ЛИТЕРАТУРА

1. М. П. Шереметьев. Инженерный сборник, т. XIV. Изд. АН СССР (1953).
2. Г. Н. Савин. Концентрация напряжений около отверстий, гл. V, Гостехиздат (1951).
3. R. M. Radok. Journal of Applied Mechanics, 22, № 2, 1955.
4. К. Н. Русинко. Бюллетень наукової студентської конференції 1954 р., частина II. Видавн. Львівського університету, 1955.

В. І. ТУЛЬЧІЙ

ЗГИН БЕЗМЕЖНОЇ ПЛАСТИНКИ, ОСЛАБЛЕНОЇ ДВОМА КРУГОВИМИ ОТВОРАМИ, ГРАНИЦІ ЯКИХ ПІДКРІПЛЕНІ ТОНКИМИ КІЛЬЦЯМИ

Розглядаючи задачу пружної рівноваги безмежної, ізотропної і однорідної пластинки, припустимо, що вона ослаблена двома довільними круговими отворами, границі яких підкріплені тонкими пружними кільцями.

Будемо вважати, що головний вектор і головний момент зусиль, прикладених до кожного із підкріплюючих кілець, рівні нулеві. Поверхня пластинки вільна від навантаження, а напружений стан на безмежності однорідний, тобто величини $M_{x(\infty)}$, $H_{xy(\infty)}$, $M_{y(\infty)}$ — обмежені.

Покладаючи $z = \omega(\zeta)$, де

$$\omega(\zeta) = \frac{\zeta}{1 - a\zeta}, \quad a > 0$$

відобразимо область пластинки на кругове кільце, обмежене колами γ_1, γ_2.

Граничні умови задачі, одержані в роботі [1], після нескладних перетворень можуть бути записані в вигляді:

$$2A^o_j \Bigg\{ \overline{\varphi}'(\overline{\sigma}_j)\, \dot{\overline{\sigma}}_j + \frac{\overline{\omega}'(\dot{\overline{\sigma}}_j)}{\omega'(\sigma_j)}\, \varphi'(\sigma_j)\, \dot{\overline{\sigma}}_j + \frac{\overline{\omega}(\overline{\sigma}_j)}{[\omega'(\sigma_j)]^2} \Big[\varphi''(\sigma_j)\, \omega'(\sigma_j) - \varphi'(\sigma_j)\, \omega''(\sigma_j) \Big] \dot{\sigma}_j + \psi'(\sigma_j)\, \dot{\sigma}_j \Bigg\} + 2iD \Bigg\{ (3+\mu)\, \overline{\varphi}(\overline{\sigma}_j) - (1-\mu) \Bigg[\frac{\overline{\omega}(\overline{\sigma}_j)}{\omega'(\sigma_j)} + \psi(\sigma_j) \Bigg] \Bigg\} = f'_{1j} + if'_{2j}, \tag{1.1}$$

де

$$f'_{1j} + if'_{2j} = \Bigg\{ \overline{C}_{oj} - \overline{\omega}(\overline{\sigma}_j) V'_{ozj} + i \int_o^s \dot{\overline{z}}_j m_j(s)\, ds +$$

$$+ \int\limits_{0}^{s}\left[\overline{z}_j(s) - \overline{z}_j(\alpha)\right]_{(j=1,\,2)} p_j(\alpha)\,d\alpha \Bigg\}. \tag{1.2}$$

При цьому σ_j — афікс точки кола γ_j $(j = 1, 2)$.

Розкладаючи два останні члени із (1.2) в ряд Фур'є, маємо

$$f'_{1j} + if'_{2j} = \overline{C}_{oj} - \overline{\omega}(\overline{\sigma}_j)\,V'_{ozj} + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{nj}\,\sigma_j^n + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{nj}\,\sigma_j^{-n}. \tag{1.3}$$

Будемо шукати розв'язок рівнянь (1.1) в вигляді

$$\varphi(\sigma_j) = B^{(2)}\omega(\sigma_j) + \varphi_o(\sigma_j),$$
$$\psi(\sigma_j) = (B' + iC')\,\omega(\sigma_j) + \psi_o(\sigma_j). \tag{1.4}$$

Примінюючи спосіб, використаний в роботі [2], покладемо

$$\varphi_o(\sigma_j) = P_1(\sigma_j) + P_2(\sigma_j),$$
$$\psi_o(\sigma_j) = Q_1(\sigma_j) + Q_2(\sigma_j),$$

де

$$P_1(\sigma_j) = \sum_{1}^{\infty} a_k \sigma_j{}^k, \quad Q_1(\sigma_j) = \sum_{0}^{\infty} c_k \sigma_j{}^k,$$

$$P_2(\sigma_j) = \sum_{1}^{\infty} b_k \sigma_j{}^{-k}, \quad Q_2(\sigma_j) = \sum_{1}^{\infty} d_k \sigma_j{}^{-k} \tag{1.5}$$

Враховуючи (1.5), підставимо вираз (1.4) в граничні умови (1.1). Потім ліву і праву частини одержаних рівностей помножимо на

$$\frac{1}{2\pi i}\,\frac{d\sigma_j}{\sigma_j - \zeta}$$

та, покладаючи $A^o{}_j = A_j \varrho_j{}^{-1}$, проінтегруємо їх по $\gamma_j\,(j = 1, 2)$

В результаті інтегрування по γ_2 $(|\zeta| < \varrho_2)$ і γ_1 $(|\zeta| < \varrho_1)$ відповідно знаходимо

$$A^o{}_2 \left\{ \varrho_2{}^2 \zeta^{-2} (1 - a\zeta)\,(\zeta - a\varrho_2{}^2)^2\,\overline{P}'_2\left(\frac{\varrho_2{}^2}{\zeta}\right) + \right.$$
$$+ a\varrho_2{}^2 (a\varrho_2{}^2 - \zeta)\,\overline{a}_1 + (1 - a\zeta)^3\,\varrho_2{}^2 P'_1(\zeta) +$$

$$+ \varrho_2^2 (1 - a^2\varrho_2^2)^3 P'_2 (a\varrho_2^2) - \varrho^2{}_2 a^3 (a\varrho_2^2 - \zeta)\, b_1 +$$

$$+ \varrho_2^2 (1 - a\zeta)^3 (a\varrho_2^2 - \zeta) P''_1 (\zeta) - 2a^2\varrho_2^2 (1 - a\zeta)^2$$

$$(a\varrho_2^2 - \varsigma) P'_1 (\zeta) - (1 - a\zeta)(\varsigma - a\varrho_2^2)^2 Q'_1 (\varsigma) +$$

$$+ a (a\varrho_2^2 - \zeta)\, d_1 \Big\} + D \left\{ (3 + \mu)(a\varrho_2^2 - \zeta) \overline{P_2}\left(\frac{\varrho_2^2}{\zeta}\right) + \right.$$

$$+ (1 - \mu) \Big[\varrho_2^2 (1 - a\zeta)^2 P_1' (\zeta) + \varrho_2^2 (1 - a^2\varrho_2^2)^2 P'_2 (a\varrho^2{}_2) -$$

$$\left. - (a\varrho_2^2 - \zeta) Q_1 (\zeta) \Big] \right\} = - \frac{i}{2} (a\varrho_2^2 - \zeta) \sum_0^\infty a_{n,\,2}\, \zeta^n -$$

$$- \frac{B' + iC'}{a} \Big[D (1 - \mu) - A^o{}_2 \Big] (a\varrho_2^2 - \zeta) + 2B^{(2)} a\varrho_2^2 A^o{}_2 \zeta +$$

$$+ 2B^{(2)} \Big[D (1 + \mu) - A^o{}_2 \Big] \varrho_2^2 - \frac{i}{2} (a\varrho_2^2 - \zeta) \overline{C}_{02} -$$

$$- \frac{i}{2} \varrho_2^2 V'_{oz2}. \qquad (1.6)$$

$$A^o{}_1 \left\{ \varrho_1^2 \zeta^{-2} (a\zeta - 1) (\zeta - a\varrho_1^2)^2 \overline{P}'_2 \left(\frac{\varrho_1^2}{\zeta}\right) + \right.$$

$$+ a\varrho_1^2 (\zeta - a\varrho_1^2) \overline{a}_1 - a^3\varrho_1^2 (\zeta - a\varrho_1^2)\, b_1 -$$

$$- \varrho_1^2 (1 - a\zeta)^3 P'_1 (\zeta) + \varrho_1^2 (1 - a^2\varrho^2{}_1)^3 P'_1 (a\varrho_1^2) +$$

$$+ \varrho_1^2 (1 - a\zeta)^3 (\zeta - a\varrho_1^2) P''_1 (\zeta) -$$

$$- 2a\varrho_1^2 (1 - a\zeta)^2 (\zeta - a\varrho_1^2) P'_1 (\zeta) +$$

$$\left. + (1 - a\zeta)(\zeta - a\varrho_1^2)^2 Q'_1 (\zeta) + a (\zeta - a\varrho_1^2)\, d_1 \right\} +$$

$$+ D \left\{ (3+\mu)(\zeta - a\varrho_1^2) \overline{P_2} \left(\frac{\varrho_1^2}{\zeta}\right) - (1 - \mu) \Big[\varrho_1^2 (1 - a\zeta)^2 P'_1 (\zeta) - \right.$$

$$\left. - \varrho_1^2 (1 - a^2\varrho_1^2)^2 P'_1 (a\varrho_1^2) + (\varsigma - a\varrho_1^2)\, Q_1 (\zeta) \Big] \right\} = -$$

$$- \frac{i}{2} (\zeta - a\varrho_1^2) \sum_0^\infty a_{n,\,1}\, \zeta^n - 2a\varrho_1^2 (\zeta - a\varrho_1^2) A^o{}_1 B^{(2)} +$$

$$+ (B' + iC') \Big\{ \Big[D (1 - \mu) - A^o{}_1 \Big] \zeta + a\varrho^2{}_1 A^o{}_1 \Big\} (\zeta - a\varrho_1^2) \sum_0^\infty (a\zeta)^k -$$

$$- \frac{i}{2} (\zeta - a\varrho^2{}_1) \overline{C}_{01}. \qquad (1.7)$$

Інтегруючи по тих же колах γ_2, γ_1, але покладаючи відповідно $|\zeta| > \varrho_2$, $|\zeta| > \varrho_1$, одержимо слідуючі дві тотожності

$$
\begin{aligned}
&A^o{}_2 \Big\{ -\varrho^2{}_2 (1-a\zeta)(\zeta - a\varrho_2{}^2)^2 P'{}_1\left(\frac{\varrho_2{}^2}{\zeta}\right) + \\
&+ a\varrho_2{}^2 (a\varrho_2{}^2 - \zeta)\,\overline{a}_1 - \varrho_2{}^2 (1-a\zeta)^3 P'{}_2(\zeta) + \\
&+ \varrho_2{}^2 (1-a^2\varrho_2{}^2)^3 P'{}_2(a\varrho_2{}^2) - a^3\varrho_2{}^2 (a\varrho_2{}^2 - \zeta)\, b_1 - \\
&- \varrho_2{}^2 (1-a\zeta)^3 (a\varrho_2{}^2 - \zeta) P''{}_2(\zeta) + \\
&+ 2a\varrho_2{}^2 (1-a\zeta)^2 (a\varrho_2{}^2 - \zeta) P'{}_2(\zeta) + \\
&+ (1-a\zeta)(\zeta - a\varrho_2{}^2)^2 Q'{}_2(\zeta) + a(a\varrho_2{}^2 - \zeta)\, d_1 \Big\} + \\
&+ D\Big\{(3+\mu)(\zeta - a\varrho_2{}^2)\overline{P}_1\left(\frac{\varrho_1{}^2}{\zeta}\right) - \\
&- (1-\mu)\Big[\varrho_2{}^2 (1-a\zeta)^2 P'{}_2(\zeta) + (\zeta - a\varrho_2{}^2)\, Q_2(\zeta) - \\
&- \varrho_2{}^2 (1-a^2\varrho_2{}^2)^2 P'{}_2(a\varrho_2{}^2)\Big]\Big\} = \frac{i}{2}(a\varrho_2{}^2 - \zeta)\sum_1^\infty \beta_{n,2}\zeta^{-n} + \\
&+ \varrho_2{}^2 A^o{}_2 (B'{}_2 + iC')(a\varrho_2{}^2 - \zeta)\,\zeta^{-1} + \\
&+ \frac{B' + iC'}{a}\Big\{(a\varrho_2{}^2 - \zeta)\Big[D(1-\mu) - A^o{}_2 + \\
&+ A^o{}_2 a\varrho_2{}^2\zeta^{-1}\Big]\Big\}\sum_1^\infty\left(\frac{1}{a\zeta}\right)^k. \qquad (1.8)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&A^o{}_1 \Big\{ 1 - \varrho_1{}^2\zeta^{-2}(1-a\zeta)(\zeta - a\varrho_1{}^2)^2 \overline{P'}_1\left(\frac{\varrho_1{}^2}{\zeta}\right) - \\
&- a\varrho_1{}^2 (\zeta - a\varrho^2{}_1)\,\overline{a}_1 - \varrho_1{}^2 (1-a\zeta)^3 P'{}_2(\zeta) + \\
&+ a^3\varrho_1{}^2 (\zeta - a\varrho_1{}^2)\, b_1 - \varrho_1{}^2 (1-a^2\varrho_1{}^2)^3 P'{}_1(a\varrho_1{}^2) + \\
&+ \varrho_1{}^2 (1-a\zeta)^3 (\zeta - a\varrho_1{}^2) P''{}_2(\zeta) - a(\zeta - a\varrho_1{}^2)\, d_1 + \\
&+ (1-a\zeta)(\zeta - a\varrho_1{}^2)^2 Q'{}_2(\zeta) - \\
&- 2a\varrho_1{}^2 (1-a\zeta)^2 (\zeta - a\varrho_1{}^2) P'{}_2(\zeta)\Big\} + \\
&+ D\Big\{(3+\mu)(\zeta - a\varrho_1{}^2)\overline{P}_1\left(\frac{\varrho_1{}^2}{\zeta}\right) - \\
&- (1-\mu)\Big[\varrho^2{}_1 (1-a\zeta)^2 P'{}_2(\zeta) + \varrho_1{}^2 (1-a^2\varrho_1{}^2) P'{}_1(a\varrho_1{}^2) +
\end{aligned}
$$

$$+(\zeta - a\varrho_1^2)\, Q_2(\zeta)\Big]\Big\} = \frac{i}{2}\,\varrho_1^2\, V'_{oz1} - 2\varrho_1^2)\, B^{(2)} \Big[D(1+\mu) -$$

$$- A^o{}_1 (1 - a\zeta)\Big] + 2a\varrho_1^2 A^o{}_1 B^{(2)} (\zeta - a\varrho_1^2) -$$

$$- \frac{i}{2} (\zeta - a\varrho_1^2) \sum_1^{\infty} \beta_{n,1} \zeta^{-n}. \qquad (1.9)$$

Коефіцієнти $c\, C_{n+1}, b_{n+1}$ $(n \geqslant 2)$ функцій $Q_1(\zeta)$ та $P_2(\zeta)$ легко визначити із (1.6), (1.7), якщо кожний доданок лівих частин замінити відповідним рядом по додатніх степенях ζ. Виконавши цей розклад і зрівнявши коефіцієнти при однакових степенях ζ^n $(n \geqslant 2)$, після нескладних підрахунків знаходимо.

$$C_{n+1} = L_{(n+1)} \Big\{ P_1^{(n+1)}\, \bar{b}_n + P_2^{(n+1)}\, \bar{b}_{n-1} + P_3^{(n+1)}\, \bar{b}_{n-2} +$$

$$+ P_4^{(n+1)}\, a_{n+2} + P_5^{(n+1)}\, a_{n+1} + P_6^{(n+1)}\, a_n +$$

$$+ P_7^{(n+1)}\, a_{n-1} + P_8^{(n+1)}\, a_{n-2} + P_9^{(n+1)}\, c_n +$$

$$+ P_{10}^{(n+1)}\, c_{n-1} + P_{11}^{(n+1)}\, c_{n-2} + P_{12}^{(2)}\, \varrho_1^{-2(1+n)}\, a_{n,2} -$$

$$- P_{13}^{(2)}\, \varrho_1^{-2(1+n)}\, a_{n-1,2} - P_{12}^{(1)}\, \varrho_2^{-2(1+n)}\, a_{n,1} +$$

$$+ P_{13}^{(1)}\, \varrho_2^{-2(1+n)}\, a_{n-1,2} +$$

$$+ (P_{15}^{(1)} - P_{14}^{(1)} - P_{16}^{(1)} + P_{17}^{(1)})\, \varrho_2^{-2(1+n)} \Big\}. \qquad (1.10)$$

$$\bar{b}_{n+1} = P_{10}^{(n+1)}\, \bar{b}_n + P_{20}^{(n+1)}\, \bar{b}_{n-1} + P_{30}^{(n+1)}\, \bar{b}_{n-2} +$$

$$P_{50}^{(n+1)}\, a_{n+1} +$$

$$+ P_{60}^{(n+1)}\, a_n + P_{70}^{(n+1)}\, a_{n-1} + P_{80}^{(n+1)}\, a_{n-2} + P_{90}^{(n+1)}\, c_n +$$

$$+ P_{100}^{(n+1)}\, c_{n-1} + P_{110}^{(n+1)}\, c_{n-2} + L_{(n+1)} \Big\{ P_{12}^{(1)}\, a_{n,1} - P_{13}^{(1)}\, a_{n-1,1} +$$

$$+ P_{14}^{(1)} - P_{15}^{(1)} + P_{16}^{(1)} - P_{17}^{(1)} - P_{12}^{(2)}\, a_{n,2} + P_{13}^{(2)}\, a_{n-1,2} \Big\}. \qquad (1.11)$$

В цих формулах покладено

$$P_1^{(j)} = \frac{\varrho_j^{-2n}}{(1+n)a\varrho_j^2} \Big\{ n\,(2 + a^2\varrho_j^2) + \delta_j (3+\mu) \Big\},$$

$$P_2^{(j)}=\frac{\varrho_j^{2(1-n)}}{(1+n)\,a^2\varrho_j^4}\left\{(n-1)(1+2a^2\varrho_j^2)+\delta_j(3+\mu)\right\},$$

$$P_3^{(j)}=\frac{n-2}{a(1+n)}\varrho_j^{-2n\,(j)}\quad,\quad P_4=\frac{n+2}{a},\ P_5^{(j)}=\frac{1}{a^2\varrho_j^2}$$

$$\left\{1-(1+3a^2\varrho_j^2)\ n-2a^2\varrho_j^2+\delta_j\ (1-\mu)\right\},$$

$$P_6^{(j)}=\frac{1}{(1+n)\,a\varrho_j^2}\left\{4a^2\varrho_j^2-1+3(n-1)(1+a^2\varrho_j^2)-\delta_j(1-\mu)2\right\}.$$

$$P_{13}^{(j)}=\frac{i}{2(1+n)\ A^\circ_j\,a^2\varrho_j^4},\ P_7^{(j)}=\frac{n-1}{(1+n)\,\varrho^2_j}$$

$$\left\{\delta_j(1-\mu)-(1+4a^2\varrho_j^2)-(n-2)\ (3+a^2\varrho_j^2\right\},$$

$$P_{12}^{(j)}=\frac{i}{2(1+n)\ A_j^\circ a\varrho_j^2},\ P_9(j)=\frac{1}{(1+n)\,a\varrho_j^2}$$

$$\left\{n(2+a^2\varrho_j^2)-\delta_j(1-\mu)\right\},\ P_{10}^{(j)}=\frac{1}{(1+n)\,a^2\varrho_j^4}$$

$$\left\{(n-1)\ (1+2a^2\varrho_j^2)-\delta_j\ (1-\mu)\right\},$$

$$P_8^{(j)}=\frac{(n-2)^2a}{(n+1)\ \varrho_j^2},\ P_{14}^{(j)}=\frac{(B'+iC')\,[\delta_j(1-\mu)-1]}{(1+n)\ a^2\varrho_j^4}\,a^{n-2},$$

$$P_{11}^{(j)}=\frac{n-2}{(1+n)\,a\varrho_j^4},\ P_{15}^{(j)}=\frac{(B'+iC')\,[\delta_j(1-\mu)-1]}{(1+n)\,a\varrho_j^2}\,a^{n-1}.$$

$$P_{16}^{(j)}=\frac{B'+iC'}{(1+n)\,a\varrho_j^2}\,a^{n-1},\ P_{17}^{(1)}=\frac{B'+iC'}{n+1}\,a^n.$$

$$\delta_j=\frac{D}{A^\circ_j},\ (j=1,\ 2). \tag{1.12}$$

I крім того

$$P_2^{(n+1)}=P_2^{(1)}\varrho_2^{-2(1+n)}-P_2^{(2)}\varrho_1^{-2(1+n)},\ P_{10}^{(n+1)}=P_{10}^{(1)}\varrho_2^{-2(1+n)}-$$

$$-P_{10}^{(2)}\varrho_1^{-2(1+n)},\ P_{20}^{(1+n)}=L_{(n+1)}\ [P_2^{(2)}-P_2^{(1)}],$$

$$P_{100}^{(1+n)}=L_{(n+1)}\ [P_1^{(2)}-P_1^{(1)}],\ P_k^{(1+n)}=P_k^{(2)}\varrho_1^{-2(1+n)}-$$

$$-P_k^{(1)}\varrho_2^{-2(1+n)},\ P_{ko}^{(1+n)}=L_{(n+1)}\ [P_k^{(1)}-P_k^{(2)}],$$

$$L_{(1+n)}=\frac{1}{\varrho_1^{-2(n+1)}-\varrho_2^{-2(n+1)}}. \tag{1.13}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, 11), (n = 2, 3, 4 \ldots).$$

Аналогічно, замінивши доданки лівих частин (1.8), (1.9) відповідними рядами по від'ємних степенях ζ і зрівнюючи коефіцієнти при однакових степенях змінної, ми можемо визначити коефіцієнти a_{n+2}, d_{n+2} $(n \geqslant 1)$ функцій $P_1(\zeta)$, $Q_2(\zeta)$.

Дійсно, виконавши елементарні математичні дії, остаточно одержимо

$$d_{n+2} = N_{(n+2)} \Big\{ R_1^{(n+2)} \bar{a}_{n+1} + R_2^{(n+2)} \bar{a}_n + R_3^{(n+2)} \bar{a}_{n-1} + R_4^{(n+2)} b_{n+2} + R_5^{(n+2)} b_{n+1} + R_6^{(n+2)} b_n + R_7^{(n+2)} b_{n-1} + R_8^{(n+2)} b_{n-2} + R_9^{(n+2)} d_{n+1} + R_{10}^{(n+2)} d_n + R_{11}^{(n+2)} d_{n+1} + R_{12}^{(n+2)} + R_{13}^{(n+2)} + R_{14}^{(n+2)} + R_{15}^{(n+2)} + R_{16}^{(n+2)} \Big\}, \tag{1.14}$$

$$\bar{a}_{n+2} = N_{(n+2)} \Big\{ R_{10}^{(n+2)} \bar{a}_{n+1} + R_{20}^{(n+2)} \bar{a}_n + R_{30}^{(n+2)} \bar{a}_{n-1} + R_{40}^{(n+2)} b_{n+2} + R_{50}^{(n+2)} b_{n+1} + R_{60}^{(n+2)} b_n + R_{70}^{(n+2)} b_{n-1} + R_{80}^{(n+2)} b_{n-2} + R_{90}^{(n+2)} d_{n+1} + R_{100}^{(n+2)} d_n + R_{110}^{(n+2)} d_{n-1} + R_{120}^{(n+2)} + R_{13}^{(n+2)} + R_{14}^{(n+2)} + R_{15}^{(n+2)} + R_{16}^{(n+2)} \Big\}, \tag{1.15}$$

де покладено

$$R_k^{(n+2)} = \Big\{ R_k^{(1)} \varrho_2^{2n+4} - R_k^{(2)} \varrho_1^{2n+4} \Big\}, \quad R_{ko}^{(n+2)} = \Big\{ R_k^{(2)} - R_k^{(1)} \Big\}, \quad R_{13}^{(n+2)} = -R_{13}^{(2)} \varrho_1^{2n+4}, \quad R_{14}^{(n+2)} = -R_{14}^{(2)} \varrho_1^{2n+4}, \quad R_{15}^{(n+2)} = -R_{15}^{(2)} \varrho_1^{2n+4}, \quad R_{16}^{(n+2)} = -R_{16}^{(2)} \varrho_1^{2n+4}$$

$$N_{(n+2)} = \frac{1}{\varrho_2^{2n+4} - \varrho_1^{2n+4}}, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{1.16}$$

при цьому

$$R_1^{(j)} = \frac{\varrho_j^{2(1+n)}}{a(2+n)} \Big\{ (1+n)(1 + 2a^2\varrho_j^2) - \delta_j(3-\mu) \Big\},$$

$$R_2^{(j)} = \frac{\varrho_j^{2(1+n)}}{n+2} \Big\{ \delta_j (3+\mu) - n(2 + a^2\varrho_j^2) \Big\},$$

$$R_3^{(j)} = \frac{n-1}{n+2}\, a\varrho_j^{2(1+n)}, \quad R_5^{(j)} = -\frac{(n+1)\, a\varrho_j^2}{n+2}$$

$$\left\{5 + n\,(3 + a^2\varrho_j^2) + \delta\,(1-\mu)\right\}, R_4^{(j)} = (n+2)\, a^2\varrho_j^2,$$

$$R_6^{(j)} = \frac{n\varrho^2{}_j}{n+2}\left\{4 - a^2\varrho_j^2 + 3n\,(1 + a^2\varrho_j^2) + 2\delta_j\,(1-\mu)\right\},$$

$$R_7^{(j)} = -\frac{(n-1)\,\varrho_j^2}{a\,(n+2)}\left\{1 - 2a^2\varrho_j^2 + n\,(1 + 3a^2\varrho_j^2) + \delta_j(1-\mu)\right\},$$

$$R_{11}^{(j)} = \frac{n-1}{n+2}\, a\varrho_j^4, \; R_8^{(j)} = \frac{(n-1)\,(n-2)}{(n+2)}\,\varrho_j^4,$$

$$R_9^{(j)} = \frac{1}{a\,(n+2)}\left\{(n+1)\,(1 + 2a^2\varrho_j^2) + \delta_j\,(1-\mu)\right\}.$$

$$R_{10}^{(j)} = -\frac{\varrho_j^2}{n+2}\left\{n\,(2 + a^2\varrho_j^2)\,1 - \delta_j\,(1-\mu)\right\},$$

$$R_{14}^{(j)} = \frac{B' + iC'}{(n+2)\, a^{n+2}}\, a^2\varrho_2^4,$$

$$R_{12}^{(j)} = \frac{i}{2A^\circ{}_2\,(n+2)\, a}\left\{a\varrho_j^2\beta_{n,\,j} - \beta_{n+1,\,j}\right\},$$

$$R_{15}^{(j)} = -\frac{(B' + iC')\,\varrho_2^2}{(n+2)\, a^{n+1}},$$

$$R_{13}^{(j)} = -\frac{B' + iC'}{(n+2)\, a^{n+3}}\left\{\delta_2\,(1-\mu) - 1\right\},$$

$$R_{16}^{(j)} = \frac{\varrho^2{}_2\,(B' + iC')}{(n+2)\, a^{n+2}}\left\{\delta_2\,(1-\mu) - 1\right\}.$$

$$(n \geqslant 2), \; (j = 1,2) \qquad (1.17)$$

Для визначення $C_\circ$ покладемо в рівності (1,6) $\zeta = 0$. Групуючи подібні члени, знаходимо:

$$c_o = \frac{A^\circ{}_2}{D(1-\mu)a}\left\{a^2\varrho^2{}_2\bar{a}_1 - a^2\bar{b}_1 + \left[1 - 2a^2\varrho_2{}^2 + \frac{D\,(1-\mu)}{A^\circ{}_2}\right]a_1 + \right.$$

$$+ (1 - a^2\varrho_2{}^2)^2\left[1 - a^2\varrho_2{}^2 + \frac{D\,(1-\mu)}{A^\circ{}_2}\right]P'_2\,(a\varrho_2{}^2) -$$

$$- a^4\varrho^2{}_2 b_1 + 2a\varrho_2{}^2 a_2 - a^2\varrho_2{}^2 c_1 + a^2\varrho_2 d_1 +$$

$$+\frac{ia}{2A^o_2}\alpha_{0,2}+(B'+iC')\left[\frac{D(1-\mu)}{A^o_2}-1\right]-$$

$$-2B^{(2)}\left[\frac{D(1+\mu)}{A^o_2}-1\right]+\frac{i}{2A^o_2}V'_{oz2}+\frac{ia}{2A^o_2}\bar{C}_{o2}\Big\}. \quad (1.18)$$

Шляхом порівнювання коефіцієнтів при нулевій і першій степенях ζ, із рівностей (1.6), (1.7), знаходимо

$$d_1=\frac{1}{\varrho_2{}^2-\varrho_1{}^2}\Big\{[\overset{(1)}{\Gamma_1}\varrho_2{}^2-\overset{(2)}{\Gamma_1}\varrho_1{}^2]a_1+\overset{(1)}{\Gamma_7}c_o+(\varrho_2{}^2-$$

$$-\varrho_1{}^2)\bar{b}_1+\overset{(1)}{\Gamma_6}\varrho_2{}^2-\overset{(2)}{\Gamma_6}\varrho_1{}^2\Big\}$$

$$a_2=\frac{a}{2(\varrho^2{}_2-\varrho_1{}^2)}\Big\{(\overset{(2)}{\Gamma_1}-\overset{(1)}{\Gamma_1})a_1-(\varrho_2{}^2-\varrho_1{}^2)\bar{a}_1+$$

$$+\overset{(2)}{\Gamma_8}c_o+a^2(\varrho_2{}^2-\varrho_1{}^2)b_1+(\varrho_2{}^2-\varrho_1{}^2)c_1+\overset{(2)}{\Gamma_6}-\overset{(1)}{\Gamma_6}\Big\}, \quad (1.20)$$

$$\bar{b}_2=\frac{(\varrho_1\varrho_2)^4}{\varrho_2{}^4-\varrho_1{}^4}\Big\{(\overset{(1)}{T_1}-\overset{(2)}{T_1})b_1+(\overset{(1)}{T_2}-\overset{(2)}{T_2})\bar{b}_1+$$

$$+(\overset{(1)}{T_3}-\overset{(2)}{T_3})a_2+(\overset{(1)}{T_4}-\overset{(2)}{T_4})a_1+\overset{(1)}{T_9}+(\overset{(1)}{T_6}-\overset{(2)}{T_6})d_1+$$

$$+(\overset{(1)}{T_7}-\overset{(2)}{T_7})c_1+(\overset{(1)}{T_8}-\overset{(2)}{T_8})\bar{a}_1+T_{10}c_o-\overset{(2)}{T_9}\Big\}$$

$$c_2=\frac{1}{\varrho_2{}^4-\varrho_1{}^4}\Big\{(\varrho_2{}^4\overset{(2)}{T_1}-\varrho_1{}^4\overset{(1)}{T_1})b_1+(\varrho_2{}^4\overset{(2)}{T_2}-\varrho_1{}^4\overset{(1)}{T_2})\bar{b}_1+$$

$$+(\varrho_2{}^4\overset{(2)}{T_3}-\varrho_1{}^4\overset{(1)}{T_3})a_2+(\varrho_2{}^4\overset{(2)}{T_4}-\varrho_1{}^4\overset{(1)}{T_4})a_1+(\varrho_2{}^4\overset{(2)}{T_5}-$$

$$-\varrho_1{}^4\overset{(1)}{T_5})a_3+(\varrho_2{}^4\overset{(2)}{T_6}-\varrho_1{}^4\overset{(1)}{T_6})d_1+(\varrho_2{}^4\overset{(2)}{T_7}-\varrho_1{}^4\overset{(1)}{T_7})c_1+$$

$$+(\varrho_2{}^4\overset{(2)}{T_8}-\varrho_1{}^4\overset{(1)}{T_8})\bar{a}_1+T_{11}c_o+\varrho_2{}^4\overset{(2)}{T_9}+\varrho_1{}^4\overset{(1)}{T_9}\Big\}, \quad (1.22)$$

де покладено

$$\overset{(j)}{\Gamma_1}=-\frac{1}{a^2}\Big\{1-2a^2\varrho_j{}^2+\delta_j(1-\mu)\Big\},\quad \overset{(2)}{\Gamma_8}=\frac{D(1-\mu)}{a}$$

$$\Big\{\frac{1}{A^o_2}-\frac{1}{A^o_1}\Big\},\ \overset{(2)}{\Gamma_6}=-\frac{(1-a^2\varrho_j{}^2)^2P'_2(a\varrho_2{}^2)}{a^2}$$

$$\Big\{1-a^2\varrho^2{}_2+\delta_2(1-\mu)\Big\}-\frac{i}{2A_2{}^\circ a}\Big\{\alpha_{0,2}+\bar{C}_{02}+$$

$$+\frac{V^1{}_{0z2}}{a}\Big\} - \frac{B'+iC'}{a^2}\Big\{\delta_2(1-\mu)-1\Big\} + \frac{2\overset{(2)}{B}}{a^2}$$

$$\Big\{\delta_2(1-\mu)-1\Big\},\ \overset{(1)}{\Gamma_7} = \frac{D(1-\mu)}{a}\Big\{\frac{\varrho_2{}^2}{A_1{}^0} - \frac{\varrho_1{}^2}{A_2{}^0}\Big\}, \qquad (1.23)$$

$$\overset{(1)}{\Gamma_6} = \frac{(1-a\varrho_1{}^2)^2 P'_1(a\varrho_1{}^2)}{a^2}\Big\{1 - a^2\varrho_1{}^2 + \delta_1(1-\mu)\Big\} -$$

$$-\frac{i}{2A^o{}_1 a}\Big\{\alpha_{0,1} + \overline{C}_{01}\Big\} - 2\varrho_1{}^2\overset{(2)}{B} + (B'+iC')\varrho_1{}^2,$$

і крім того

$$\overset{(j)}{T_1} = \frac{a}{2\varrho_j{}^2},\ \overset{(j)}{T_2} = \frac{1}{2a\varrho_j{}^4}\Big\{2 + a^2\varrho_j{}^2 + \delta_j(3+\mu)\Big\},$$

$$\overset{(j)}{T_3} = -\frac{1}{a^2\varrho_j{}^2}\Big\{5a^2\varrho_j{}^2 - \delta_j(1-\mu)\Big\},$$

$$\overset{(j)}{T_4} = -\frac{1}{2a\varrho_j{}^2}\Big\{1 - 4a^2\varrho_j{}^2 + 2\delta_j(1-\mu)\Big\},$$

$$\overset{(j)}{T_5} = C\frac{3}{a},\ T^{(j)}{}_6 = -\frac{1}{2a\varrho_j{}^4},$$

$$\overset{(j)}{T_7} = \frac{1}{2a\varrho_j{}^2}\Big\{2 + a^2\varrho_j{}^2 - \delta_j(1-\mu)\Big\},$$

$$\overset{(1)}{T_9} = \frac{i}{4A^o{}_1 a^2\varrho_1{}^4}\Big\{a\varrho_1{}^2\alpha_{1,1} - \alpha_{0,1} - \overline{C}_{01}\Big\},$$

$$-\frac{B'+iC'}{2a\varrho^2{}_1}\Big\{\delta_1(1-\mu)-1\Big\} + \frac{B'+iC'}{2a\varrho^2{}_2}\Big\{1 - a^2\varrho^2{}_1\Big\} -$$

$$-\frac{\overset{(2)}{B}}{a\varrho_1{}^2},\quad \overset{(j)}{T_8} = -\frac{1}{2a\varrho_j{}^2},$$

$$\overset{(2)}{T_9} = \frac{i}{4a^2\varrho_2{}^4 A^o{}_2}\Big\{a\varrho_2{}^2\alpha_{1,2} - \alpha_{0,2} - \overline{C}_{02}\Big\} -$$

$$-\frac{B'+iC'}{2a^3\varrho_2{}^4}\Big\{\delta_2(1-\mu)-1\Big\} - \frac{\overset{(2)}{B}}{a\varrho_2{}^2},$$

$$T_{10} = \frac{D(1-\mu)}{2a^2}\Big\{\frac{1}{A^o{}_2\varrho_2{}^4} - \frac{1}{A^o{}_1\varrho^4{}_1}\Big\}.$$

$$T_{11} = \frac{D(1-\mu)}{2a^2}\Big\{\frac{1}{A^o{}_2} - \frac{1}{A^o{}_1}\Big\},\ (j=1,2). \qquad (1.24)$$

На основі співвідношень (1.18), (1.19), (1.20) та (1.21) бачимо, що коефіцієнти b_2, $\bar{a}_2$, d_1, C_0 виражаються через a_1, b_1, $P'_j\ (a\varrho_j^2)$, V'_{ozj}, $\bar{C}_{oj}$ $(j = 1, 2)$ та їм спряжені величини.

Враховуючи це і зрівнюючи вільні члени лівих і правих частин співвідношень (1.8), (1.9) — одержимо ще два рівняння для визначення $\bar{c}_1$, d_2, а саме:

$$\overset{(2)}{H_1}\bar{c}_1 + \overset{(2)}{H_2} d_2 = \overset{(2)}{\Phi}$$

$$\overset{(1)}{H_1}\bar{c}_1 + \overset{(1)}{H_2} d_2 = \overset{(1)}{\Phi}. \tag{1.25}$$

де $\overset{(j)}{H_1}$, $\overset{(j)}{H_2}$ — відомі числа, а $\overset{(j)}{\Phi}$ $(j = 1, 2)$ лінійно залежить від a_1, b_1, $\bar{a}_1$, $\bar{b}_1$, $P'_j\ (a\varrho_j^2)$, $\bar{P}'_j\ (a\varrho_j^2)$, V'_{ozj}, $\bar{c}_{oj}$, c_{oj} $(j = 1, 2)$.

Таким чином, на основі вище викладеного всі коефіцієнти c_k, d_k, a_{k+1}, b_{k+1} $(k \geqslant 1)$ виражаються через a_1, b_1, $\bar{a}_1$, $\bar{b}_1$ та $P'_j\ (a\varrho_j^2)$, $\bar{P}'_j\ (a\varrho_j^2)$, V'_{ozj}, $\bar{C}_{oj}$, C_{oj} $(j = 1, 2)$.

Нехай для заданої степені точності підрахунків досить залишити l коефіцієнтів функції $P_1\ (\zeta)$ та m коефіцієнтів функції $P_2\ (\zeta)$. В цьому випадку постійні $P'_1\ (a\varrho_1^2)$, $P'_2\ (a\varrho_2^2)$ приймуть слідуючі значення

$$P'_1\ (a\varrho_1^2) = \sum_1^l k a_k\ (a\varrho_1^2)^{k-1},\quad P'_2\ (a\varrho_2^2) = -$$

$$- \sum_1^m k b_k\ (a\varrho_2^2)^{k-1}. \tag{1.26}$$

Підставимо в праві частини (1.26) і їм спряжених виразів замість a_k, b_k, $\bar{a}_k$, $\bar{b}_k$ $(k \geqslant 2)$ їх значення через a_1, b_1, $\bar{a}_1$, $\bar{b}_1$ $P'_j\ (a\varrho_j^2)$, $\bar{P}'_j\ (a\varrho_j^2)$, V'_{ozj}, $\bar{C}_{oj}$, C_{oj} $(j = 1, 2)$.

Розв'язавши одержану систему відносно $P'_j\,(a\varrho_j^2)$, $\bar{P}'_j\,(a\varrho_j^2$, $(j = 1, 2)$, ми виразимо ці постійні через a_1, b_1, $\bar{a}_1$, $\bar{b}_1$, V'_{ozj}, $\bar{C}_{oj}$, C_{oj} $(j = 1, 2)$.

Далі, так як при заданій степені точності

$$a_{l+1} = \bar{a}_{l+1} = b_{m+1} = \bar{b}_{m+1} = 0, \tag{1.27}$$

то, замінюючи ліві частини цих рівнянь їх значення через a_1, $\bar{a}_1$, b_1, $\bar{b}_1$, V'_{ozj}. C_{oj}, $\bar{C}_{oj}$ $(j = 1, 2)$, ми одержимо ще 4 рівняння для визначення a_1, b_1, $\bar{a}_1$ та $\bar{b}_1$ через V'_{ozj}, C_{oj}, $\bar{C}_{oj}$ $(j = 1,2)$.

Постійні V'_{ozj}, C_{oj} $(j = 1{,}2)$, як показано в роботі [3], визначаються з умов однозначності кутів повороту осей підкріплюючих кілець та однозначності прогинів пластинки.

Отже, всі коефіцієнти функцій $P_1(\zeta), P_2(\zeta), Q_1(\zeta)$ і $Q_2(\zeta)$ нами визначені, чим і вичерпано рішення поставленої задачі[1].

Як приклад, розглянемо випадок, коли підкріплюючі кільця вільні від навантаження, а напружений стан на безмежності задано у вигляді $M_{x(\infty)} = M_{y(\infty)} = M$. Як пластинка, так і підкріплюючі її кільця — мідні з $E = 1{,}1 \cdot 10^6 kГ/см^2, \mu = 0{,}33$.

Нехай радіуси r_1, r_2 ослаблюючих отворів та розміри обох кілець — однакові. Далі, з рівності між собою жорсткостей на згин та кручення для підкріплюючих кілець, випливає співвідношення $b = 1{,}86\,h$, де b — ширина кільця, а h — його висота. Приймаючи, що пластинка має товщину $h = 1$ *см*, покладемо $h = 1{,}1\,h_1$. З метою з'ясування залежності концентрації напружень від віддалі[2] l_1, покладемо $r_1 = 20$ *см*.

Підрахунки показують, що при прийнятій нами системі навантажень, розрахунковим є момент M_Θ, а найнебезпечнішою є точка $x^3{}_1$.

Як видно з таблиці 1, в якій подано значення M_Θ в точках x_1, x_2, зі збільшенням l_1 концентрація зменшується і при $l_1 \geqslant 6\,r_1$ не відрізняється від її значення у випадку наявності в пластинці лише одного отвору.

Таблиця 1

$\frac{M_\Theta}{M}$ \ $\frac{l_1}{r_1}$	1	2	4	6	∞
$\left(\frac{M_\Theta}{M}\right)_{x_1}$	$\frac{2{,}53}{2{,}89}$	$\frac{2{,}15}{2{,}47}$	$\frac{1{,}87}{2{,}16}$	$\frac{1{,}79}{2{,}06}$	$\frac{1{,}76}{2{,}00}$
$\left(\frac{M_\Theta}{M}\right)_{x_2}$	$\frac{1{,}94}{2{,}24}$	$\frac{1{,}86}{2{,}17}$	$\frac{1{,}79}{2{,}08}$	$\frac{1{,}77}{2{,}04}$	$\frac{1{,}76}{2{,}00}$

Знаменники дробів в таблиці 1 відповідають випадку абсолютно гнучких кілець і взяті нами із роботи [4].

[1] З метою полегшення підрахунків при розв'язуванні конкретних задач доцільно функції $Q_1(\zeta)$ та $Q_2(\zeta)$ явно виразити через функції $P_1(\zeta)$, $P_2(\zeta)$. Це легко зробити, використовуючи рівності (1.6), (1.7), (1.8), (1.9).

[2] Під l_1 розуміємо найкоротшу віддаль між ослаблюючими пластинку отворами.

[3] Вважаємо, що x_1, x_2, є точки перетину центральної прямої з колом ослаблюючого отвору, причому x_1 розміщена ближче до другого кола ніж x_2.

Таблиця 2

$\frac{M_\theta}{M}$ \ $\frac{l_1}{r_1}$	1	2	4
$\left(\frac{M_\theta}{M}\right)_{x_1}$	6,28	5,43	4,83
$\left(\frac{M_\theta}{M}\right)_{x_2}$	4,83	4,75	4,67

Значення M_θ в найбільш небезпечних точках підкріплюючих кілець приведені в таблиці 2.

ЛІТЕРАТУРА

1. М. П. Шереметьев. Изгиб анизотропных и изотропных плит, ослабленных отверстием, край которого подкреплен тонким кольцом, ДАН УССР, № 6, 1950.

2. М. П. Шереметьев. Упругое равновесие эллиптического кольца. ПММ, т. XVII, вып. I, 1953.

3. М. П. Шереметьев. Пластинка, край которой подкреплен тонким упругим кольцом постоянного сечения. ДАН УССР, № 1, 1952.

4. Н. И. Калыняк. Изгиб изотропных плит с двумя равными круговыми отверстиями.

Научные записки (Львовский политехнический институт), вып. 30, серия физико-математических наук, № 1, 1955.

Статті цього розділу надійшли до видавництва у червні 1956 р.