

МАТЕМАТИКА

В. О. ЛИХАЧОВ

ДЕФОРМАЦІЯ ПЛАСТИНКИ З ВПАЯНИМ КОРОТКИМ ЦИЛІНДРОМ

Розв'язується контактна задача спряження безмежної пластинки з круглим циліндром обмеженої довжини.

Напружений стан пластинки на безмежності вибирається таким, при якому комплексні потенціали $\varphi(z)$ і $\psi(z)$ Колосова—Мусхелішвілі виражаються у вигляді поліномів $m+1=0$ -ї степені відносно комплексної змінної z . Для визначення напруженого стану циліндра будується такий розв'язок системи рівнянь Ляме:

$$u_r = u_r^{(b)} + u_r^{(p)} + u_r^{(n)} + u_r^{(l)},$$

$$u_z = u_z^{(b)} + u_z^{(p)} + u_z^{(n)} + u_z^{(l)},$$

$$u_\theta = u_\theta^{(b)} + u_\theta^{(p)} + u_\theta^{(n)} + u_\theta^{(l)},$$

де за допомогою індекса «б» позначено розв'язок системи рівнянь Ляме у функціях Бесселя і Макдональда; за допомогою індекса «р» — розв'язок у вигляді безмежного ряду по додатних степенях незалежної змінної r ; за допомогою індекса «n» — розв'язок у вигляді безмежного ряду з від'ємними степенями змінної r ; за допомогою індекса «l» — розв'язок у вигляді безмежного ряду, який складається з $\ln r$.

Сталі, які входять у вирази для функцій $\varphi(z)$, $\psi(z)$, а також сталі інтегрування рівняння Ляме визначаються з умов спряження пластинки з циліндром і задоволення умови на торцях циліндра.

ДО ПИТАННЯ ПРО РОЗРАХУНОК КОНСОЛЬНОЇ ПЛАСТИНКИ І КОНСОЛЬНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ПОЛОГОЇ ПАНЕЛІ

Розглядається згин тонкої прямокутної пластинки з сторонами a і b , в якій один край нерухомо закріплений, а три інші вільні. Пластинка перебуває під дією довільно розподіленого навантаження інтенсивності q .

Задача зводиться до визначення розв'язку рівняння

$$\Delta \Delta W = \frac{q}{D}$$

при таких граничних умовах:

$$\begin{aligned} W &= 0, \quad \frac{\partial W}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = 0, \\ M_x &= 0, \quad R_x = 0 \quad \text{при } x = a, \\ M_y &= 0, \quad R_y = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad y = b. \end{aligned} \quad (1)$$

При розв'язуванні поставленої задачі користуємося методом додаткових навантажень. Продовжуємо нашу пластинку в напрямі x на a і край її нерухомо або шарнірно закріплюємо. Вздовж лінії $x = a$ прикладаємо розподілені моменти $m(y)$ і розподілене нормальне навантаження $p(y)$.

Для симетрії задачі на продовженій частині пластинки прикладаємо розподілене навантаження так, щоб воно було симетричне навантаженню консолі відносно лінії $x = a$, а край пластинки $x = 2a$ вважаємо нерухомо закріпленим. Розв'язок такої задачі у формі тригонометричних рядів у літературі відомий; ми його можемо розглядати як функцію інтенсивності m і p , тобто $W = W(m, p)$. Підберемо далі m і p так, щоб виконувалися умови

$$M_x(m, p) = 0, \quad R_x(m, p) = 0 \quad \text{при } x = a. \quad (2)$$

При справдженні умов (2) розв'язок $W = W(m, p)$, буде задовольняти й граничні умови (1), отже, він є також і розв'язком нашої задачі.

Одночасно зауважимо, що розв'язок допоміжної задачі W , в силу наявності вздовж лінії $x = a$ зосереджених моментів m і нормальних сил p , являє собою кусково-неперервну функцію, тобто має різні аналітичні вирази при $x < a$ і $x > a$, що співпадають на лінії $x = a$. Тільки один з них при справдженні умови (2) буде імітувати роботу консолі, вибір якої залежить від знака моментів m .

Метод додаткових навантажень, застосований до консольної пластинки, узагальнюється на задачу про згин консольної пологої циліндричної панелі. Тут, крім розподілених по лінії моментів m , нормальних сил p , треба прикласти ще розподілені по лінії зусилля σ в серединній поверхні панелі.

А. М. КУЗЕМКО

ЗВЕДЕННЯ ДО РЕГУЛЯРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗАДАЧ ПРО ПРУЖНУ РІВНОВАГУ АНІЗОТРОПНОЇ ПЛАСТИНКИ

В роботі [2] диференціальне рівняння прогину

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{06}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \\ + 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q$$

при граничних умовах

$$w=0, \quad \frac{\partial w}{\partial n}=0$$

наводиться після складних перетворень до інтегрального рівняння типу Лаурічелла—Шермана. Використовуючи результати роботи [1], задачі такого типу для будь-якого гладкого контура можна привести до регулярних інтегральних рівнянь. Ядро такого рівняння шукається за формулою

$$g(x, y) = \int_{|\tau|=1} d_\tau T \int_+ \Phi^{(s-s_j-1)}(x, y, \tau + \lambda \nu) A^{-1}(\tau + \lambda \nu) \\ (E, \dots, (\tau_2 + \lambda \nu_2)^3 E) R_1(\tau, \nu) d\lambda(\tau, \nu=0),$$

де $d_\tau T$ — елемент площі поверхні дійсної кулі, $|\tau|=1$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Я. Б. Лопатинський. Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям. УМЖ, т. V, № 2, 1953.
2. Л. Д. Корбукова. Изгиб эллиптической анизотропной пластинки, заделанной по краю. Изв. АН СССР, ОТН, № 12, 1958.

ДЕЯКІ БІГАРМОНІЧНІ ЗАДАЧІ ДЛЯ НЕСКІНЧЕНОЇ СМУГИ З ПІДКРІПЛЕНИМИ КРАЯМИ

ПЛОСКИЙ НАПРУЖЕНИЙ СТАН СМУГИ З ПІДКРІПЛЕНИМИ КРАЯМИ

Розглядається пружна ізотропна смуга ($-\infty < x < \infty$, $-h \leq y \leq h$), краї якої $y = \pm h$ спаяно з пружними тонкими стержнями однакової жорсткості, сталої по довжині стержня. У зв'язку з незначною висотою підкріплюючих стержнів припускається, що спай кожного з них із смугою має місце вздовж їх осевих ліній, тобто при $y = \pm h$. Смуга знаходиться під дією прикладеного до підкріплених країв поперечного і поздовжнього навантажень, інтенсивність яких відповідно $q^+(x)$ і $h^+(x)$ при $y = h$, $q^-(x)$ і $h^-(x)$ при $y = -h$. Задача зводиться до визначення контактних напружень на контурі спаю, нормальний і дотичний компоненти яких позначимо через $p^+(x)$, $t^+(x)$ на верхньому і $p^-(x)$, $t^-(x)$ на нижньому краях смуги.

Виходячи з умови рівності зміщень на контурі спаю, для визначення $p(x)$ і $t(x)$ одержано систему рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{1}{E} \left(\frac{\partial X_x}{\partial x} \right)_{y=\pm h} - \frac{\nu}{E} \left(\frac{\partial Y_y}{\partial x} \right)_{y=\pm h} &= \frac{1}{G_1} [\pm t(x) - n(x)], \\ \frac{2+\nu}{E} \left(\frac{\partial^3 X_y}{\partial x^3} \right)_{y=\pm h} - \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^3 X_x}{\partial x^2 \partial y} \right)_{y=\pm h} &= -\frac{1}{G_2} [\pm p(x) - q(x)]. \end{aligned} \quad (1)$$

Тут E , ν — пружні постійні матеріалу смуги G_1 , G_2 — жорсткості стержнів на розтяг та згин, віднесені до товщини смуги.

При цьому величинам $p(x)$, $t(x)$, $q(x)$, $n(x)$ при $y = h$ повинен бути приписаний індекс «+», а при $y = -h$ відповідно «-». Вирази напружень у лівих частинах системи (1) через функції $p(x)$ і $t(x)$ відомі з розв'язку плоскої задачі теорії пружності для непідкріпленої смуги при заданих на границі напруженнях $p(x)$, $t(x)$.

Розв'язок системи (1) одержано методом інтегральних перетворень Фур'є. Розглянуто різні часткові випадки навантаження смуги.

При стисканні смуги зосередженими силами P , прикладеними в точках $(0, \pm h)$ і направленими по осі Y , максимальне значення напружень на контурі спаю дорівнює:

$$p_h^{\max} = -\frac{P}{\pi h} \int_0^{\infty} \frac{2b_1 \lambda ch^2 \lambda + sh 2\lambda + 2\lambda}{D_1(\lambda)} d\lambda, \quad (2)$$

де

$$D_1(\lambda) = \delta_1 \delta_2 [(1 - \alpha^2) \operatorname{sh} 2\lambda - 2\gamma\lambda] \lambda^4 + 2\delta_2 \lambda^3 \operatorname{sh}^2 \lambda + \\ + 2\delta_1 \lambda \operatorname{ch}^2 \lambda + \operatorname{sh} 2\lambda + 2\lambda \quad (3)$$

і

$$\delta_1 = \frac{G_1 \beta}{h}, \quad \delta_2 = \frac{G_2 \beta}{h^3}, \quad \beta = \frac{2}{E}, \quad \alpha = \frac{1-\nu}{2}, \quad \gamma = \frac{1+\nu}{2}. \quad (4)$$

Головна частина інтеграла (2), яка відповідає максимуму напружень у півплощині з підкріпленням краєм, має вигляд

$$p_{\infty}^{\max} = - \frac{P}{\pi h} \int_0^{\infty} \frac{(\delta_1 \lambda + 1) d\lambda}{\delta_1 \delta_2 (1 - \alpha^2) \lambda^4 + \delta_2 \lambda^3 + \delta_1 \lambda + 1} = - \frac{2P}{3\sqrt[3]{3} \sqrt[3]{G_1 \beta (1-k)}},$$

$$\text{де } k = \begin{cases} 0 & \text{при } G_1 = 0, \\ \frac{(1-\nu)^2}{4} & \text{при } G_1 = \infty. \end{cases}$$

При цьому

$$p_h^{\max} - p_{\infty}^{\max} = 0 \left(\frac{1}{h^4} \right).$$

У випадку поперечного згину смуги з одержаних виразів для напружень у смугі виділено елементарний розв'язок, який дається формулами опору матеріалів.

Аналогічним шляхом одержується розв'язок плоскої задачі для смуги, один з країв якої спаяний з тонким пружним стержнем постійної жорсткості, а на другому задані напруження або зміщення.

Одержані результати можуть бути використані для дослідження напружень у стінках двотаврових і таврових балок, якщо останні знаходяться в умовах плоского напруженого стану.

ЗГИН ПЛАСТИНКИ-СМУГИ З ПІДКРІПЛЕНИМ КРАЄМ

Розв'язана задача згину пружної тонкої пластинки, що має форму нескінченної смуги ($-\infty < x < \infty, 0 \leq y \leq b$). Край $y=0$ пластинки защемлено, край $y=b$ спаяно з пружним тонким стержнем постійної жорсткості, який працює на згин та кручення.

Розв'язок, одержаний при довільному навантаженні, досліджений для

- а) сили, яка діє в довільній точці пластинки,
- б) моменту, прикладеного до краю.

Зокрема, коли пластинка згинається під дією зосередженої сили P , прикладеної до точки $(0, b)$, максимальні значення згинаючого моменту і прогину визначаються формулами

$$w_{\max} = \kappa_1 \frac{Pb^2}{\pi D}, \quad M_y^{\max} = -\kappa_2 P,$$

де D — циліндрична жорсткість пластинки. Коефіцієнти κ_1 і κ_2 , що виражають вплив підкріплюючого стержня, підраховані для різних значень жорсткостей стержня.

Розв'язок цієї задачі може бути використаний, наприклад, для визначення напружень від місцевого згину пояска деяких типів підкранових балок біля точок завантаження пояска зосередженими реакціями коліс кранового візка.

О. С. КОВАНЬКО

ПРО ОДИН КРИТЕРІЙ КОМПАКТНОСТІ СИСТЕМ $\tilde{B}$ І B_p МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Питання компактності систем $\tilde{B}$ і B_p майже періодичних функцій було розв'язане в нашій статті [1] у відповідних сенсах збіжності. Згідно з новим визначенням $\tilde{B}$ майже періодичних функцій [2] можна дати інший критерій компактності в іншому сенсі збіжності.

Введемо такі позначення: нехай $f(x) \in L_p$, $\varphi(x) \in L_p$ ($-\infty < x < +\infty$); E — вимірنا множина на $(-\infty < x < +\infty)$;

$$\delta_B E = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|E(-T, +T)|}{2T};$$

$$D_{B_p}^E(f(x), \varphi(x)) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2T} \int_{E(-T, +T)} |f(x) - \varphi(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Визначення І (Фольнер). Вимірна функція $f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) називається KB майже періодичною (KB м.п.); якщо довільним $\varepsilon > 0$ та $\eta > 0$ ($\eta < 1$):

1) відповідає відносно щільна множина майже періодів $\{\tau\}$ та вимірна множина $E \subset (-\infty < x < +\infty)$, що $|f(x + \tau) - f(x)| < \varepsilon$, якщо $x \in E$, $x + \tau \in E$;

2) існує множина $Z \subset (-\infty < x < +\infty)$, ($\delta_B Z = 1$), що $f(x)$ скінченна для $x \in Z$.

Теорема І [2] [3] (Фольнер). Клас KB м. п. функцій співпадає з класом $\tilde{B}$ м. п. функцій, тобто довільним $\varepsilon > 0$ і

$\eta > 0$ ($\eta < 1$) відповідає поліном $P_n(x) = \sum_1^n a_k e^{i\lambda_k x}$ і множина E ($\delta_B E > 1 - \eta$), що $|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon$ для $x \in E$.

Визначення II. $f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) називається B_p майже періодичною (B_p м. п.), коли існує поліном $P_n(x) = \sum_1^n a_k e^{i\lambda_k x}$, що $D_{B_p}^E(f(x), P_n(x)) < \varepsilon$ для довільного E .

Теорема II. B_p м. п. $\subset \tilde{B}$ м. п.

Ми довели такі теореми.

Теорема А. Необхідна і достатня умова компактності системи $\tilde{B}$ м. п. функцій $\{f(x)\}$ на деякій множині E ($-\infty < x < +\infty$), $\delta_B E > 1 - \eta$ (η довільно мале) в сенсі рівномірної збіжності полягає ось в чому.

Для довільних $\varepsilon > 0$ і $\eta > 0$ ($\eta < 1$):

1) існує таке $M = M(\eta) > 0$ і множина E_1 ($\delta_B E_1 > 1 - \eta$), що для всіх функцій $f(x)$ системи виконується нерівність

$$|f(x)| < M,$$

якщо $x \in E_1$;

2) існує $\rho = \rho(\varepsilon, \eta) > 0$ і множина E_2 ($\delta_B E_2 > 1 - \eta$), що для всіх функцій $f(x)$ системи має місце

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon,$$

якщо $|x' - x''| < \rho$, і $x' \in E_2$, $x'' \in E_2$;

3) існує відносно щільна множина майже періодів $\{\tau\}$, спільних для всіх функцій $f(x)$ системи, і множина E_3 ($\delta_B E_3 > 1 - \eta$), що $|f(x + \tau) - f(x)| < \varepsilon$ для $x \in E_3$, $x + \tau \in E_3$.

Теорема В. Нехай система B_p м. п. функцій $\{f(x)\}$ компактна в сенсі теореми А і нехай довільному $\varepsilon > 0$ відповідає $\sigma = \sigma(\varepsilon) > 0$, що для всіх функцій $f(x)$ системи існує нерівність:

$$D_{B_p}^E(f(x), 0) < \varepsilon,$$

якщо $\delta_B E < \sigma$, тоді система $\{f(x)\}$ компактна в сенсі метрики $D_{B_p}^E$.

ЛІТЕРАТУРА

1. А. С. Кованько. О компактности систем обобщенных почти периодических функций. Мат. сб., т. 16 (58), № 3, 1945.
2. E. F o l n e r. On the structure of generalised almost periodic functions. D. K. Danske Vid K. Bind 2, II, 1945.
3. A. Besicovitch. Almost periodic functions. Cambridge, 1932.

1. ПРО ОДНУ ВЛАСТИВІСТЬ ДОДАТНИХ ПОЛІНОМІАЛЬНИХ ОПЕРАТОРІВ

Розглядається множина $M_n(u)$ додатних поліноміальних операторів вигляду

$$U_n(f, x) = \sum_{k=0}^m f(x_k) \mu_k^n(x),$$

де $\mu_k^n(x)$ — додатні поліноми степені „ n “ на $(0,1)$, $0 \leq x_1 < \dots < x_m \leq 1$, m — довільне ціле.

Доводиться теорема

$$\tau_n(M_n) = \inf_{U_n \in M_n(u)} \max_{0 \leq x \leq 1} \sup_{f \in H_\omega} |f(x) - U_n(f, x)| = O\left(\omega\left(n^{-\frac{1}{2}}\right)\right), (1)$$

де H_ω — клас неперервних функцій, модуль неперервності яких не перевищує заданого $\omega(\delta)$. Причому в правій частині (1) O велике не можна замінити на o мале.

Теорема узагальнюється на оператори вигляду.

$$U_n(f, x) = \int_0^1 f(t) d_t K_n(t, x),$$

$$K_n(t, x) = \sum_{k=0}^m A_k(t) \mu_k(x),$$

де $A_k(t)$ — неспадні функції t ; $\mu_k(x)$ — додатні поліноми на $(0,1)$ степені „ n “.

ЛІТЕРАТУРА

1. И. Г. Соколов. Наук. зап. ЛДУ, т. 5, вип. 1, 1947.
2. И. Г. Соколов. Наук. зап. ЛДУ, т. 12, вип. 3, 1949.
3. М. Кас. *Studia Mathematica*, t. VII.
4. М. Кас. *Studia Mathematica*, t. VIII.
5. Полиан Сеге. Задачи и теоремы из анализа, т. II. ГТТИ, 1956.

2. РЯД ФУР'Е ФУНКЦІЇ ОБМЕЖЕНОЇ ВАРІАЦІЇ

В роботі дається точна асимптотична оцінка верхньої грані відхилень функції від їх часткових сум Фур'є по класу H_ω періодичних неперервних функцій обмеженої варіації, модуль

неперервності яких не перевищує заданого модуля неперервності $\omega(\delta)$, а варіація не перевищує даного числа V .

Справедлива асимптотична рівність

$$\varepsilon_n(\omega, v) = \frac{Q_n}{2\pi} \ln \frac{1}{\omega(h)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega\left(\frac{4z}{2n+1}\right) \sin z dz + O\left(\omega\left(\frac{1}{h}\right)\right),$$

де $\varepsilon_n(\omega, v) = \sup_{f \in H_\omega} |f(x) - s_n(f, x)|$, $s_n(f, x)$ — часткова сума Фур'є.

$$\frac{1}{2} \leq Q_n \leq 1, \quad h = \frac{\pi}{2n+1}, \quad O\left(\omega\left(\frac{1}{h}\right)\right) \leq VC \omega\left(\frac{1}{h}\right).$$

Якщо $\omega(\delta)$ — опукла, то $Q_n = 1$.

ЛІТЕРАТУРА

1. С. Никольский. ДАН СССР, № 52, 1946.
2. А. Зигмунд. Тригонометрические ряды. ГНТИ, 1939.

М. М. ГОРБАЧ

1. ПРО СУМУВАННЯ ІНТЕГРАЛІВ ФУР'Є ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ МЕТОДОМ РИСА—БОХНЕРА

Нехай KB^α є клас функцій двох змінних, сумовних по всій площині:

$$\iint_{-\infty}^{\infty} |f(x, y)| dx dy < \infty$$

і таких, що середнє

$$\bar{f}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x + t \cos \theta, y + t \sin \theta) d\theta$$

задовольняє умову $\bar{f}(t) \in K \text{Lip } \alpha$, $0 \leq \alpha \leq 1$.

Розглянемо оператор Риса — Бохнера:

$$S_R^{[\beta]}(f; x, y) = \iint_{v \leq R} K_\beta\left(\frac{v}{R}\right) a(\alpha, \beta) e^{i(\alpha x + \beta y)} d\alpha d\beta, \quad v^2 = \alpha^2 + \beta^2,$$

$$\text{де } a(\alpha, \beta) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} f(t, z) e^{-i(\alpha t + \beta z)} dt dz,$$

$$K_{\delta}(t) = \begin{cases} (1-t^2)^{\delta}, & 0 \leq t \leq 1, \\ 0, & t > 1, \end{cases} \quad \left(\delta \geq \frac{1}{2}\right),$$

як метод наближення функції $f(x, y) \in KB^{(\alpha)}$.

В роботі вивчається величина

$$E_R^{(\delta)}(KB^{(\alpha)}) = \sup_{f \in KB^{(\alpha)}} \max_{(x, y)} |f(x, y) - S_R^{(\delta)}(f; x, y)|.$$

Теорема. Для класу функцій $KB^{(\alpha)}$ має місце асимптотична рівність

$$E_R^{(\delta)}(KB^{(\alpha)}) = \begin{cases} O\left(\frac{1}{R^{\alpha}}\right), & \delta > \frac{1}{2}, \\ \frac{2^{\alpha+1}}{\pi} \frac{\ln R}{R^{\alpha}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} u^{\alpha} \sin u du + O\left(\frac{1}{R^{\alpha}}\right), & \delta = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

ЛІТЕРАТУРА

1. S. Bochner. Trans. Amer. Math. Soc., № 40, 1936.
2. С. М. Никольский. Тр. матем. ин-та им. В. А. Стеклова, № 15, 1945.

2. НАБЛИЖЕННЯ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ СУМАМИ ФУР'Є

Нехай $K_1 K_2 W^{(r, l)} H^{(\alpha, \beta)}$ — клас 2π — періодичних відносно кожної із змінних x і y функцій $f(x, y)$, які задовольняють для $r, l \geq 0, l \geq r; 0 < \alpha, \beta < 1$ такі умови:

$$|\varphi_1(x_2, y_2) - \varphi_1(x_1, y_1)| \leq K_1 |x_2 - x_1|^{\alpha} + K_2 |y_2 - y_1|^{\beta},$$

$$|\varphi_2(x_2, 0) - \varphi_2(x_1, 0)| \leq K_1 |x_2 - x_1|^{\alpha},$$

$$\text{де } \varphi_1(x, y) = \frac{\partial^l f(x, y)}{\partial y^l}, \quad \varphi_2(x, y) = \frac{\partial^r f(x, y)}{\partial x^r},$$

а K_1 і K_2 — константи.

Нехай

$$E_{mn} = \sup_{f \in K_1 K_2 W^{(r, l)} H^{(\alpha, \beta)}} \max_{(x, y)} |f(x, y) - S_{mn}(f; x, y)|,$$

де $S_{mn}(f; x, y)$ — сума Фур'є функції $f(x, y)$ порядку (mn) .

Т е о р е м а. Для класу функції $K_1 K_2 W^{(r,l)} H^{(\alpha,\beta)}$ має місце асимптотична рівність

$$E_{mn} = \frac{K_1 2^{\alpha+1}}{\pi^2} \frac{\ln n}{n^{r+\alpha}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} u^\alpha \sin u du + \\ + \frac{s}{\pi^4} \frac{\ln n \ln m}{m^l} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \min \left[K_1 \left(\frac{2u}{n} \right)^\alpha, K_2 \left(\frac{2v}{m} \right)^\beta \right] \sin u \sin v du dv + \\ + \rho_{mn},$$

де

$$\rho_{mn} = O \left[\frac{\ln n \ln m}{m^l} \left(\frac{1}{n^\alpha} + \frac{1}{m^\beta} \right) \right] + O \left(\frac{1}{n^{r+\alpha}} + \frac{1}{m^{l+\beta}} \right),$$

причому існує така абсолютна константа C , що

$$|\rho_{mn}| < C \left[\frac{\ln n + \ln m}{m^l} \left(\frac{1}{n^\alpha} + \frac{1}{m^\beta} \right) \right] + C \left(\frac{1}{n^{r+\alpha}} + \frac{1}{m^{l+\beta}} \right).$$

ЛІТЕРАТУРА

1. С. М. Никольский. Тр. матем. ин-та им. Стеклова, № 15, 1945.
2. Н. Т. Бугаец. ДАН СССР, т. XXXIX, № 6, 1951.
3. В. Т. Пинкевич. ДАН СССР, сер. матем., т. 4, № 6, 1940.
4. И. Г. Соколов. ДАН СССР, т. 103, № 1, 1955.
5. В. О. Гукевич. Теор. и приклад. матем., т. 3, 1959.

Л. Д. ІВАНОВ

ДО ТЕОРІЇ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ З ДОСКОНАЛОЮ МНОЖИНОЮ ОСОБЛИВИХ ТОЧОК

Досконала множина E площини z із зв'язним доповненням Ω називається ліувіллівською, якщо в Ω не існує непостійної однозначної обмеженої аналітичної функції. Данжуа [1] помітив, що для того, щоб лінійна множина E була ліувіллівською, необхідно і достатньо, щоб $mE=0$. Крім того, він висунув гіпотезу, що це також вірно для множин, розташованих на кривих скінченної довжини. В роботі доведені такі теореми.

Т е о р е м а 1. Для того, щоб множина E , розташована на кривій, дотична якої задовольняє деяку інтегральну умову гладкості, була ліувіллівською, необхідно і достатньо, щоб довжина E дорівнювала нулеві.

Не було ясно, чи є умова рівності нулю довжини E необхідною для того, щоб множина E була ліувіллівською. Пер-

ший результат в цьому напрямі одержав Вітушкін [2], який показав, що існують ліувіллівські множини скінченної довжини. Цей результат одержав таке посилення:

Теорема 2. Існують ліувіллівські множини нескінченної довжини у кожній своїй порції.

Нехай E — досконала множина додатної плоскої міри. Відомо, що функція $f(x) = \int_E \frac{d\sigma_\xi}{\xi - z}$ є неперервна в цілій площині,

ні, непостійна і аналітична ззовні E . В 1916 р. В. Голубев у своїй дисертації вперше побудував приклад непостійної функції, неперервної в цілій площині, аналітичної ззовні множини нульової плоскої міри. В роботі доведена така теорема:

Теорема 3. Нехай E — досконала множина додатної $\varphi(\delta)$ хаусдорфової міри. Якщо $\int_0^1 \frac{\varphi(\delta)}{\delta^2} d\delta < \infty$, то існує непостійна аналітична ззовні E і неперервна в цілій площині функція.

ЛІТЕРАТУРА

1. А. Данжуа. Comper Rendus As. Sc. de Paris 149, 1909.
2. В. Вітушкін. ДАН СССР, т. 127, 1959.

В. О. ГУКЕВИЧ

ІНТЕГРАЛ ФУР'Є ФУНКЦІЇ ОБМЕЖЕНОЇ ВАРІАЦІЇ НА ВСІЙ ОСІ

В роботі досліджується наближення «частковими» інтегралами Фур'є функцій класу $L_p V$ — обмеженої варіації на всій осі, сумовних в p -ій степені на ній ($1 < p \leq 2$).

Нехай f — функція класу $L_p V$ і $S_\omega(f)$ — її частковий інтеграл Фур'є $S_\omega(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{\sin \omega(x-t)}{x-t} dt$.

В роботі дається асимптотична оцінка для $\|f - S_\omega(f)\|_{L_p}$. При цьому використовується метод виділення особливостей, опрацьований С. М. Нікольським.

Основним результатом роботи є зміст такої теореми: нехай f — функція класу $L_p V$ і $x_1, x_2, x_3, \dots$ точки, де $f(x)$ має розриви із стрибками

$$\sigma_k = f(x_k + 0) - f(x_k - 0) \neq 0 \quad (k=1, 2, \dots).$$

Тоді справедлива асимптотична рівність

$$\|f - S_w(f)\|_{L_p} \approx \frac{1}{\pi} \left(\sum_{l=1}^{\infty} |\sigma_l|^p \right)^{\frac{1}{p}} \frac{v^{(p)}(w)}{w^{\frac{1}{p}}} (w \rightarrow \infty),$$

де

$$v^{(p)} = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_0^{\infty} \frac{z \cos z + y \sin z}{z^2 + y^2} e^{-y} dy \right|^p dz \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

З останнього факту, як висновок, впливає таке твердження: необхідною і достатньою умовою для того, щоб функція $f(x)$, що належить до класу $L_p V$, була неперервною на всій осі, є вимога, щоб

$$\|f - S_w(f)\|_{L_p} = o\left(w^{-\frac{1}{p}}\right) (w \rightarrow \infty).$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Н. И. Ахиезер. Лекции по теории аппроксимации. ОГИЗ, 1947.
2. И. И. Ибрагимов. Экстремальные задачи для целых функций. Изв. АН СССР, сер. мат., 23, 1959.
3. С. М. Никольский. Ряды Фурье функций, имеющих производную ограниченной вариации. Изв. АН СССР, сер. мат., 13, 1949.
4. А. Зигмунд. Тригонометрические ряды. ГОНТИ, 1939.

В. Я. СКОРОБОГАТЬКО

ДОСЛІДЖЕННЯ З ЯКІСНОЇ ТЕОРІЇ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ЧАСТКОВИМИ ПОХІДНИМИ

Для системи диференціальних рівнянь еліптичного типу другого порядку розроблені прості достатні ознаки однозначності розв'язку першої-третьої граничних задач; суть цих ознак полягає в тому, що коли внутрішній діаметр d області D , де визначена система диференціальних рівнянь, малий, то перша чи третя гранична задача розв'язна. Як застосування цих результатів одержано новий метод розрахунку критичних розмірів атомних реакторів довільної форми. В застосуванні до ядерних реакторів у формі смуги, циліндра, куба результати нового методу співпадають з результатами, вже відомими з літератури.

Для рівнянь магнітогазодинаміки запропонований метод дозволив знайти ефективні прості умови затухання напруженості магнітного поля із зміною часу.

Виходячи з ідей академіків С. А. Чаплигіна і А. А. Андронova, розроблено новий метод знаходження періодичних роз-

в'язків по часу для нелінійного рівняння параболічного типу. Знайдені достатні умови для періодичності по часу розв'язків системи диференціальних рівнянь «пульсуючого» атомного реактора.

Виділено клас систем диференціальних рівнянь з частковими похідними другого порядку стаціонарних і нестаціонарних, для яких справедливий принцип екстремуму в понятті проф. Я. Б. Лопатинського, результати застосовані до системи рівнянь теорії пружності і узагальненої системи рівнянь Монжа—Ампера.

Знайдено необхідні і достатні умови розкладу в добуток лінійних співмножників з неперервними коефіцієнтами диференціального лінійного оператора n -го порядку. Для одного рівняння

$$L_n y = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = 0, \quad (1)$$

$$x_1 \leq x \leq x_2$$

з неперервними коефіцієнтами справедлива така теорема:

Т е о р е м а. Розклад на множники з неперервними коефіцієнтами оператора (1) рівносильний розв'язку n -точкової задачі Валле—Пуссена в інтервалі $x_1 \leq x \leq x_2$. Знайдені ефективні достатні умови розкладу на лінійні співмножники оператора (1) по коефіцієнтах оператора. Вказані достатні умови, при виконанні яких справедлива теорема про диференціальні нерівності. Застосування: задача з початковими умовами для динамічної системи рівнянь теорії пружності.

На основі теореми одержано новий метод знаходжень умов стійкості для диференціального рівняння (1) в інтервалі $0 \leq x \leq \infty$.

Результати в деяких окремих випадках співпадають з відомими вже ознаками асимптотичної стійкості і нестійкості розв'язків диференціального рівняння (1) в інтервалі $0 \leq x \leq \infty$.

О. М. КОСТОВСЬКИЙ

ВИЗНАЧЕННЯ АРГУМЕНТІВ ПРОСТИХ КОМПЛЕКСНИХ КОРЕНІВ ПРИ ЧИСЛОВОМУ РОЗВ'ЯЗУВАННІ РІВНЯНЬ

В цьому повідомленні дано спрощення методу, який розглядається в роботі [1], для визначення аргументів комплексних коренів при числовому розв'язуванні алгебраїчних рівнянь методом Лобачевського—Грефере.

Нехай дано рівняння з дійсними коефіцієнтами

$$f(x) = 1 + a_1x + \dots + a_nx^n = 0, \quad (1)$$

модулі коренів якого задовольняють нерівності

$$0 < |x_1| \leq |x_2| \leq \dots \leq |x_n|. \quad (2)$$

Треба визначити корені рівняння з наперед заданою точністю. Для цього, зробивши ν перетворень («квадрувань») даного рівняння, одержимо

$$f_\nu(x) = 1 + a_1^{(\nu)} x + \dots + a_n^{(\nu)} x^n = 0, \quad (3)$$

корені якого будуть — x_k^m , де $m = 2^\nu$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Позначимо через P_{α_k} порядок, а через Z_{α_k} першу значущу цифру числа $\alpha_k = x_k^{-m}$.

Припустимо, що модулі коренів уже знайдені і треба визначити аргумент пари спряжених комплексних коренів $x_k = \bar{x}_{k+1} = \rho e^{i\varphi}$. Розглянемо випадок, коли корені x_{k-1} і x_{k+2} , що оточують пару комплексних коренів x_k, x_{k+1} , є прості і дійсні, причому

$$\leq |x_{k-2}| < |x_{k-1}| < \rho < |x_{k+2}| < |x_{k+3}| \leq. \quad (2')$$

З рівняння (3) можемо записати:

$$a_k^{(\nu)} = \alpha_1 \dots \alpha_{k-1} 2\rho^{-m} \cos m\varphi + \sigma_k^{(\nu)}, \quad (4)$$

де

$$\sigma_k^{(\nu)} = \alpha_1 \dots \alpha_{k-1} \alpha_{k+2} + \dots + \alpha_1 \dots \alpha_{k-2} \rho^{-2m} + \dots \quad (5)$$

З умови $P_{\alpha_1 \dots \alpha_{k-1}} 2\rho^{-m} \cos m\varphi > P_{\sigma_k^{(\nu)}}$ випливає, що з яким би числом значущих цифр ми не проводили обчислення, $\cos m\varphi$ можна знайти з рівності (4) в ν -му перетворенні максимум з

$$\mu_k^{(\nu)} = P_{\alpha_1 \dots \alpha_{k-1}} 2\rho^{-m} \cos m\varphi - P_{\sigma_k^{(\nu)}} = P_{\alpha_k^{(\nu)}} - P_{\sigma_k^{(\nu)}} \quad (6)$$

вірними знаками.

У виразі $\sigma_k^{(\nu)}$ ν -го перетвореного рівняння головним членом буде член $\alpha_1 \dots \alpha_{k-1} \alpha_{k+2}$ або член $\alpha_1 \dots \alpha_{k-2} \rho^{-2m}$, тому порядок $P_{\sigma_k^{(\nu)}}$, очевидно, буде рівний більшому з порядків $P_{\alpha_1 \dots \alpha_{k-1} \alpha_{k+2}}$, $P_{\alpha_1 \dots \alpha_{k-2} \rho^{-2m}}$ або інколи може бути більший цієї величини на одиницю, тобто

$$\begin{aligned} P_{\sigma_k^{(\nu)}} &= \max(P_{\alpha_1 \dots \alpha_{k-1} \alpha_{k+2}}, P_{\alpha_1 \dots \alpha_{k+2} \rho^{-2m}}) + \tau_k^{(\nu)} = \\ &= \max(P_{\alpha_1 \dots \alpha_{k-1}} - P_{\alpha_1 \dots \alpha_{k+1}} + P_{\alpha_1 \dots \alpha_{k+2}} + \lambda_{k+1}^{(\nu)}; P_{\alpha_1 \dots \alpha_{k-2}} - \\ &- P_{\alpha_1 \dots \alpha_{k-1}} + P_{\alpha_1 \dots \alpha_{k+1}} + \eta_{k-1}^{(\nu)}) + \tau_k^{(\nu)} = \max(P_{\alpha_{k-1}^{(\nu)}} - P_{\alpha_{k+1}^{(\nu)}} + \\ &+ P_{\alpha_{k+2}^{(\nu)}} + \lambda_{k+1}^{(\nu)}; P_{\alpha_{k-2}^{(\nu)}} - P_{\alpha_{k-1}^{(\nu)}} + P_{\alpha_{k+1}^{(\nu)}} + \eta_{k-1}^{(\nu)}) + \tau_k^{(\nu)}. \end{aligned}$$

З рівностей (6) і (7) одержимо:

$$\begin{aligned} \mu_k^{(v)} = & \min [(P_{a_k^{(v)}} + P_{a_{k+1}^{(v)}}) - (P_{a_{k-1}^{(v)}} + P_{a_{k+2}^{(v)}}) + \\ & + \lambda_{k+1}^{(v)}; (P_{a_{k-1}^{(v)}} + P_{a_k^{(v)}}) - (P_{a_{k-2}^{(v)}} + P_{a_{k+1}^{(v)}}) + \\ & + \eta_{k-1}^{(v)} + \tau_k^{(v)}] = \min [P_{k+1}; P_{k-1}] + \tau_k^{(v)}, \end{aligned} \quad (8)$$

де

$$\lambda_k^{(v)} = \begin{cases} +1, & \text{якщо } Z_{a_{k-1}}^{(v)} < Z_{a_{k+1}}^{(v)}, \quad Z_{a_{k+1}:a_{k-1}}^{(v)} > Z_{a_{k+2}}^{(v)}, \\ 0, & \left\{ \begin{array}{ll} " & " < " & " > " & " \\ " & " > " & " < " & " \end{array} \right. \\ -1, & " & " > " & " < " & ; \end{cases} \quad (9)$$

$$\eta_k^{(v)} = \begin{cases} +1, & \text{якщо } Z_{a_{k-2}^{(v)}} < Z_{a_{k-1}^{(v)}}, Z_{a_{k-1}^{(v)}:a_{k-2}^{(v)}} > Z_{a_{k+1}^{(v)}}, \\ 0, & \left\{ \begin{array}{lll} " & " & " \\ " & " & " \\ " & " & " \end{array} \right. \\ -1, & " & " & " & " & " \end{cases} \quad (10)$$

 $\tau_k^{(v)}$ дорівнює нулю і дорівнює мінус одиниці, якщо

$$P_{a_1 \dots a_{k-1} a_{k+2}} = P_{a_1 \dots a_{k-2} p^{-2m}} = P_{a_1 \dots a_{k-1} a_{k+1} p + a_1 \dots a_{k-2} p^{-2m-1}}.$$

Визначення аргументів спряжених комплексних коренів проводимо в такий спосіб.

Спочатку з формули (8) визначаємо $\mu_k^{(v)}$, і якщо кількість вірних знаків задовольняє задану точність, то знаходимо

$$\cos 2^{\circ} \varphi = \frac{a_k^{(v)}}{2a_1 \dots a_{k-1} \rho^{-2m}} = \frac{a_k^{(v)}}{2\sqrt{a_{k-1}^{(v)} \cdot a_{k+1}^{(v)}}}. \quad (11)$$

Якщо величина $\mu_k^{(v)}$ не задовольняє задану точність, то знаходимо $\cos 2^{v+1}\varphi$ з $v+1$ -го перетвореного рівняння. При достатньому числі перетворень v $\mu_k^{(v)}$ буде мати мале значення тільки тоді, коли досить малі значення буде мати $\cos 2^v\varphi$, тобто аргумент $2^v\varphi$ набирає значення, досить близьке до $2n\pi \pm \frac{\pi}{2}$. Отже, в $v+1$ -му перетворенні $\cos 2^{v+1}\varphi$ приблизно дорівнюватиме одиниці.

Далі знаходимо

$$\cos 2^{v-1}\varphi = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos 2^v\varphi}{2}}. \quad (12)$$

Знак квадратного кореня при $\rho_k^{(v-1)} > 0$ беремо таким, що співпадає із знаком коефіцієнта $a_k^{(v-1)}$, в противному разі знак знаходимо перевіркою, підставляючи $\rho^{2^{v-1}}(\pm \cos 2^{v-1}\varphi + + i \sin 2^{v-1}\varphi)$ в рівняння $f_{v-1}(x) = 0$.

Аналогічно знаходимо $\cos 2^{v-2}\varphi, \dots, \cos \varphi$.

У випадку, коли один чи обидва сусідні корені відносно x_k і x_{k+1} є також комплексними ($x_{k-2} = \bar{x}_{k-1} = \rho_1 e^{i\varphi_1}$, $x_{k+2} = \bar{x}_{k+3} = \rho_2 e^{i\varphi_2}$; $\leq |x_{k-3}| < \rho_1 < \rho < \rho_2 < |x_{k+4}| \leq$), формула (8) залишається справедливою для η -го перетворення, за винятком випадку, коли $\cos 2^\eta \varphi_1$, $\cos 2^\eta \varphi_2$ набирають досить малі значення; при цьому формула (8) буде давати в η -му перетворенні значення $\mu_k^{(\eta)}$ меншим, ніж воно є в дійсності, а значить, якщо $\mu_k^{(\eta)} > 0$, то ніякої перевірки для встановлення знака робити не треба, тобто попередній спосіб залишається справедливим.

Трудність визначення аргументів простих комплексних коренів розглянутим методом, очевидно, не збільшується при збільшенні степеня даного рівняння n , а залежить від кількості перетворень v і кількості встановлення знака $\cos 2^{(\eta)}\varphi$ перевірок.

Звільнившись в даному рівнянні від кратних коренів, можна далі заміною змінної x на $x + h$, де h — довільне дійсне число, дане рівняння звести до рівняння, що має лише прості корені і не має рівних за модулем коренів, крім пар спряжених комплексних.

Розглянемо тепер визначення аргумента комплексного кореня з модулем $\rho = 1,29090$ в прикладі № 2 з [2] (див. § 24, стор. 52):

$$f(x) = 6 - 5x + 4x^2 - 3x^3 - 2x^5 + x^7 = 0, \quad (1)$$

$$\mu_4^{(8)} = \min [(151 + 122) - (74 + 179) + 0; (179 + 151) - (190 + 222) - 1] + 0 = 17,$$

$$k = 4, v = 8, \cos 2^8 \varphi = a_4^{(8)} : 2\sqrt{a_3^{(8)} \cdot a_6^{(8)}} = -0,66082.$$

$\mu_4^{(7)} \geq 7$ (для $\mu_k^{(v)} > 1$ можна $\lambda_{k+1}^{(v)}$, $\eta_{k-1}^{(v)}$, $\tau_k^{(v)}$ не визначати), $a_4^{(7)} < 0$. Отже, $\cos 2^7 \varphi = -0,54232$. $\mu_4^{(6)} \geq 3$, $a_4^{(6)} < 0$, отже, $\cos 2^6 \varphi = -0,54232$. $\mu_4^{(5)} \geq 1$, $a_4^{(5)} < 0$, отже, $\cos 2^5 \varphi = -0,47837$. $\mu_4^{(4)} = \min [(9 + 7) - (4 + 11) - 0; (11 + 9) - (11 + 7) - 1] + 0 = 1$, $a_4^{(4)} < 0$, $\cos 2^4 \varphi = -0,51070$. $\mu_4^{(3)} = 0$, $\cos 2^3 \varphi = \pm 0,49462$, підстановкою $(1,66642)^3 (\pm 0,49462 + i\sqrt{1 - (0,49462)^2})$ в рівняння $f_3(x) = 0$ встановлюємо $\cos 8\varphi = -0,49462$.

$$\cos 4\varphi = \pm 0,50268, \text{ перевіркою встановлюємо, що } \cos 4\varphi = -0,50268.$$

$$\cos 2\varphi = \pm 0,49866, \text{ перевіркою встановлюємо, що } \cos 2\varphi = -0,49866.$$

$\cos \varphi = \pm 0,50067$, перевіркою встановлюємо, що
 $\cos \varphi = -0,50067$.

$$\varphi = 120^\circ 02' 40''.$$

ЛІТЕРАТУРА

1. А. Н. Костовский. Определение аргументов комплексных корней при приближенном решении алгебраических уравнений методом Лобачевского. Доп. та повід. ЛДУ, вип. 6, ч. 2, 1955.
2. А. Н. Крылов. Лекции о приближенных вычислениях. М., 1950.

Є. С. ШОХ

ВИБІР ОСНОВИ МЕТОДУ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ АЛГЕБРАІЧНИХ РІВНЯНЬ МЕТОДОМ ЛОБАЧЕВСЬКОГО—ГРЕФФЕ

О. М. Костовським запропоновані формули, за допомогою яких у методі Лобачевського—Греффе однією ітерацією можна скласти рівняння, корені якого будуть k -ми степенями коренів даного рівняння.

Мета повідомлення — дослідити, як краще вибирати k , щоб найменшою кількістю арифметичних операцій відділити методом Лобачевського—Греффе корені з r вірними знаками.

Формули перетворень, запропоновані О. М. Костовським, мають такий вигляд:

$$a_{\mu}^{(v+1)} = \frac{(-1)^{\frac{\mu(\mu-1)}{2}} a_0^{(v+1)}}{\mu!} \begin{vmatrix} S_{\mu k}^{(v)} & S_{(\mu-1)k}^{(v)} & \dots & S_k^{(v)} \\ S_{(\mu-1)k}^{(v)} & S_{(\mu-2)k}^{(v)} & \dots & \mu-1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{2k}^{(v)} & S_k^{(v)} & \dots & 0 \\ S_k^{(v)} & 1 & \dots & \end{vmatrix}, \quad (1)$$

де $a_0^{(v+1)} = a_0^{k^{v+1}}$ і

$$S_{\alpha}^{(v)} = \frac{(-1)^{\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}}}{a_0^{\alpha}} \begin{vmatrix} \alpha a_{\alpha}^{(v)} & a_{\alpha-1}^{(v)} & \dots & a_1^{(v)} \\ (\alpha-1)a_{\alpha-1}^{(v)} & a_{\alpha-2}^{(v)} & \dots & a_0^{(v)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2a_2^{(v)} & a_1^{(v)} & \dots & 0 \\ a_1^{(v)} & a_0^{(v)} & \dots & \end{vmatrix}, \quad (1)$$

де $\alpha = k, 2k, \dots, nk$; $v = 1, 2, 3, \dots$ — номери ітерацій.

Якщо ми хочемо всі корені обчислити з r вірними знаками, необхідно, щоб у коефіцієнтів, які змінюються правильно, ε_i не впливало на перші r знаків $\frac{a_i^{(v)}}{a_0^{(v)}}$, тобто необхідно, щоб $|\varepsilon_i| < \frac{1}{2 \cdot 10^r}$.

Але в $\varepsilon_i = \left(\frac{x_{i+1}}{x_i}\right)^{k^v} + \dots$ головним буде перший доданок. Таким чином, щоб обчислити корені з r вірними знаками, необхідно:

$$\left| \frac{x_{i+1}}{x_i} \right| < \frac{1}{2 \cdot 10^r},$$

де

$$\left| \frac{x_{i+1}}{x_i} \right| = \max \left\{ \left| \frac{x_2}{x_1} \right|, \dots, \left| \frac{x_n}{x_{n-1}} \right| \right\},$$

звідки одержимо:

$$v > \frac{\lg r, 30103 \dots - \lg \lg \left| \frac{x_i}{x_{i+1}} \right|}{\lg k}, \quad (3)$$

де

$$\left| \frac{x_i}{x_{i+1}} \right| = \min \left\{ \left| \frac{x_1}{x_2} \right|, \dots, \left| \frac{x_{n-1}}{x_n} \right| \right\}.$$

Очевидно, що найменшим відношенням двох нерівних чисел із r знаками буде $1 + 10^{-r}$.

Тоді (3) можна переписати так:

$$v = \frac{\lg r, 30103 \dots - \lg \lg(1 + 10^{-r})}{\lg k}.$$

Ця формула дає необхідну кількість перетворень рівняння методом Лобачевського—Греффе для відділення будь-яких його коренів з r вірними знаками.

Дослідимо тепер, як вибирати k , щоб найменшою кількістю арифметичних операцій відділити корені з точністю до r знаків.

Для цього підрахуємо кількість арифметичних операцій, необхідних для досягнення мети при довільному k , а тоді з одержаного виразу визначимо k .

Для обчислення S_α (2) потрібно $\alpha^2 + 6\alpha + 2$ арифметичних операцій. Стільки ж операцій потрібно для обчислення a_μ (1). Але оскільки у визначнику (1) для обчислення кожного елемента теж необхідно $\alpha^2 + 6\alpha + 2$ арифметичних операцій, то для одного a_η потрібно $\mu^2 + 6\mu + 1 + k^2 \frac{2\mu^3 + 3\mu^2 + \mu}{6} + 6k \frac{\mu^2 + \mu}{1} + 2$ операцій.

Для обчислення всіх a_μ ($\mu = 1, 2, \dots, n$) потрібно $\frac{k^2}{12}(n^4 + 4n^3 + 5n^2 + 2n) + k(n^3 + 3n^2 + 2n) + \frac{1}{6}(2n^3 + 21n^2 + 19n) + 3$ операцій.

Для виконання всіх ν перетворень, очевидно, необхідно $\Phi(n, k, \delta, r) = \frac{\lg r, 30103 \dots - \lg \lg \delta}{\lg k} \left\{ \frac{k^2}{12}(n^4 + 4n^3 + 5n^2 + 2n) + k(n^3 + 3n^2 + 2n) + \frac{1}{6}(2n^3 + 21n^2 + 19n + 3) \right\}$ операцій, де r — необхідна кількість вірних знаків коренів, $\delta = \min_i \left| \frac{x_i}{x_{i+1}} \right|$, n — степінь рівняння, $i = 1, 2, \dots, n-1$, k — основа перетворень.

Для визначення k_0 , тобто k , при якому потрібна найменша кількість арифметичних операцій для досягнення мети, необхідно розв'язати відносно k рівняння $\Phi'_k = 0$.

Можна вважати, що $k > 1$, тобто $\lg k \neq 0$. Крім того, $\lg r, 30103 \dots - \lg \lg \delta \neq 0$, бо якщо $\lg r, 30103 \dots - \lg \lg \delta = 0$, то корені нашого рівняння вже відділені і ніяких перетворень робити не треба. Враховуючи сказане вище, запишемо рівняння $\Phi'_k = 0$ у такому вигляді:

$$\begin{aligned} & \frac{k^2 \lg k}{6} (n^4 + 4n^3 + 5n^2 + 2n) - \frac{k^2 \lg e}{11} (n^4 + 4n^3 + 5n^2 + 2n) + \\ & + k \lg k (n^3 + 3n^2 + 2n) - k \lg e (n^3 + 3n^2 + 2n) - \\ & - \frac{\lg e}{6} (2n^3 + 21n^2 + 19n) - 3 = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Як видно з цього рівняння, k не залежить ні від r , ні від δ .

В явному вигляді k одержати неможливо. Але, поділивши члени на $n^4 + 4n^3 + 5n^2 + 2n \neq 0$ і перейшовши до границі при $n \rightarrow \infty$, одержимо:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k = \sqrt[11]{e} = k_0.$$

Оскільки k ми неявно вважали цілим, то очевидно, що $k_0 = 2$. Якщо ми обчислення робитимемо інакше, а саме: обчислимо всі S^α , а потім, користуючись готовими S_α , обчислимо всі a_μ , тоді, міркуючи аналогічно вищенаведеному, для знаходження k в границі дістанемо:

$$k^2(2 \lg k - \lg e) - \lg e = 0,$$

$$\text{при } k = \sqrt{e}: -e(\lg e - \lg e) - \lg e < 0,$$

$$\text{при } k = e: -e^2(2 \lg e - \lg e) - \lg e > 0,$$

тобто $\sqrt{e} < k_0 < e$ і знову $k_0 = 2$.

З викладеного видно, що найбільш раціональною основою методу Лобачевського—Греффе є $k=2$.

Для випадку $2 \leq n \leq 10$ була підрахована кількість операцій при $2 \leq k \leq 10$. Найменше операцій необхідно затратити, взявши $k=2$. Для $n > 10$ це стає очевидним з (4).

ЛІТЕРАТУРА

1. А. Н. Крылов. Лекции о приближенных вычислениях, М., 1950.
2. А. Н. Костовский. К методу Лобачевского приближенного решения алгебраических уравнений в случае корней, равных по модулю. Уч. зап. ЛГУ, сер. мех.-мат., вып. 7, т. XXXVIII, 1956.

І. Н. ПЕСІН

1. КОМПАКТНІСТЬ КВАЗІКОНФОРМНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ З СУМОВНОЮ ХАРАКТЕРИСТИКОЮ

П. П. Белінський [1] методами геометричної теорії функцій довів таку теорему: якщо послідовність $f(x)$ Q -квазіконформних відображень $|z| < 1$ на $|\omega| < 1$, $f_n(0) = 0$ така, що $\iint_{|z| < 1} (Q_n - 1) d\sigma z \rightarrow 0$, то $f_n(z) \rightarrow z$.

В роботі показано, що для відображень з сумовною характеристикою ця теорема є наслідком загальних властивостей відображень, абсолютно неперервних у сенсі Тонеллі. Це дозволяє значно спростити доведення.

2. ВИМІРНІСТЬ МАЙЖЕ ВСЮДИ СИМЕТРИЧНО НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ

Функція $f(p)$ називається симетрично неперервною в точці P n -мірного простору, якщо $f(p + \Delta p) - f(p - \Delta p) \rightarrow 0$.

Доводиться вимірність функції, симетрично неперервної майже всюди в просторі. Симетрично неперервні функції вивчалися Мазуркевичем, Серпинським, Хаусдорфом та ін. Випадок вимірних $f(p)$ був більш детально вивчений Сіндаловським [2].

ЛІТЕРАТУРА

1. П. П. Белінський. Дисертація. Львів, 1954.
2. О. О. Сіндаловський. УМН, 13, вып. 2, 257, 1958.