

УДК 517.53

## ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯННЯ ЛЕЖАНДРА

Юрій ТРУХАН

Львівський національний університет ім. І. Франка,  
м. Львів, 79000, вул. Університетська, 1  
e-mail: yurik93@mail.ru

Досліджено властивості розв'язків рівняння Лежандра  $(1 - z^2)w'' - 2zw' + \lambda w = 0$  при  $\lambda \neq n(n+1)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  та функцій пов'язаних із ними, а саме обмеженість  $l$ -індексу, близькість до опуклості та можливе зростання.

*Ключові слова:* аналітична функція, обмеженість  $l$ -індексу, рівняння Лежандра, функція Лежандра першого роду, близькість до опуклості, зростання, одиничний круг.

**1. Вступ.** Аналітична однолиста в крузі  $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$  функція

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k \quad (1)$$

називається опуклою, якщо  $f(\mathbb{D})$  – опукла область. Необхідною і достатньою умовою [1, с.203] для опуклості  $f$  є умова  $\operatorname{Re}\{1 + zf''(z)/f'(z)\} > 0$  ( $z \in \mathbb{D}$ ). Функція  $f$  називається [1, с.583] близькою до опуклої в  $\mathbb{D}$ , якщо існує опукла в  $\mathbb{D}$  функція  $\Phi$  така, що  $\operatorname{Re}(f'(z)/\Phi'(z)) > 0$  ( $z \in \mathbb{D}$ ). Близька до опуклої функція  $f$  характеризується тим, що зовнішність  $G$  області  $f(\mathbb{D})$  заповнюється променями, що виходять з  $\partial G$  і цілком лежать в  $G$ . Кожна близька до опуклої функція є однолистою в  $\mathbb{D}$ , і тому  $a_1 \neq 0$ .

Нехай  $D$  – довільна комплексна область, а функція  $l(z)$  – додатна та неперервна в  $D$  така, що для всіх  $z \in D$

$$l(z) > \beta / \operatorname{dist}\{z, \partial D\}, \quad \beta = \operatorname{const} > 1. \quad (2)$$

Аналітична в  $D$  функція  $f$  називається функцією обмеженого  $l$ -індексу в  $D$  [2, с.7], якщо існує  $N \in \mathbb{Z}_+$  таке, що для всіх  $n \in \mathbb{Z}_+$  і  $z \in D$

$$\frac{|f^{(n)}(z)|}{n!l^n(z)} \leq \max \left\{ \frac{|f^{(k)}(z)|}{k!l^k(z)} : 0 \leq k \leq N \right\}.$$

Найменше з таких чисел  $N$  називається  $l$ -індексом і позначається  $N(f, l; D)$ .

Рівнянням Лежандра називається [3, с.214] диференціальне рівняння

$$(1 - z^2)w'' - 2zw' + \lambda w = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (3)$$

При  $\lambda = n(n+1)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , розв'язком цього рівняння є поліном, а тому надалі обмежимося розглядом випадку  $\lambda \neq n(n+1)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , коли усі нетривіальні аналітичні в околі нуля розв'язки є трансцендентними функціями.

Знайдемо розв'язок рівняння (3) у вигляді (1). Оскільки

$$(1 - z^2) \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) z^{n-2} - 2z \sum_{n=1}^{\infty} a_n n z^{n-1} + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = 0,$$

то

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1)z^n - \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)z^n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n n z^n + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = 0.$$

Звідки  $2a_2 + \lambda a_0 = 0$ ,  $6a_3 + (\lambda - 2)a_1 = 0$  і  $(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n+1)a_n + \lambda a_n = 0$ . Тобто

$$a_{n+2} = \frac{n(n+1) - \lambda}{(n+2)(n+1)} a_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+. \quad (4)$$

Бачимо, що коефіцієнти з парними номерами не залежать від коефіцієнтів із непарними номерами. Тому розв'язок рівняння (3) можна записати у вигляді

$$w(z) = C_1 U(z^2) + C_2 z V(z^2).$$

Знайдемо рекурентні формули для знаходження коефіцієнтів степеневого розвинення функції  $U(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n$ . Якщо у (4) підставимо  $n = 2k - 2$ , то отримаємо  $a_{2k} = a_{2(k-1)}((2k-2)(2k-1) - \lambda)/(2k(2k-1))$ , а отже

$$u_k = \frac{(2k-2)(2k-1) - \lambda}{2k(2k-1)} u_{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (5)$$

Зауважимо, що якщо  $u_0 = 0$ , то  $U(z) \equiv 0$ . Подібно, для коефіцієнтів функції  $V(z) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n z^n$ , підставляючи в (4)  $n = 2k - 1$ , маємо

$$v_k = \frac{2k(2k-1) - \lambda}{2k(2k+1)} v_{k-1}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (6)$$

Зрозуміло, що якщо  $v_0 = 0$ , то  $V(z) \equiv 0$ .

Легко бачити, що функції  $U(z)$  та  $V(z)$  є аналітичними в  $\mathbb{D}$ .

**2. Геометричні властивості.** Для дослідження близькості до опуклості функцій  $U(z)$  та  $V(z)$  скористаємося такою лемою [4] (критерій Александра).

**Лема 1.** Якщо  $a_1 \geq 2a_2 \geq \dots \geq (n-1)a_{n-1} \geq na_n \geq \dots > 0$ , то функція (1) є близькою до опуклої в  $\mathbb{D}$ .

Якщо покладемо  $u_0 = -2/\lambda$ , то із (5) отримаємо, що  $u_1 = 1 > 0$ . Оскільки для  $n \geq 2$  маємо  $\frac{nu_n}{(n-1)u_{n-1}} = 1 - \frac{\lambda}{(2n-1)(2n-2)}$ , то  $(n-1)u_{n-1} \geq nu_n > 0$  для всіх  $n \geq 2$  за умови  $0 \leq \lambda < 6$ .

Подібно, покладаючи  $v_0 = 6/(2 - \lambda)$  із (6) отримаємо, що  $v_1 = 1 > 0$  і для  $n \geq 2$  виконується  $\frac{nv_n}{(n-1)v_{n-1}} = 1 - \frac{\lambda-2}{(2n+1)(2n-2)}$ . Тому  $(n-1)v_{n-1} \geq nv_n > 0$  за умови, що  $0 \leq \frac{\lambda-2}{(2n+1)(2n-2)} < 1$  для всіх  $n \geq 2$ . Тобто  $2 \leq \lambda < 12$ .

А отже, правильним є таке зауваження.

*Зауваження 1.* Якщо  $0 < \lambda < 6$ , то  $U(z)$  – близька до опуклої в  $\mathbb{D}$ , а якщо  $2 < \lambda < 12$ , то  $V(z)$  – близька до опуклої в  $\mathbb{D}$ .

**3. Зростання.** Оскільки з (5) випливає, що  $u_n = u_0 \prod_{k=1}^n \frac{(2k-2)(2k-1)-\lambda}{2k(2k-1)}$ , а  $\frac{(2k-2)(2k-1)-\lambda}{2k(2k-1)} = 1 - \frac{1}{k} - \frac{\lambda}{2k(2k-1)}$ , то

$$\ln |u_n| = \sum_{k=1}^n \ln \left| 1 - \frac{1}{k} - \frac{\lambda}{2k(2k-1)} \right| + \ln |u_0| = \ln \frac{1}{n} + O(1), \quad n \rightarrow \infty.$$

Тому існують сталі  $0 < h \leq H < +\infty$  такі, що  $\frac{h}{n} \leq |u_n| \leq \frac{H}{n}$ ,  $n \geq 1$ . А тому  $M_U(r) \asymp \ln \frac{1}{1-r}$ ,  $r \uparrow 1$ , де  $M_U(r) = \max\{|U(z)| : |z| = r\}$ . Подібно, використовуючи (6) та рівність  $\frac{2k(2k-1)-\lambda}{2k(2k+1)} = 1 - \frac{1}{k} - \frac{\lambda-2}{2k(2k+1)}$ , отримуємо  $M_V(r) \asymp \ln \frac{1}{1-r}$ ,  $r \uparrow 1$ . А отже, правильним є наступне зауваження.

*Зауваження 2.*  $M_U(r) \asymp \ln \frac{1}{1-r}$  та  $M_V(r) \asymp \ln \frac{1}{1-r}$  при  $r \uparrow 1$ .

**4. Обмеженість  $l$ -індексу.** Дослідимо обмеженість  $l$ -індексу в  $\mathbb{D}$  довільного розв'язку  $w = L(z) = C_1 U(z^2) + C_2 z V(z^2)$  рівняння (3).

*Зауваження 3.* Якщо  $N(f, l_*) \leq N$  і  $l_*(r) \leq l^*(r)$ , то неважко довести [2, с.23], що  $N(f, l^*) \leq N$ .

Тому, враховуючи (2), функцію  $l(|z|)$  шукатимемо у вигляді  $l(r) = \beta/(1-r)$ , де  $\beta > 1$  – якомога менше число.

Продиференціюємо рівняння (3)  $n \geq 0$  раз. Отримаємо

$$(1 - z^2)w^{(n+2)} - 2z(n+1)w^{(n+1)} + (\lambda - n(n+1))w^{(n)} = 0. \quad (7)$$

Звідки  $w^{(n+2)} = \frac{2z}{1-z^2}(n+1)w^{(n+1)} - \frac{\lambda - n(n+1)}{1-z^2}w^{(n)}$ . Тому, при  $l(|z|) = \beta/(1-|z|)$  і для всіх  $n \geq 0$

$$\begin{aligned} & \frac{|w^{(n+2)}(z)|}{(n+2)!l^{n+2}(|z|)} \leq \\ & \leq \frac{2|z|}{|1-z^2|l(|z|)} \frac{n+1}{n+2} \frac{|w^{(n+1)}(z)|}{(n+1)!l^{n+1}(|z|)} + \frac{|\lambda| + n(n+1)}{|1-z^2|} \frac{1}{(n+2)(n+1)l^2(|z|)} \frac{|w^{(n)}(z)|}{n!l^n(|z|)} \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{(1-|z|)l(|z|)} \frac{n+1}{n+2} \frac{|w^{(n+1)}(z)|}{(n+1)!l^{n+1}(|z|)} + \frac{|\lambda|+n(n+1)}{(1-|z|)(1+|z|)} \frac{1}{(n+2)(n+1)l^2(|z|)} \frac{|w^{(n)}(z)|}{n!l^n(|z|)} \\ &\leq \frac{n+1}{\beta(n+2)} \frac{|w^{(n+1)}(z)|}{(n+1)!l^{n+1}(|z|)} + \frac{(|\lambda|+n(n+1))(1-|z|)/(1+|z|)}{\beta^2(n+2)(n+1)} \frac{|w^{(n)}(z)|}{n!l^n(|z|)} \leq \\ &\leq \frac{n+1}{\beta(n+2)} \frac{|w^{(n+1)}(z)|}{(n+1)!l^{n+1}(|z|)} + \frac{|\lambda|+n(n+1)}{\beta^2(n+2)(n+1)} \frac{|w^{(n)}(z)|}{n!l^n(|z|)} \leq \\ &\leq \max \left\{ \frac{|w^{(n+1)}(z)|}{(n+1)!l^{n+1}(|z|)}, \frac{|w^{(n)}(z)|}{n!l^n(|z|)} \right\}, \end{aligned} \quad (8)$$

якщо для всіх  $n \geq 0$

$$\frac{n+1}{\beta(n+2)} + \frac{n/\beta}{\beta(n+2)} + \frac{|\lambda|}{\beta^2(n+2)(n+1)} \leq 1. \quad (9)$$

Із (8) випливає, що для всіх  $n \geq 0$  виконується  $\frac{|w^{(n)}(z)|}{n!l^n(|z|)} \leq \max \left\{ \frac{|w'(z)|}{1!l(|z|)}, |w(z)| \right\}$ , а отже  $N(L, l) \leq 1$ .

Знайдемо для яких  $\beta$  виконується нерівність (9). При  $n \rightarrow \infty$  маємо  $\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta^2} \leq 1$ , тобто  $\beta \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ . Далі шукатимемо  $\beta$  у вигляді  $\beta = \max \left\{ \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \sqrt{\frac{|\lambda|}{x}} \right\}$ , де  $x > 0$ . Тоді (9) виконується, якщо для всіх  $n \geq 0$  виконується  $\frac{n+1}{\beta(n+2)} + \frac{n/\beta}{\beta(n+2)} + \frac{\beta x/(n+1)}{\beta(n+2)} \leq 1$ . Остання нерівність еквівалентна нерівності

$$\frac{\beta x}{n+1} \leq (\beta - 1 - \frac{1}{\beta})n + 2\beta - 1. \quad (10)$$

Оскільки при  $\beta \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  права частина нерівності (10) зростає за змінною  $n$ , а ліва спадає, то (10) виконується для всіх  $n \geq 0$ , якщо вона виконується при  $n = 0$ , тобто при  $x \leq 2 - \frac{1}{\beta}$ . Оскільки  $2 - \frac{1}{\beta} \geq 2 - \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}$ , то покладемо  $x = \frac{2\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}$ . Отримуємо наступне твердження.

**Твердження 1.** Для довільного розв'язку  $w = L(z)$  рівняння (3) виконується  $N(L, l; \mathbb{D}) \leq 1$  з  $l(r) = \frac{\beta}{1-r}$ , де  $\beta = \max \left\{ \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \sqrt{|\lambda| \frac{5+\sqrt{5}}{10}} \right\}$ .

Дослідимо тепер обмеженість  $l$ -індексу в  $\mathbb{D}$  похідних довільного порядку розв'язку  $w = L(z)$  рівняння (3). Із (7) випливає, що для довільного  $k \in \mathbb{N}$  і для всіх  $n \geq 0$

$$(1-z^2)w^{(k+n+2)} - 2z(k+n+1)w^{(k+n+1)} + (\lambda - (k+n)(k+n+1))w^{(k+n)} = 0.$$

Тобто  $G(z) = L^{(k)}(z)$  задовольняє рівняння

$$(1-z^2)G^{(n+2)} - 2z(k+n+1)G^{(n+1)} + (\lambda - (k+n)(k+n+1))G^{(n)} = 0.$$

Тому, при  $l(|z|) = \beta/(1 - |z|)$ ,  $k \in \mathbb{N}$  і для всіх  $n \geq 0$

$$\begin{aligned} \frac{|G^{(n+2)}(z)|}{(n+2)!l^{n+2}(|z|)} &\leq \frac{k+n+1}{\beta(n+2)} \frac{|G^{(n+1)}(z)|}{(n+1)!l^{n+1}(|z|)} + \frac{|\lambda| + (k+n)(k+n+1)}{\beta^2(n+2)(n+1)} \frac{|G^{(n)}(z)|}{n!l^n(|z|)} \leq \\ &\leq \max \left\{ \frac{|G^{(n+1)}(z)|}{(n+1)!l^{n+1}(|z|)}, \frac{|G^{(n)}(z)|}{n!l^n(|z|)} \right\}, \end{aligned} \quad (11)$$

якщо для всіх  $n \geq 0$

$$\frac{k+n+1}{\beta(n+2)} + \frac{(k+n)(k+n+1)}{\beta^2(n+2)(n+1)} + \frac{|\lambda|}{\beta^2(n+2)(n+1)} \leq 1. \quad (12)$$

Нехай  $\beta = \max \left\{ (k+1)(1 + \sqrt{5})/2, \sqrt{|\lambda|} \right\}$ . Тоді

$$\frac{|\lambda|}{\beta^2(n+2)(n+1)} \leq \frac{1}{2} \quad (13)$$

для всіх  $n \geq 0$ . З нерівностей  $2(k+n+1) \leq (k+1)(n+2)$  та  $k+n \leq (k+1)(n+1)$  правильних при усіх  $k \in \mathbb{N}$  та  $n \geq 0$  випливає, що

$$\frac{k+n+1}{\beta(n+2)} \leq \frac{k+1}{2\beta} \leq \frac{1}{1 + \sqrt{5}} \quad (14)$$

та

$$\frac{(k+n)(k+n+1)}{\beta^2(n+2)(n+1)} \leq \frac{(k+1)^2}{2\beta^2} \leq \frac{2}{(1 + \sqrt{5})^2}. \quad (15)$$

Оскільки сума правих частин нерівностей (13), (14) та (15) дорівнює 1, то з них випливає нерівність (12), а отже і (11). Тому правильним є таке твердження.

**Твердження 2.** Для довільного розв'язку  $w = L(z)$  рівняння (3) і для всіх  $k \in \mathbb{N}$  виконується  $N(L^{(k)}, l; \mathbb{D}) \leq 1$  з  $l(r) = \frac{\beta_k}{1-r}$ , де  $\beta_k = \max \left\{ (k+1)(1 + \sqrt{5})/2, \sqrt{|\lambda|} \right\}$ .

**5. Загальна теорема.** Із тверджень 1-2 та зауважень випливає така теорема.

**Теорема 1.** Якщо  $\lambda \neq n(n+1)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , то довільний аналітичний в  $\mathbb{D}$  розв'язок рівняння (3) можна записати у вигляді  $L(z) = C_1 U(z^2) + C_2 z V(z^2)$  і  $N(L, l; \mathbb{D}) \leq 1$

з  $l(r) = \frac{\beta}{1-r}$ , де  $\beta = \max \left\{ \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \sqrt{|\lambda|} \frac{5 + \sqrt{5}}{10} \right\}$ . Також для всіх  $k \in \mathbb{N}$  виконується

$N(L^{(k)}, l; \mathbb{D}) \leq 1$  з  $l(r) = \frac{\beta_k}{1-r}$ , де  $\beta_k = \max \left\{ (k+1)(1 + \sqrt{5})/2, \sqrt{|\lambda|} \right\}$ . Якщо

$0 < \lambda < 6$ , то  $U(z)$  – близька до опуклої в  $\mathbb{D}$ , а якщо  $2 < \lambda < 12$ , то  $V(z)$  – близька до опуклої в  $\mathbb{D}$ . Для функцій  $U(z)$  та  $V(z)$  виконуються асимптотичні рівності

$M_U(r) \asymp \ln \frac{1}{1-r}$  та  $M_V(r) \asymp \ln \frac{1}{1-r}$  при  $r \uparrow 1$ , де  $M_f(r) = \max \{|f(z)| : |z| = r\}$ .

**5. Обмеженість  $l$ -індексу функції Лежандра першого роду.** Нехай тепер  $\lambda = \nu(\nu+1)$ ,  $\nu \in \mathbb{C}$ . Найширше застосування має частковий розв'язок рівняння Лежандра, що позначається  $P_\nu(z)$  і називається функцією Лежандра першого роду. Відомо [3, с.220], що  $P_\nu(z) = F(\nu+1, -\nu, 1; \frac{1-z}{2})$ , де  $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$  – гіпергеометрична функція, аналітична в  $\mathbb{D}$ . А отже  $P_\nu(z)$  задає аналітичну в  $D = \{z : |z-1| < 2\}$  функцію. Дослідимо обмеженість  $l$ -індексу цієї функції в  $D$ .

**Зауваження 4.** Якщо  $N(f, l; G) = N$ , а  $f_1(z) = f(\frac{z-z_0}{a})$ , то  $N(f_1, l_1; G_1) = N$ , де  $l_1(z) = \frac{1}{|a|}l(\frac{z-z_0}{a})$ ,  $G_1 = z_0 + aG = \{z_0 + az : z \in G\}$ .

Зважаючи на зауваження, дослідимо спершу обмеженість  $l$ -індексу функції  $F(z) = F(\nu+1, -\nu, 1; z)$  в  $\mathbb{D}$ . Наведемо міркування близькі до міркувань із [5], де досліджено обмеженість  $l$ -індексу гіпергеометричної функції при додатних значеннях параметрів  $\alpha, \beta, \gamma$ .

Для дослідження  $l$ -індексу в околі нуля нам потрібна така лема, що є безпосереднім наслідком леми із [6].

**Лема 2.** Якщо функція (1) аналітична в  $\overline{\mathbb{D}}_R = \{z : |z| \leq R\}$ ,  $a_0 = 1$  і

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| R^n \leq a(R) < 1, \quad (16)$$

$$\text{то } N(f, l; \mathbb{D}_R) = 0 \text{ з } l(|z|) = \frac{1 + a(R)}{(1 - a(R))(R - |z|)}.$$

Якщо  $z \in \mathbb{D}_{\xi R}$ ,  $0 < \xi < 1$ , то  $R - |z| \geq (1 - \xi)R$  і з леми 2 та зауваження 3 випливає, що  $N(f, l; \mathbb{D}_{\xi R}) = 0$  з  $l(|z|) \equiv \frac{1 + a(R)}{(1 - \xi)R(1 - a(R))}$ . Тому правильна наступна лема.

**Лема 3.** Якщо функція (1) аналітична в  $\mathbb{D}$  і  $a_0 = 1$ , то для всіх  $\xi \in (0, 1)$  і  $R \in (0, 1)$  за умови (16) правильна рівність  $N(f, l; \mathbb{D}_{\xi R}) = 0$  з  $l(|z|) \equiv \frac{1 + a(R)}{(1 - \xi)R(1 - a(R))}$ .

Із степеневого розвинення гіпергеометричної функції [3, с.48] маємо

$$F(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k z^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \prod_{j=0}^{k-1} \frac{(j - \nu)(j + \nu + 1)}{(j + 1)^2} \right) z^k.$$

Оскільки при  $|\lambda| \leq 1$  маємо  $\left| \frac{(k - \nu)(k + \nu + 1)}{(k + 1)^2} \right| = \left| \frac{k^2 + k - \lambda}{(k + 1)^2} \right| \leq 1$ , то  $|A_k| \leq 1$  для всіх  $k \in \mathbb{N}$ .

А тому, при  $R = 1/4$  маємо  $\sum_{n=1}^{\infty} |A_n| R^n \leq \frac{1}{3} = a(R)$ . Поклавши в лемі 3  $\xi = 2/5$  отримаємо  $N(F, 40/3; \mathbb{D}_{1/10}) = 0$ . Подібно, при  $|\lambda| > 1$  маємо  $\left| \frac{(k - \nu)(k + \nu + 1)}{(k + 1)^2} \right| \leq |\lambda|$ , а тому  $|A_k| \leq |\lambda|^k$  для всіх  $k \in \mathbb{N}$ . При  $R = 1/4|\lambda|$  маємо  $\sum_{n=1}^{\infty} |A_n| R^n \leq \frac{1}{3} = a(R)$ . А отже, при  $\xi = 2/5$  з леми 3 маємо  $N(F, 40|\lambda|/3; \mathbb{D}_{1/10|\lambda|}) = 0$ . Тобто, правильним є таке твердження.

**Твердження 3.** Якщо  $|\lambda| \leq 1$ , то  $N(F, 40/3; \mathbb{D}_{1/10}) = 0$ , а якщо  $|\lambda| > 1$ , то  $N(F, 40|\lambda|/3; \mathbb{D}_{1/10|\lambda|}) = 0$ .

Для дослідження обмеженості  $l$ -індексу на решті одиничного круга скористаємося тим фактом, що гіпергеометрична функція  $F(z)$  задовольняє гіпергеометричне рівняння Гауса [3, с.45]

$$z(z-1)w'' + (2z-1)w' - \lambda w = 0.$$

Продиференціюємо його  $n \geq 0$  разів і отримаємо

$$z(z-1)w^{(n+2)} + (2z-1)(n+1)w^{(n+1)} + (n(n+1)-\lambda)w^{(n)} = 0. \quad (17)$$

Звідки, для  $|\lambda| \leq 1$  при  $\frac{1}{10} \leq |z| < 1$  і  $l(z) = \frac{40/3}{1-|z|}$  маємо для всіх  $n \geq 0$

$$\begin{aligned} & \frac{|F^{(n+2)}(z)|}{(n+2)!l^{n+2}(z)} \leq \\ & \leq \frac{2|z|+1}{|z||z-1|} \frac{3(1-|z|)}{40} \frac{n+1}{n+2} \frac{|F^{(n+1)}(z)|}{(n+1)!l^{n+1}(z)} + \frac{9(1-|z|)^2}{1600|z||z-1|} \frac{n(n+1)+|\lambda|}{(n+2)(n+1)} \frac{|F^{(n)}(z)|}{n!l^n(z)} \leq \\ & \leq \frac{2|z|+1}{|z|} \frac{3}{40} \frac{|F^{(n+1)}(z)|}{(n+1)!l^{n+1}(z)} + \frac{1-|z|}{|z|} \frac{9}{1600} \frac{|F^{(n)}(z)|}{n!l^n(z)} \leq \\ & \leq \frac{9}{10} \frac{|F^{(n+1)}(z)|}{(n+1)!l^{n+1}(z)} + \frac{81}{1600} \frac{|F^{(n)}(z)|}{n!l^n(z)} \leq \max \left\{ \frac{|F^{(n+1)}(z)|}{(n+1)!l^{n+1}(z)}, \frac{|F^{(n)}(z)|}{n!l^n(z)} \right\}. \end{aligned}$$

Звідси легко випливає, що для всіх  $n \geq 0$  виконується

$$\frac{|F^{(n)}(z)|}{n!l^n(z)} \leq \max \left\{ \frac{|F'(z)|}{1!l(z)}, |F(z)| \right\},$$

а отже  $N(F, l; \mathbb{D} \setminus \mathbb{D}_{1/10}) \leq 1$ . А тому правильним є таке твердження.

**Твердження 4.** Якщо  $|\lambda| \leq 1$ , то  $N(F, \frac{40/3}{1-|z|}; \mathbb{D} \setminus \mathbb{D}_{1/10}) \leq 1$ .

Подібно, для  $|\lambda| > 1$  при  $\frac{1}{10|\lambda|} \leq |z| < 1$  і  $l(z) = \frac{40|\lambda|/3}{1-|z|}$  з (17) маємо

$$\begin{aligned} & \frac{|F^{(n+2)}(z)|}{(n+2)!l^{n+2}(z)} \leq \left(2 + \frac{1}{|z|}\right) \frac{3}{40|\lambda|} \frac{n+1}{n+2} \frac{|F^{(n+1)}(z)|}{(n+1)!l^{n+1}(z)} + \\ & + \left(\frac{1}{|z|} - 1\right) \frac{9}{1600|\lambda|} \left(\frac{n}{|\lambda|(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+1)}\right) \frac{|F^{(n)}(z)|}{n!l^n(z)} \leq \\ & \leq \left(\frac{15|\lambda|+3}{20|\lambda|} + \frac{9}{160} \left(\frac{1}{|\lambda|} + \frac{1}{2}\right)\right) \max \left\{ \frac{|F^{(n+1)}(z)|}{(n+1)!l^{n+1}(z)}, \frac{|F^{(n)}(z)|}{n!l^n(z)} \right\} \leq \\ & \leq \max \left\{ \frac{|F^{(n+1)}(z)|}{(n+1)!l^{n+1}(z)}, \frac{|F^{(n)}(z)|}{n!l^n(z)} \right\} \end{aligned}$$

для всіх  $n \geq 0$ . А тому правильним є і наступне твердження.

**Твердження 5.** Якщо  $|\lambda| > 1$ , то  $N(F, 40|\lambda|/3; \mathbb{D} \setminus \mathbb{D}_{1/10|\lambda|}) \leq 1$ .

Із тверджень 3-5 та зауваження 3 легко отримуємо таке твердження.

**Твердження 6.** Для  $F(z) = F(\nu+1, -\nu, 1; z)$  виконується  $N(F, l; \mathbb{D}) \leq 1$  з  $l(z) = \frac{\beta}{1-|z|}$ , де  $\beta = \frac{40}{3} \max\{1, |\nu(\nu+1)|\}$ .

Враховуючи зауваження 4 із твердження 6 отримуємо таку теорему.

**Теорема 2.** Функція Лежандра першого роду  $P_\nu(z)$  є обмеженого  $l$ -індексу в  $D = \{z : |z-1| < 2\}$  з  $l(z) = \frac{\beta}{2-|z-1|}$ , де  $\beta = \frac{40}{3} \max\{1, |\nu(\nu+1)|\}$ , а величина  $l$ -індексу не перевищує 1.

Зауважимо, що умова (2) для круга із теореми набуває вигляду

$$l(z) > \frac{\beta}{2 - |z - 1|}, \quad \beta > 1.$$

#### СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРА

1. G.M. Golusin, *Geometric theory of functions of a complex variable*, Amer. Math. Soc., Providence, 1969.
2. М.М. Sheremeta, *Analytic functions of bounded index*, VNTL Publishers, Lviv, 1999.
3. Д.С. Кузнецов, *Специальные функции*, Высшая школа, Москва, 1965.
4. A.W. Goodman, *Univalent function*, Vol. II, Mariner Publishing Co., 1983.
5. М.М. Шеремета, *Властивості гіпергеометричної функції з невід'ємними коефіцієнтами*, Вісник Львів. ун-ту, Сер. мех.-мат. **70** (2009), 183–190.
6. М.М. Sheremeta and Yu.S. Trukhan, *Properties of the solutions of the Gauss equation*, Mat. Stud. **41** (2014), no. 2, 157–167.

Стаття: надійшла до редколегії 07.10.2016  
доопрацьована 21.04.2017  
прийнята до друку 22.04.2017

## PROPERTIES OF THE SOLUTIONS OF THE LEGENDRE EQUATION

Yuriy TRUKHAN

*Ivan Franko Lviv National University,  
Universitetska str., 1, 79000 Lviv, Ukraine  
e-mail: yurik93@mail.ru*

Growth, close-to-convexity and the  $l$ -index boundedness of the solutions of the Legendre equation  $(1 - z^2)w'' - 2zw' + \lambda w = 0$  if  $\lambda \neq n(n + 1)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  and of some functions related to these solutions are investigated.

*Key words:* analytic function,  $l$ -index boundedness, Legendre equation, Legendre function of the first kind, close-to-convexity, growth, unit disc.