

МЕХАНІКА ТА МАТЕМАТИКА

Д. П. МЕЛЬНИК

ФУНДАМЕНТАЛЬНА МАТРИЦЯ ДЕЯКИХ СИСТЕМ ЕЛІПТИЧНОГО ТИПУ ДЛЯ НЕОБМЕЖЕНОГО ПРОСТОРУ

В даній роботі буде доведена теорема існування фундаментальної матриці для систем Ейлера, які відповідають основній варіаційній задачі для додатньо означеного функціоналу з швидко зростаючими на безмежності коефіцієнтами.

Крім цього, мова буде йти про теореми типу теореми Ліувілля для деяких еліптичних систем. Для стислості викладу обмежимося системами другого порядку.

1. Нехай

$$\Phi(x) = \sum_{k,l=1}^n \frac{\partial u'}{\partial x_k} A_{kl}(x) \frac{\partial u}{\partial x_l} + 2u' \sum_{k=1}^n A_k(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} + u' A u,$$

де $x = (x_1, \dots, x_n)$ — точка n -мірного дійсного простору, $u'(x) = (u'_1(x), \dots, u'_n(x))$, $u(x)$ — відповідний стовпець, $A_{kl}(x)$, $A_k(x)$, $A(x)$ — квадратні матричні функції.

Система Ейлера варіаційної задачі для функціоналу $\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x) dx$ буде мати вигляд:

$$\begin{aligned} \sum_{k,l=1}^n (A_{kl}(x) + A'_{lk}(x)) \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l} + \left[\sum_{k,l=1}^n \left(\frac{\partial A_{lk}(x)}{\partial x_l} + \frac{\partial A'_{lk}(x)}{\partial x_l} \right) + \right. \\ \left. + 2 \sum_{k=1}^n (A'_k(x) - A_k(x)) \right] \frac{\partial u}{\partial x_k} + \left(2 \sum_{k=1}^n \frac{\partial A'_k(x)}{\partial x_k} - \right. \\ \left. - A(x) - A'(x) \right) u = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Введемо такі позначення:

$$\sum_{k,l=1}^n (A_{kl}(x) + A'_{lk}(x)) \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} \equiv A_0 \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

$$\left[\sum_{k,l=1}^n \left(\frac{\partial A_{lk}(x)}{\partial x_l} + \frac{\partial A'_{kl}(x)}{\partial x_l} \right) + 2 \sum_{k=1}^n (A'_k(x) - A_k(x)) \right] \frac{\partial}{\partial x_k} +$$

$$+ 2 \sum_{k=1}^n \frac{\partial A'_k(x)}{\partial x_k} - A(x) - A'(x) \equiv A_1 \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right).$$

Система (1) набере вигляду:

$$A \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right) u \equiv \left[A_0 \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right) + A_1 \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right) \right] u = 0. \quad (1)$$

Фундаментальною матрицею [1] оператора $A \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right)$ з особливістю в точці y називається матриця $\omega(x, y)$, що має властивості:

1) два рази неперервно диференційована в усьому просторі, за винятком точки y ;

$$2) \quad A \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right) \omega(x, y) = 0 \quad (x \neq y);$$

3) для довільної неперервно диференційованої матриці $v(x)$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \dots (n-1) \dots \int \sum_{k=1}^n \cos(v, x_k) B_k$$

$$(v(x) (\omega(x, y)) d_x S = v'(y), \quad (2)$$

де S_ε сфера радіуса ε з центром у точці y , v — орт зовнішньої нормалі до S_ε , $B_k(u, v)$ білінійні форми, які визначаються за формулою:

$$v'(x) A \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right) u(x) - \left(A' \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right) v(x) \right)' u(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} B_k(v, u).$$

Як відомо, ці білінійні форми визначаються неоднозначно. Будемо вважати їх визначеними так, що в них входять похідні лише першого порядку.

Теорема. Нехай існує така додатна в усьому просторі функція $F(x)$, що $\int \frac{dx}{F(x)} < \infty$ і що

$$\frac{\det(A_0(x, ia) - \lambda^2 E)}{[F(x)]^p |a|^{2p} + \lambda^{2p}} \geq \mu > 0$$

для кожної точки x простору і для кожної дійсної ненульової точки $\alpha' = (\lambda, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$, де λ — достатньо велике число.

Якщо при цьому коефіцієнти оператора $A_0 \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right)$ неперервно диференційовані три рази, коефіцієнти при похідних порядку j ($j=0,1$) в операторі $A_1 \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right)$ неперервно диференційовані j раз в усьому просторі, причому коефіцієнти оператора $A_0 \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right)$ будуть порядку $O(F(x))$, а похідні до другого порядку цих коефіцієнтів і коефіцієнти оператора $A_1 \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right)$ ростуть не швидше, ніж $F(x)$ при $|x| \rightarrow \infty$, то при умові, що функціонал $\int_{\infty} \Phi(x) dx$ додатно означений, тобто

$$\int_{\infty} \Phi(x) dx \geq C \int_{\infty} \sum_{k=1}^n \frac{\partial u'}{\partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_k} \quad (C > 0) \quad (3)$$

існує фундаментальна матриця в усьому просторі для системи (1).

Доведення. Користуючись методом Е. Леві, фундаментальну матрицю $\omega(x, y)$ з особливістю в точці y для системи (1) будемо шукати у вигляді:

$$\omega(\dot{x}, y) = \omega_{\lambda}(x, y) + \int_{\infty} \omega_{\lambda}(x, z) h(z, y) dz, \quad (4)$$

де $\omega_{\lambda}(x, y)$ — фундаментальна матриця системи

$$\left(A \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right) - \lambda^2 \right) u = 0, \quad (5)$$

яка існує в припущеннях теореми [3] і має таку оцінку, справедливу і при $|x - y| \rightarrow 0$, і при $|x - y| \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^{k_1 + \dots + k_n} \omega_{\lambda}(x, y)}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} = \\ & = \begin{cases} O \left(\frac{e^{-\lambda \varepsilon |x-y|}}{F(x)} \frac{1}{|x-y|^{n-2+k_1+\dots+k_n}} \right) & (n-2+k_1+\dots+k_n > 0) \\ O \left(\frac{e^{-\lambda \varepsilon |x-y|}}{F(x)} (|\lg |x-y|| + 1) \right) & (n-2+k_1+\dots+k_n = 0) \\ O \left(\frac{e^{-\lambda \varepsilon |x-y|}}{F(x)} \right) & (n-2+k_1+\dots+k_n < 0) \end{cases} \\ & (k_1 + \dots + k_n = 0, 1, 2), (\lambda, \varepsilon > 0), \end{aligned} \quad (6)$$

а $h(x, y)$ — поки що невідома матрична функція, яку будемо підбирати так, щоб $A \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right) \omega(x, y) = 0 \quad (x \neq y)$.

На основі леми 3 [4]

$$A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \omega(x, y) = A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \omega_\lambda(x, y) + \\ + \int_{\infty} A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \omega_\lambda(x, z) h(z, y) dz + h(x, y).$$

Оскільки $\omega_\lambda(x, y)$ — фундаментальна матриця системи (5), то

$$A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \omega_\lambda(x, y) = \lambda^2 \omega_\lambda(x, y) \quad (x \neq y).$$

Таким чином, питання про можливість підбору такої матриці $h(x, y)$, щоб $A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) \omega(x, y) = 0$ ($x \neq y$) рівнозначне питанню про можливість розв'язку системи інтегральних рівнянь:

$$h(x, y) + \lambda^2 \int_{\infty} \omega_\lambda(x, z) h(z, y) dz + \lambda^2 \omega_\lambda(x, y) = 0. \quad (7)$$

Оскільки її ядро $\omega_\lambda(x, y)$ має оцінку (6) і

$$\int_{\infty} \frac{dx}{F(x)} < \infty, \quad (8)$$

то, як відомо, до системи (7) можна застосувати теорію Фредгольма. Якщо б виявилось, що система (7) розв'язується не за першою теоремою Фредгольма, а за третьою, то фундаментальну матрицю $\omega(x, y)$ треба було б шукати у вигляді:

$$\omega(x, y) = \omega_\lambda(x, y) + \int_{\infty} \omega_\lambda(x, z) h(z, y) dz + R(x, y).$$

Система тоді б виглядала так:

$$h(x, y) + \lambda^2 \int_{\infty} \omega_\lambda(x, z) h(z, y) dz + \lambda^2 \omega_\lambda(x, y) + \\ + A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) R(x, y) = 0. \quad (7')$$

$R(x, y)$ потрібно було б підібрати так, щоб забезпечити ортогональність вільного члена системи (7') до лівих власних функцій ядра. Можливість підбору такого $R(x, y)$ треба було б обґрунтовувати.

Покажемо, що в нашому випадку система (7) розв'язується за першою теоремою Фредгольма і, отже, $R(x, y) \equiv 0$.

Розглянемо однорідну систему рівнянь:

$$h(x) + \lambda^2 \int_{\infty} \omega_\lambda(x, z) h(z) dz = 0, \quad (9)$$

і покажемо, що вона має тільки нульовий розв'язок. Доведення будемо вести від супротивного.

Припустимо, що система (9) має ненульовий розв'язок $g(x)$. Нехай $w(x) = \int_{\infty} \omega_\lambda(x, z) g(z) dz$.

На основі оцінки (6), очевидно,

$$\frac{\partial^j w(x)}{\partial x_k^j} = O_{(j=0, 1, 2)} \left(\frac{1}{F(x)} \right). \quad (10)$$

Крім цього, $w(x)$ є розв'язок системи (1). Справді,

$$A \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right) w(x) = g(x) + \lambda^2 \int_{\infty}^{\infty} \omega_{\lambda}(x, z) g(z) dz \equiv 0,$$

бо $g(x)$ — розв'язок системи (9).

Покажемо тепер, що $w(x) \equiv 0$. Легко пересвідчитись, що для оператора $A \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right)$ має місце така формула:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{M}_r} u' A \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right) u dx = \\ & - 2 \int_{\mathcal{M}_r} \Phi(x) dx + \int_{S_r} \left\{ u' \sum_{kl=1}^n \nu_k \left(A'_{kl}(x) \frac{\partial u}{\partial x_l} + A_{kl}(x) \frac{\partial u}{\partial x_l} \right) + \right. \\ & \left. + 2u' \sum_{k=1}^n \nu_k A'_k(x) u \right\} d_x S, \end{aligned} \quad (11)$$

де $\mathcal{M}_r$ — шар радіуса r , S_r — його границя, ν_k — напрямляючі косинуси зовнішньої до S_r нормалі. Після застосування формули (11) до $w(x)$, враховуючи при цьому оцінки (10) і (8) і переходячи до границі при $r \rightarrow \infty$, як неважко бачити, дана формула набере вигляду:

$$0 = -2 \int_{\infty}^{\infty} \Phi(x) dx.$$

Беручи до уваги (3), маємо:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\infty}^{\infty} \Phi(x) dx \geq C \int_{\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^n \frac{\partial w'}{\partial x_k} \frac{\partial w}{\partial x_k} = \\ &= C \int_{\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial w_1}{\partial x_k} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial w_p}{\partial x_k} \right)^2 \right] dx. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що $w_1(x), \dots, w_p(x)$ — постійні, тобто $w(x) \equiv \text{const.}$ (12)

На основі (12), (10) і (8), очевидно, $w(x) \equiv 0$.

Подіємо тепер оператором (5) на $w(x) = \int_{\infty}^{\infty} \omega_{\lambda}(x, z) g(z) dz$.

Одержимо:

$$\left(A \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right) - \lambda^2 \right) w(x) = \int_{\infty}^{\infty} \left(A \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right) - \lambda^2 \right) \omega_{\lambda}(x, z) g(z) dz + g(x).$$

Оскільки $w(x) \equiv 0$, $\omega_{\lambda}(x, y)$ — фундаментальна матриця оператора (5), то, очевидно, $g(x) \equiv 0$.

Звідси, за альтернативою Фредгольма, система (7) розв'язується за першою теоремою Фредгольма.

На основі леми 1 п. 7 [1] $h(x, y)$ неперервно диференційовна по x_k при $x \neq y$. Неважко пересвідчитись, що при цій умові $\omega(x, y)$, яка визначається формулою (4), — неперервно диференційовна два рази функція при $x \neq y$. Крім того, $\omega(x, y)$ задовольняє і умові (2), за рахунок першого доданка $\omega_\lambda(x, y)$.

Таким чином, $\omega(x, y)$ — фундаментальна матриця для системи (1). Теорема доведена.

Ми обмежились системами другого порядку лише для стислості викладу. Цілком аналогічним шляхом можна довести таку ж теорему для систем Ейлера вищого порядку, які одержуються при розв'язуванні основної варіаційної задачі для функціоналу виду

$$\int_{\infty} \Phi(x) dx = \\ = \int_{\infty} \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_n = s \\ l_1 + \dots + l_n = s}} \frac{\partial^{l_1 + \dots + l_n} u'(x)}{\partial x_1^{l_1} \dots \partial x_n^{l_n}} A_{k_1 \dots k_n l_1 \dots l_n}(x) \frac{\partial^{k_1 + \dots + k_n} u(x)}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}$$

у припущенні, що

$$\int_{\infty} \Phi(x) dx \geq C \int_{\infty} \sum_{k_1 + \dots + k_n = s} \frac{\partial^{k_1 + \dots + k_n} u'(x)}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} \frac{\partial^{k_1 + \dots + k_n} u(x)}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} \quad (C > 0)$$

2. У роботі [6], виходячи з параболічних систем, доведена теорема Ліувілля для еліптичних систем з сталими коефіцієнтами, що містять лише похідні найвищого порядку, який припускається парним, і систем, коли, крім похідних найвищого порядку, входять ще й похідні нульового порядку, причому коефіцієнти при них задовольняють деяким додатковим умовам.

Як виявилось, узагальнену теорему Ліувілля для більш загальних еліптичних систем із сталими коефіцієнтами можна довести іншим шляхом, який ґрунтується лише на еліптичності системи.

Узагальнена теорема Ліувілля. Нехай система з сталими коефіцієнтами

$$\sum_{k_1 + \dots + k_n < s} (-1)^{k_1 + \dots + k_n} A_{k_1 \dots k_n} \frac{\partial^{k_1 + \dots + k_n} u}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} = 0 \quad (13)$$

задовольняє умові (A):

для матриць

$$\sum_{k_1+\dots+k_n < s} A_{k_1\dots k_n} (2\pi i a_1)^{k_1} \dots (2\pi i a_n)^{k_n},$$

$$\sum_{k_1+\dots+k_n = s} A_{k_1\dots k_n} (2\pi i a_1)^{k_1} \dots (2\pi i a_n)^{k_n}$$

i

$$\sum_{k_1+\dots+k_n = s_0} A_{k_1\dots k_n} (2\pi i a_1)^{k_1} \dots (2\pi i a_n)^{k_n},$$

де s_0 — найменший порядок похідної, яка входить у (13), існують обернені матриці для всякого дійсного ненульового $a = (a_1, \dots, a_n)$.

Тоді, якщо s разів неперервно диференційований розв'язок системи (13) має в усьому просторі оцінку типу $u(x) = O(|x|^l)$, то він являє собою многочлен степеня $[l]$.*

Звідси, зокрема, впливає теорема Ліувілля. Якщо s разів неперервно диференційований розв'язок $u(x)$ системи (13), яка задовольняє умові (A), обмежений в усьому просторі, то

$$u(x) \equiv \text{const.}$$

Крім цього, виявилось, що для деяких еліптичних систем із змінними коефіцієнтами, а саме, для систем, розглянутих в п. 1, має місце така теорема.

Т е о р е м а. Якщо двічі неперервно диференційований розв'язок $u(x)$ системи (1), яка задовольняє умовам теореми існування фундаментальної матриці, має оцінку типу $u(x) = O(|x|^k)$ при $|x| \rightarrow \infty$, то він являє собою тотожний нуль.

Ця теорема справедлива і для таких систем вищих порядків, про які йшла мова в п. 1.

ЛІТЕРАТУРА

1. Я. Б. Лопатинський. Укр. мат. журн., т. III, № 1 (1951).
2. Я. Б. Лопатинский. Укр. мат. журн., т. III, № 3 (1951).
3. Д. П. Мельник. Наукові записки ЛДУ, серія механіко-математична, випуск 8, 1957.
4. О. Д. Эйдельман. Мат. сб., т. 33 (75), в. 2.

* $[l]$ — ціла частина числа l .

ДО ПИТАННЯ ПРО ЗВЕДЕННЯ ГРАНИЧНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЕЛІПТИЧНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДО РЕГУЛЯРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У ВИПАДКУ НЕОПУКЛОЇ ОБЛАСТІ.

Як показано в [1], ядра побудованих Я. Б. Лопатинським у [2] потенціалів, що зводять граничні задачі для еліптичних систем до регулярних інтегральних рівнянь, взагалі кажучи, виявляються розривними вздовж деяких необмежених кінчних множин. Це перешкоджає застосуванню таких ядер у випадках неопуклих (і негомеоморфних кулі) областей. Користуючись, проте, значною загальністю результатів згаданого автора, можна вказати такий спосіб уникнення цього недоліку.

Позначимо

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2}; & \rho &= \sqrt{\xi_1^2 + \dots + \xi_{n-1}^2}; \\ R &= \sqrt{r^2 + x_n^2}; & P &= \sqrt{\rho^2 + \xi_n^2}. \end{aligned}$$

Легко переконатись, що перетворення

$$\begin{aligned} \xi_j &= \frac{2h^2 x_j}{(2h + x_n)^2 + r^2}; & x_j &= \frac{2h^2 \xi_j}{(h - \xi_n)^2 + \rho^2}; & (1) & & (2) \\ \xi_n &= \frac{h(R^2 + 2hx_n)}{(2h + x_n)^2 + r^2}; & x_n &= \frac{2h(h\xi_n - P^2)}{(h - \xi_n)^2 + \rho^2}. \\ & & (j &= 1, \dots, n-1) \end{aligned}$$

відображає кулю $2hx_n + R^2 < 0$ в півпростір $\xi_n < 0$ і навпаки (при цьому півпростір $x_n > 0$ також відображується в кулю $P^2 - h\xi_n < 0$).

При такому відображенні:

- а) початок координат $x = \xi = 0$ залишається нерухомим;
- б) забезпечується консерватизм напрямів у точці $x = \xi = 0$;

- в) зберігається аналітичність поза точками $x_0 = (\overbrace{0, \dots, 0}^{n-1}, -2h)$ та $\xi_0 = (\overbrace{0, \dots, 0}^{n-1}, h)$ (відповідно для перетворень (1) чи (2)).

Нехай

$$\begin{aligned} A\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x) &= 0 & x \in V \\ \lim_{x \rightarrow 0} B\left(o, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x) &= f(o) & o \in S \end{aligned} \quad (3)$$

гранична задача, що розглядається в [2] (в місцевих координатах). Вибравши h настільки малим, щоб було $x_0 \in \tilde{V} + S$, перетворимо цю задачу з допомогою (1) в

$$\begin{aligned} \tilde{A} \left(\xi, \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \tilde{u}(\xi) &= 0, & \xi \in \tilde{V} \\ \lim_{\xi \rightarrow 0} \tilde{B} \left(o, \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \tilde{u}(\xi) &= \tilde{f}(o) & o \in \tilde{S}. \end{aligned} \quad (4)$$

У зв'язку з зберіганням при цьому перетворенні властивостей, що вимагаються в [2], для задачі (4) у відображеній області $\tilde{V}$ за методом [2] може бути побудоване ядро $\tilde{G}(\xi)$ потенціала, що задовольняє системі

$$\tilde{A} \left(\xi, \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \tilde{G}(\xi) = 0 \quad (\xi \neq 0),$$

а також має властивості «стрибка» та регулярності.

Перетворивши це ядро $\tilde{G}(\xi)$ за допомогою (2), одержимо нове ядро $G(x)$, що задовольнятиме системі

$$A \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right) u(x) = 0.$$

При цьому, властивості „стрибка“ та регулярності зберуться внаслідок властивостей а) і в) перетворення (2).

З аналітичності ж функції $\tilde{G}(\xi)$ у напівпросторі $\xi_n > 0$ (за винятком початку координат $\xi = 0$) та властивості в) перетворення (2) впливає аналітичність ядра $G(x)$ зовні кулі $2hx_n + K^2 \leq 0$ (за винятком точки $x = 0$).

Це, очевидно, дозволяє застосовувати ядро $G(x)$ і до таких неопуклих (і негомеоморфних кулі) областей V , для яких можлива побудова неперервно залежних від координат точки дотику сімей дотичних сфер, що цілком лежать зовні $V + S$ (за винятком точки дотику).

ЛІТЕРАТУРА

1. С. П. Гавеля. Про зведення до регулярних інтегральних рівнянь граничних задач для еліптичних систем диференціальних рівнянь у випадку неопуклих областей, Наук. зап. ЛДУ, 1957.
2. Я. Б. Лопатинский. Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям, «Укр. мат. журнал», т. 5, № 2, 1953.