$$\tau_{xy} = -\frac{2y^2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{yf(\xi)+(x-\xi)g(\xi)}{[y^2+(x-\xi)^2]^2}d\xi.$$

В частном случае, если на подкрепляющий стержень действует перпендикулярная к его оси сосредоточенная сила P, приложенная в начале координат, формулы (16) примут вид:

$$f(x) = -\frac{P}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{G_1\beta\lambda+1}{D(\lambda)}\cos\lambda x d\lambda,$$

$$g(x) = \frac{PG_1\alpha}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\lambda\sin\lambda x d\lambda}{D(\lambda)}. \tag{19}$$

Если положить здесь $G_1 = G_2 = 0$, т. е. считать, что подкрепляющий стержень отсутствует, то из (18) получается известное из курса теории упругости решение задачи Фламана.

Случаи действия на подкрепляющий стержень сосредоточенной силы, направленной по его оси, или сосредоточенного момента также легко получаются из формул (16).

Аналогичным путем в такой же постановке решается задача и для анизотропной полуплоскости.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. П. Шереметьев. Плоско-напряженное состояние пластинки с подкрепленным круговым отверстием. Инж. сборник, т. 14 (1953).

2. М. М. Филоненко-Бородич и др. Курс сопротивления материалов, т. 1, М. (1955).

3. Л. А. Галин. Контактные задачи теории упругости. М. (1953).

4. Н. Н. Лебедев и др. Сборник задач по математической физике. М., стр. 169—170 (1955).

5. Е. Титчмарш. Введение в теорию интегралов Фурье. Гостехиздат (1948).

Н. П. ФЛЕЙШМАН

ЗАМЕЧАНИЯ К ОДНОЙ СТАТЬЕ М. П. ШЕРЕМЕТЬЕВА

§ I. В работе [1] М. П. Шереметьев вывел граничные условия для пластинки, в криволинейное отверстие которой впаяно тонкое кольцо постоянного сечения. При этом кольцо принято за упругую линию, обладающую жесткостью на растяжение и изгиб. Решение задачи получено для кругового отверстия. Там же [1, стр. 91] имеется указание на то, что для тонких колец влияние жесткости кольца на изгиб g_2 настолько невелико, что в решении можно положить $g_2 = 0$, т. е. рассматривать кольцо как работающее только на растяжение.

В статье [4], выполненной под руководством М. П. Шереметьева, К. Н. Русинко частично воспользовался этим указанием и решил приближенно задачу о растяжении плоскости с подкрепленным эллиптическим отверстием, пренебрегая в законе Гука (для кольца) влиянием изгибающего момента на величину относительного удлинения оси кольца ε и влиянием ε на величину угла поворота сечения кольца.

Используя то же указание М. П. Шереметьева, мы рассматриваем кольцо как криволинейный стержень, работающий только на растяжение или сжатие. При этом мы полностью пренебрегаем действием изгибающих моментов в поперечных сечениях кольца и смягчаем условия спая между кольцом и пластинкой, потребовав только выполнения условия равенства относительных удлинений в пластинке и кольце вдоль контура спая L. Это значительно упрощает граничное условие и решение задачи и дает возможность с достаточной для практики точностью подсчитать напряжения в пластинке даже в тех случаях, когда кольцо не слишком тонкое (см. § 2).

Закон Гука, уравнение совместности деформаций и условие равновесия для кольца имеют в данном случае частный вид (см. формулы (1.12), (1.13) и (1.4) [1].

$$N_1 = \varepsilon\, E_1F, \quad \varepsilon = -\,Re\left[ie^{-i\alpha}\frac{d}{ds}(u^\circ + iv^\circ)\right],$$
$$2h\int_0^s (X_n^\circ + iY_n^\circ)\,ds = \int_0^s (P_x + iP_y)\,ds + i\,N_1e^{i\alpha} + \text{const}, \tag{1.1}$$

где E_1F — переменная, вообще говоря, жесткость кольца на растяжение; u° и v° — проекции на оси координат Ox и Oy вектора смещения точек оси кольца; s — дуга на контуре спая L, на котором выбрано положительное направление, оставляющее слева часть плоскости, занятую пластинкой; X°_n и Y°_n — это проекции неизвестных напряжений, действующих со стороны кольца на пластинку, а P_x и P_y — проекции заданной внешней нагрузки, приложенной к кольцу; N_1 — нормальная растягивающая сила, действующая в поперечном сечении s кольца; α — угол, который внешняя нормаль n к L составляет с осью Ox и который отсчитывается от этой последней; $2h$ — толщина пластинки.

Проинтегрировав по s второе граничное условие (1.3) работы [1] и принимая во внимание вышеприведенные формулы (1.1), можно без труда исключить неизвестные правые части условий спая и получить следующее граничное условие для пластинки, край которой подкреплен безмоментным кольцом:

$$- \frac{E_1 F}{4\mu h} e^{ia} \, Re \left\{ ie^{-ia} \left[\varkappa \varphi_1 (t) - \overline{t \varphi_1{}' (t)} - \overline{\psi_1 (t)} \right] \right\} +$$

$$+ \varphi_1 (t) + \overline{t \varphi_1{}' (t)} + \overline{\psi_1 (t)} = f \text{ на } L, \qquad (1.2)$$

где t — аффикс точки на L, μ — модуль сдвига материала пластинки, $\varkappa = (3-\nu) / (1 + \nu)$, ν—коэффициент Пуассона, $\varphi_1(z)$ и $\psi_1 (z)$ — функции от комплексного переменного $z = x + iy$, голоморфные в области пластинки, а через f обозначено

$$f = f (t) = f (s) = \frac{i}{2h} \int\limits_o^s (P_x + i P_y) \, ds + \text{const.} \qquad (1.3)$$

В частном случае, когда L представляет собою окружность радиуса R, граничное условие (1.2) принимает вид

$$\pm \, \delta t \, Re \left\{ \frac{d}{dt} \left[\varkappa \varphi_1 (t) - \overline{t \varphi_1{}' (t)} - \overline{\psi_1 (t)} \right] \right\} +$$

$$+ \varphi_1 (t) + \overline{t \varphi_1{}' (t)} + \overline{\psi_1 (t)} = f, \qquad (1.4)$$

где $\delta = E_1 F / 4 \mu h R$. Здесь и в дальнейшем верхний (нижний) знак плюс (минус) относится к случаю, когда пластинка занимает внутренность (внешность) L.

Исходя из условия (1.7) и применяя метод рядов Фурье, можно легко решить ряд технически важных задач для пластинок с подкрепленной круговой границей.

Если область, занимаемая пластинкой, односвязна, можно воспользоваться ее конформным отображением на внешность или внутренность единичного круга γ на плоскости $\zeta = \varrho e^{i\Theta} = \varrho \sigma$ при помощи отображающей функции $z = \omega (\zeta)$

В плоскости ζ условие (1.2) записывается в виде

$$\pm \frac{E_1 F}{4\mu h} \frac{\omega' (\sigma)}{|\omega' (\sigma)|} \sigma \, Re \left\{ \frac{1}{\omega' (\sigma)} \frac{d}{d\sigma} \left[\varkappa \varphi (\sigma) - \frac{\omega (\sigma)}{\overline{\omega' (\sigma)}} \overline{\varphi' (\sigma)} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \overline{\psi (\sigma)} \right] \right\} + \varphi (\sigma) + \frac{\omega (\sigma)}{\overline{\omega' (\sigma)}} \overline{\varphi' (\sigma)} + \overline{\psi (\sigma)} = f \text{ на } \gamma, \qquad (1.5)$$

где

$$\varphi (\zeta) = \varphi_1 (z) = \varphi_1 [\omega (\zeta)], \quad \psi (\zeta) = \psi_1 (z) = \psi_1 [\omega (\zeta)].$$

§ 2. В качестве примера рассмотрим растяжение пластинки с подкрепленным круговым отверстием.

Бесконечная пластинка растягивается усилиями $\sigma_x^{(\infty)} = p$ и $\sigma_y^{(\infty)} = q$. Подкрепляющее кольцо свободно от внешних усилий. По аналогии с [2] возьмем функции $\varphi_1 (z)$ и $\psi_1 (z)$ в виде

$$\varphi_1(z) = \frac{p+q}{4} z + \alpha_{-1} \frac{R}{z}, \quad \psi_1(z) = \frac{q-p}{2} z + \beta_{-1} \frac{R}{z} + \\ + \beta_{-3} \frac{R^3}{z^3}. \qquad (2.1)$$

Для определения неизвестных коэффициентов α_{-1}, β_{-1} и β_{-3} подставляем (2. 1) в (1. 4) и сравниваем коэффициенты при одинаковых степенях σ. В результате получаем систему уравнений, из которой находим[1]:

$$\alpha_{-1} = \frac{R(p-q)(1+\delta)}{2+\delta(\varkappa+3)}, \quad \beta_{-1} = \frac{R(p+q)}{4} \cdot \frac{\delta(\varkappa-1)-2}{1+\delta},$$

$$\beta_{-3} = \frac{(p-q)R}{2} \cdot \frac{2+\delta(1-\varkappa)}{2+\delta(\varkappa+3)}. \qquad (2.2)$$

Решение этой задачи получено значительно более сложным путем в работе [3] в предположении, что материал кольца и пластинки одинаков.

В таблице приведены значения напряжений σ_Θ при $\Theta = \frac{\pi}{2}$, возникающих в пластинке на контуре спая с кольцом $(r = R)$. Эти напряжения подсчитывались для случая одноосного растяжения $(q = 0)$ пластинки, подкрепленной кольцом прямоугольного поперечного сечения с размерами $2b \times 2h_1$ при $\frac{E_1 h_1}{Eh} = 1{,}833$, $\varkappa = 2{,}08$, $\delta = 4{,}7658 \frac{b}{R}$ и при различных значениях $k = \frac{b}{R-b}$. Для сравнения в этой же таблице приведены напряжения σ_Θ, заимствованные нами из работ Г. Н. Савина [2] и М. П. Шереметьева [1]. В работе [2] напряженное состояние подкрепляющего кольца удовлетворяет уравнениям плоской теории упругости, а в работе [1] кольцо рассматривается как упругая линия, работающая на растяжение и изгиб.

Таблица

Значения напряжений σ_Θ/p при $\Theta = \frac{\pi}{2}$ на контуре спая

$\kappa = \frac{b}{R-b}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{100}$
По решению (2. 2)	1,536	1,814	2,387	2,585	2,771
По данным Г. Н. Савина [2]	1,301	1,660	2,349	2,569	2,776
По данным М. П. Шереметьева [1]	1,12	1,57	2,35	—	—

[1] См. [1] при $g_2 = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. П. Шереметьев. Инженерный сборник, т. XIV. Изд. АН СССР (1953).
2. Г. Н. Савин. Концентрация напряжений около отверстий, гл. V, Гостехиздат (1951).
3. R. M. Radok. Journal of Applied Mechanics, 22, № 2, 1955.
4. К. Н. Русинко. Бюллетень наукової студентської конференції 1954 р., частина II. Видавн. Львівського університету, 1955.

В. І. ТУЛЬЧІЙ

ЗГИН БЕЗМЕЖНОЇ ПЛАСТИНКИ, ОСЛАБЛЕНОЇ ДВОМА КРУГОВИМИ ОТВОРАМИ, ГРАНИЦІ ЯКИХ ПІДКРІПЛЕНІ ТОНКИМИ КІЛЬЦЯМИ

Розглядаючи задачу пружної рівноваги безмежної, ізотропної і однорідної пластинки, припустимо, що вона ослаблена двома довільними круговими отворами, границі яких підкріплені тонкими пружними кільцями.

Будемо вважати, що головний вектор і головний момент зусиль, прикладених до кожного із підкріплюючих кілець, рівні нулеві. Поверхня пластинки вільна від навантаження, а напружений стан на безмежності однорідний, тобто величини $M_{x(\infty)}$, $H_{xy(\infty)}$, $M_{y(\infty)}$ — обмежені.

Покладаючи $z = \omega(\zeta)$, де

$$\omega(\zeta) = \frac{\zeta}{1 - a\zeta}, \quad a > 0$$

відобразимо область пластинки на кругове кільце, обмежене колами γ_1, γ_2.

Граничні умови задачі, одержані в роботі [1], після нескладних перетворень можуть бути записані в вигляді:

$$\begin{aligned} 2A^o_j \Bigg\{ & \overline{\varphi}'(\overline{\sigma}_j)\, \dot{\overline{\sigma}}_j + \frac{\overline{\omega}'(\overline{\sigma}_j)}{\omega'(\sigma_j)}\, \varphi'(\sigma_j)\, \dot{\overline{\sigma}}_j + \\ & + \frac{\overline{\omega}(\overline{\sigma}_j)}{[\omega'(\sigma_j)]^2} \left[\varphi''(\sigma_j)\, \omega'(\sigma_j) - \varphi'(\sigma_j)\, \omega''(\sigma_j) \right] \dot{\sigma}_j + \\ & + \psi'(\sigma_j)\, \dot{\sigma}_j \Bigg\} + 2iD \left\{ (3+\mu)\, \overline{\varphi}(\overline{\sigma}_j) - (1-\mu) \left[\frac{\overline{\omega}(\overline{\sigma}_j)}{\omega'(\sigma_j)} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \psi(\sigma_j) \right] \right\} = f'_{1j} + if'_{2j}, \end{aligned} \tag{1.1}$$

де

$$f'_{1j} + if'_{2j} = \Bigg\{ \overline{C}_{oj} - \overline{\omega}(\overline{\sigma}_j) V'_{ozj} + i \int_o^s \dot{\overline{z}}_j m_j(s)\, ds +$$