)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}m(t)\sin\lambda(t-x)\,dt,$$

$$\Delta g=-\frac{\Delta\lambda}{\pi}\cdot\frac{G_1\alpha\lambda}{D(\lambda)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}q(t)\sin\lambda(t-x)\,dt-$$

$$-\frac{\Delta\lambda}{\pi}\cdot\frac{G_2\beta\lambda^3+1}{D(\lambda)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}n(t)\cos\lambda(t-x)\,dt-$$

$$-\frac{\Delta\lambda}{\pi}\cdot\frac{G_1\alpha\lambda^2}{D(\lambda)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}m(t)\cos\lambda(t-x)\,dt.$$

Поэтому нагрузка вида (15) вызовет напряжения:

$$f(x)=-\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{G_1\beta\lambda+1}{D(\lambda)}\,d\lambda\int\limits_{-\infty}^{\infty}q(t)\cos\lambda(t-x)\,dt+$$

$$+\frac{G_2\alpha}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\lambda^3d\lambda}{D(\lambda)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}n(t)\sin\lambda(t-x)\,dt+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{G_1\beta\lambda+1}{D(\lambda)}\,\lambda d\lambda\int\limits_{-\infty}^{\infty}m(t)\sin\lambda(t-x)\,dt,\qquad(16)$$

$$g(x) = -\frac{G_1\alpha}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\lambda d\lambda}{D(\lambda)}\int\limits_{-\infty}^\infty q(t)\sin\lambda(t-x)\,dt -$$

$$-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{G_2\beta\lambda^3+1}{D(\lambda)}\,d\lambda\int\limits_{-\infty}^\infty n(t)\cos\lambda(t-x)\,dt -$$

$$-\frac{G_1a}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\lambda^2 d\lambda}{D(\lambda)}\int\limits_{-\infty}^\infty m(t)\cos\lambda(t-x)\,dt.$$

Интегралы в правых частях формул (16) будут сходиться, если помимо абсолютной интегрируемости функций $q(x)$, $n(x)$ и $m(x)$ потребовать, чтобы функции $n(x)$ и $m(x)$ имели всюду ограниченную интегрируемую производную. Тогда сходимость интеграла

$$\int\limits_0^\infty \frac{\lambda^3 d\lambda}{D(\lambda)}\int\limits_{-\infty}^\infty n(t)\sin\lambda(t-x)\,dt = \int\limits_0^\infty \frac{\lambda^3\cos\lambda x d\lambda}{D(\lambda)}\int\limits_{-\infty}^\infty n(t)\sin\lambda t dt -$$

$$-\int\limits_0^\infty \frac{\lambda^3\sin\lambda x d\lambda}{D(\lambda)}\int\limits_{-\infty}^\infty n(t)\cos\lambda t dt \qquad (17)$$

следует из того, что интегралы $\int\limits_{-\infty}^\infty n(t)\sin\lambda t dt$ и $\int\limits_{-\infty}^\infty n(t)\cos\lambda t dt$ в силу теоремы Лебега-Римана [5] сходятся для любого значения λ и при $\lambda\to\infty$ ведут себя, как $0\left(\frac{1}{\lambda}\right)$.

Напряженное состояние полуплоскости можно определить теперь по формулам [4]:

$$X_x = -\frac{2}{\pi}\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{yf(\xi)+(x-\xi)g(\xi)}{[y^2+(x-\xi)^2]^2}(x-\xi)^2\,d\xi,$$

$$X_y = -\frac{2y}{\pi}\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{yf(\xi)+(X-\xi)g(\xi)}{[y^2+(x-\xi)^2]^2}(x-\xi)\,d\xi, \qquad (18)$$

$$y_y = -\frac{2y^2}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{yf(\xi)+(x-\xi)g(\xi)}{[y^2+(x-\xi)^2]^2}d\xi.$$

В частном случае, если на подкрепляющий стержень действует перпендикулярная к его оси сосредоточенная сила P, приложенная в начале координат, формулы (16) примут вид:

$$f(x) = -\frac{P}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{G_1\beta\lambda+1}{D(\lambda)}\cos\lambda x d\lambda,$$

$$g(x) = \frac{PG_1\alpha}{\pi}\int\limits_0^{\infty}\frac{\lambda\sin\lambda x d\lambda}{D(\lambda)}. \tag{19}$$

Если положить здесь $G_1 = G_2 = 0$, т. е. считать, что подкрепляющий стержень отсутствует, то из (18) получается известное из курса теории упругости решение задачи Фламана.

Случаи действия на подкрепляющий стержень сосредоточенной силы, направленной по его оси, или сосредоточенного момента также легко получаются из формул (16).

Аналогичным путем в такой же постановке решается задача и для анизотропной полуплоскости.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. П. Шереметьев. Плоско-напряженное состояние пластинки с подкрепленным круговым отверстием. Инж. сборник, т. 14 (1953).
2. М. М. Филоненко-Бородич и др. Курс сопротивления материалов, т. 1, М. (1955).
3. Л. А. Галин. Контактные задачи теории упругости. М. (1953).
4. Н. Н. Лебедев и др. Сборник задач по математической физике. М., стр. 169—170 (1955).
5. Е. Титчмарш. Введение в теорию интегралов Фурье. Гостехиздат (1948).

Н. П. ФЛЕЙШМАН

ЗАМЕЧАНИЯ К ОДНОЙ СТАТЬЕ М. П. ШЕРЕМЕТЬЕВА

§ I. В работе [1] М. П. Шереметьев вывел граничные условия для пластинки, в криволинейное отверстие которой впаяно тонкое кольцо постоянного сечения. При этом кольцо принято