

$\cos \varphi = \pm 0,50067$, перевіркою встановлюємо, що
 $\cos \varphi = -0,50067$.

$$\varphi = 120^\circ 02' 40''.$$

ЛІТЕРАТУРА

1. А. Н. Костовский. Определение аргументов комплексных корней при приближенном решении алгебраических уравнений методом Лобачевского. Доп. та повід. ЛДУ, вип. 6, ч. 2, 1955.
2. А. Н. Крылов. Лекции о приближенных вычислениях. М., 1950.

Є. С. ШОХ

ВИБІР ОСНОВИ МЕТОДУ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ АЛГЕБРАІЧНИХ РІВНЯНЬ МЕТОДОМ ЛОБАЧЕВСЬКОГО—ГРЕФФЕ

О. М. Костовським запропоновані формули, за допомогою яких у методі Лобачевського—Греффе однією ітерацією можна скласти рівняння, корені якого будуть k -ми степенями коренів даного рівняння.

Мета повідомлення — дослідити, як краще вибирати k , щоб найменшою кількістю арифметичних операцій відділити методом Лобачевського—Греффе корені з r вірними знаками.

Формули перетворень, запропоновані О. М. Костовським, мають такий вигляд:

$$a_{\mu}^{(v+1)} = \frac{(-1)^{\frac{\mu(\mu-1)}{2}} a_0^{(v+1)}}{\mu!} \begin{vmatrix} S_{\mu k}^{(v)} & S_{(\mu-1)k}^{(v)} & \dots & S_k^{(v)} \\ S_{(\mu-1)k}^{(v)} & S_{(\mu-2)k}^{(v)} & \dots & \mu-1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{2k}^{(v)} & S_k^{(v)} & \dots & 0 \\ S_k^{(v)} & 1 & \dots & \end{vmatrix}, \quad (1)$$

де $a_0^{(v+1)} = a_0^{k^{v+1}}$ і

$$S_{\alpha}^{(v)} = \frac{(-1)^{\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}}}{a_0^{\alpha}} \begin{vmatrix} \alpha a_{\alpha}^{(v)} & a_{\alpha-1}^{(v)} & \dots & a_1^{(v)} \\ (\alpha-1)a_{\alpha-1}^{(v)} & a_{\alpha-2}^{(v)} & \dots & a_0^{(v)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2a_2^{(v)} & a_1^{(v)} & \dots & 0 \\ a_1^{(v)} & a_0^{(v)} & \dots & \end{vmatrix}, \quad (1)$$

де $\alpha = k, 2k, \dots, nk$; $v = 1, 2, 3, \dots$ — номери ітерацій.

Якщо ми хочемо всі корені обчислити з r вірними знаками, необхідно, щоб у коефіцієнтів, які змінюються правильно, ε_i не впливало на перші r знаків $\frac{a_i^{(v)}}{a_0^{(v)}}$, тобто необхідно, щоб $|\varepsilon_i| < \frac{1}{2 \cdot 10^r}$.

Але в $\varepsilon_i = \left(\frac{x_{i+1}}{x_i}\right)^{k^v} + \dots$ головним буде перший доданок. Таким чином, щоб обчислити корені з r вірними знаками, необхідно:

$$\left| \frac{x_{i+1}}{x_i} \right| < \frac{1}{2 \cdot 10^r},$$

де

$$\left| \frac{x_{i+1}}{x_i} \right| = \max \left\{ \left| \frac{x_2}{x_1} \right|, \dots, \left| \frac{x_n}{x_{n-1}} \right| \right\},$$

звідки одержимо:

$$v > \frac{\lg r, 30103 \dots - \lg \lg \left| \frac{x_i}{x_{i+1}} \right|}{\lg k}, \quad (3)$$

де

$$\left| \frac{x_i}{x_{i+1}} \right| = \min \left\{ \left| \frac{x_1}{x_2} \right|, \dots, \left| \frac{x_{n-1}}{x_n} \right| \right\}.$$

Очевидно, що найменшим відношенням двох нерівних чисел із r знаками буде $1 + 10^{-r}$.

Тоді (3) можна переписати так:

$$v = \frac{\lg r, 30103 \dots - \lg \lg (1 + 10^{-r})}{\lg k}.$$

Ця формула дає необхідну кількість перетворень рівняння методом Лобачевського—Греффе для відділення будь-яких його коренів з r вірними знаками.

Дослідимо тепер, як вибирати k , щоб найменшою кількістю арифметичних операцій відділити корені з точністю до r знаків.

Для цього підрахуємо кількість арифметичних операцій, необхідних для досягнення мети при довільному k , а тоді з одержаного виразу визначимо k .

Для обчислення S_α (2) потрібно $\alpha^2 + 6\alpha + 2$ арифметичних операцій. Стільки ж операцій потрібно для обчислення a_μ (1). Але оскільки у визначнику (1) для обчислення кожного елемента теж необхідно $\alpha^2 + 6\alpha + 2$ арифметичних операцій, то для одного a_η потрібно $\mu^2 + 6\mu + 1 + k^2 \frac{2\mu^3 + 3\mu^2 + \mu}{6} + 6k \frac{\mu^2 + \mu}{1} + 2$ операцій.

Для обчислення всіх a_μ ($\mu = 1, 2, \dots, n$) потрібно $\frac{k^2}{12}(n^4 + 4n^3 + 5n^2 + 2n) + k(n^3 + 3n^2 + 2n) + \frac{1}{6}(2n^3 + 21n^2 + 19n) + 3$ операцій.

Для виконання всіх ν перетворень, очевидно, необхідно $\Phi(n, k, \delta, r) = \frac{\lg r, 30103 \dots - \lg \lg \delta}{\lg k} \left\{ \frac{k^2}{12}(n^4 + 4n^3 + 5n^2 + 2n) + k(n^3 + 3n^2 + 2n) + \frac{1}{6}(2n^3 + 21n^2 + 19n + 3) \right\}$ операцій, де r — необхідна кількість вірних знаків коренів, $\delta = \min_i \left| \frac{x_i}{x_{i+1}} \right|$, n — степінь рівняння, $i = 1, 2, \dots, n-1$, k — основа перетворень.

Для визначення k_0 , тобто k , при якому потрібна найменша кількість арифметичних операцій для досягнення мети, необхідно розв'язати відносно k рівняння $\Phi'_k = 0$.

Можна вважати, що $k > 1$, тобто $\lg k \neq 0$. Крім того, $\lg r, 30103 \dots - \lg \lg \delta \neq 0$, бо якщо $\lg r, 30103 \dots - \lg \lg \delta = 0$, то корені нашого рівняння вже відділені і ніяких перетворень робити не треба. Враховуючи сказане вище, запишемо рівняння $\Phi'_k = 0$ у такому вигляді:

$$\begin{aligned} & \frac{k^2 \lg k}{6} (n^4 + 4n^3 + 5n^2 + 2n) - \frac{k^2 \lg e}{11} (n^4 + 4n^3 + 5n^2 + 2n) + \\ & + k \lg k (n^3 + 3n^2 + 2n) - k \lg e (n^3 + 3n^2 + 2n) - \\ & - \frac{\lg e}{6} (2n^3 + 21n^2 + 19n) - 3 = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Як видно з цього рівняння, k не залежить ні від r , ні від δ .

В явному вигляді k одержати неможливо. Але, поділивши члени на $n^4 + 4n^3 + 5n^2 + 2n \neq 0$ і перейшовши до границі при $n \rightarrow \infty$, одержимо:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k = \sqrt[11]{e} = k_0.$$

Оскільки k ми неявно вважали цілим, то очевидно, що $k_0 = 2$. Якщо ми обчислення робитимемо інакше, а саме: обчислимо всі S^α , а потім, користуючись готовими S_α , обчислимо всі a_μ , тоді, міркуючи аналогічно вищенаведеному, для знаходження k в границі дістанемо:

$$k^2(2 \lg k - \lg e) - \lg e = 0,$$

$$\text{при } k = \sqrt{e}: -e(\lg e - \lg e) - \lg e < 0,$$

$$\text{при } k = e: -e^2(2 \lg e - \lg e) - \lg e > 0,$$

тобто $\sqrt{e} < k_0 < e$ і знову $k_0 = 2$.

З викладеного видно, що найбільш раціональною основою методу Лобачевського—Греффе є $k=2$.

Для випадку $2 \leq n \leq 10$ була підрахована кількість операцій при $2 \leq k \leq 10$. Найменше операцій необхідно затратити, взявши $k=2$. Для $n > 10$ це стає очевидним з (4).

ЛІТЕРАТУРА

1. А. Н. Крылов. Лекции о приближенных вычислениях, М., 1950.
2. А. Н. Костовский. К методу Лобачевского приближенного решения алгебраических уравнений в случае корней, равных по модулю. Уч. зап. ЛГУ, сер. мех.-мат., вып. 7, т. XXXVIII, 1956.

І. Н. ПЕСІН

1. КОМПАКТНІСТЬ КВАЗІКОНФОРМНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ З СУМОВНОЮ ХАРАКТЕРИСТИКОЮ

П. П. Белінський [1] методами геометричної теорії функцій довів таку теорему: якщо послідовність $f(x)$ Q -квазіконформних відображень $|z| < 1$ на $|\omega| < 1$, $f_n(0) = 0$ така, що $\iint_{|z| < 1} (Q_n - 1) d\sigma z \rightarrow 0$, то $f_n(z) \rightarrow z$.

В роботі показано, що для відображень з сумовною характеристикою ця теорема є наслідком загальних властивостей відображень, абсолютно неперервних у сенсі Тонеллі. Це дозволяє значно спростити доведення.

2. ВИМІРНІСТЬ МАЙЖЕ ВСЮДИ СИМЕТРИЧНО НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ

Функція $f(p)$ називається симетрично неперервною в точці P n -мірного простору, якщо $f(p + \Delta p) - f(p - \Delta p) \rightarrow 0$.