Наукові записки Львівського Державного Університету імені Ів. Франка
Том V Серія фізико-математична, вип. 1 1947

І. Г. СОКОЛОВ
доцент, кандидат фізико-математичних наук

ПРО НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ, ЩО ЗАДОВОЛЬНЯЮТЬ УМОВІ ЛІПШИЦА ПОЛІНОМАМИ БЕРНШТЕЙНА

(кафедра математичного аналізу)

Нехай $H^{(\alpha)}K$ є класом функцій, що задовольняють на відрізку $[0;1]$ умові Ліпшица порядку α $(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$ з даною константою K. Для кожної функції $f(x)$ цього класу побудуємо її поліном Бернштейна:

$$B_n[f;x] = \sum_{k=o}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \tag{1}$$

і розглянемо вираз:

$$E_n[H^{(\alpha)}K;x] = \sup_{f \in H^{(\alpha)}K} |f(x) - B_n[f;x]|, \tag{2}$$

де верхня межа розповсюджується на всі функції, що входять до $H^{(\alpha)}K$. *М. Кас* (1), користуючись теорією незалежних функцій довів слідуючу теорему:

Якщо позначити

$$g_n(f) = \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x) - B_n(f;x)|,$$

то для $f \in H^{(\alpha)}K$ маємо:

$$g_n(f) = 0\left(n^{\frac{-\alpha}{2}}\right),$$

і існує така функція $\varphi(t)$, що входить до $H^{(\alpha)}K$, для якої

$$g_n(f) \neq 0\left(n^{\frac{-\alpha}{2}}\right).$$

Тут ми даємо елементарне доведення більш точного результату, а саме:

$$E_n[H^{(\alpha)}K;x] = K\sum_{k=o}^{n} \left|x - \frac{k}{n}\right|^{\alpha}\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \tag{3}$$

$$[0 \leqslant x \leqslant 1]$$

і асимптотичної рівності

$$E_n[H^{(\alpha)}K;x] = \frac{c(x)}{n^{\frac{\alpha}{2}}} + o\left(n^{-\frac{\alpha}{2}}\right), \tag{4}$$

де $$c(x) = K\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}}[x(1-x)]^{\frac{\alpha}{2}} \qquad [0 \leqslant x \leqslant 1].$$

Доведення формули (3).

Нехай $f(t) \in H^{(\alpha)}K$. Тоді функція $\varphi_x(t) = f(t) - f(x)$ очевидно належить до класу $H_0^{(\alpha)}K$, що задовольняє умові Ліпшица порядку α з тою ж константою K і анулюється в точці x. Відзначивши, що $B_n[f;x]$ при фіксованому x є лінійним функціоналом, який задовольняє умові:

$$B_n[1;x] = 1,$$

легко дістаємо:

$$f(x) - B_n[f;x] = \varphi_x(x) - B_n[\varphi_x;x], \tag{5}$$

звідки виникає, що

$$E_n[H^{(\alpha)}K;x] = E_n[H_0^{(\alpha)}K;x]. \tag{6}$$

З другого боку, для всякої функції $\varphi_x(t) \in H_0^{(\alpha)}K$ маємо:

$$\left|\varphi_x(x) - B_n[\varphi_x;x]\right| = \left|B_n[\varphi_x;x]\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n}\left|\varphi_x\left(\frac{k}{n}\right) - \right.$$

$$\left. - \varphi_x(x)\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \leqslant K\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{k}{n} - x\right|^{\alpha}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}, \tag{7}$$

а для функції $\varphi_x(t) = K|t-x|^{\alpha}$, що належить до класу $H_0^{\alpha}K$, рівність, очевидно, досягається. Тим самим, в силу (6) доведена справедливість формули (3).

Для того, щоб дістати асимптотичну рівність (4), доведемо лему.

Лема. Нехай послідовність функцій розподілу: $\{F_n(t)\}$ $(n = 1, 2 \ldots)$ (тобто неспадаючих функцій $F_n(t)$ таких, що $F_n(-\infty) = 0$; $F_n(+\infty) = 1$) задовольняє слідуючим умовам:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(t) = F(t), \qquad -\infty \leqslant t \leqslant +\infty;$

в) для деякої неперервної, додатньої для достатньо великих значень t функції $f(t)$ існують інтеграли

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dF_n(t),$$

рівномірно збіжні відносно n і інтеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dF(t),$$

для яких має місце гранична рівність:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dF_n(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dF(t).$$

c) Тоді, якщо неперервна функція $\varphi(t)$ задовольняє умові

$$\overline{\lim_{t\to\pm\infty}}\ \frac{|\varphi(t)|}{f(t)}<\infty,$$

то $$\lim\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\,dF_n(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\,dF(t).$$

Доведення леми. На підставі так званої другої теореми Helly ми для довільного $N>o$ маємо, в силу умови a),

$$\lim\int_{-N}^{N}\varphi(t)\,dF_n(t)=\int_{-N}^{N}\varphi(t)\,dF(t). \tag{8}$$

Нехай тепер є задане довільне ε. В силу умов в) і с) можемо вибрати N настільки великим, щоб одночасно виконувалися нерівності:

$$\int_{(t)\geqslant N} f(t)\,dF_n(t)<\frac{\varepsilon}{3c};\quad \int_{(t)\geqslant N} f(t)\,dF(t)\leqslant\frac{\varepsilon}{3c}$$

і нерівність $\dfrac{|\varphi(t)|}{f(t)}<c$ для $(t)\geqslant N$, (де $c>o$ є деякою константою).

Тоді для всіх достатньо великих n будемо мати:

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\,dF_n(t)-\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\,dF(t)\right|\leqslant\left|\int_{-N}^{N}\varphi(t)\,dF_n(t)-\right.$$

$$\left.-\int_{-N}^{N}\varphi(t)\,dF(t)\right|+c\int_{(t)\geqslant N}\varphi(t)\,dF_n(t)+c\int_{(t)\geqslant N}\varphi(t)\,dF(t)\leqslant\varepsilon,$$

в силу умови (8), що і потрібно було довести.

Припустимо тепер:

$$F_n(t)=0 \qquad \left[t<-\frac{nx}{\sqrt{2nx(1-x)}}\right],$$

$$F_n(t)=\sum_{k=0}^{[nx+t\sqrt{2nx(1-x)}]}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}, \quad \left[-\frac{nx}{\sqrt{2nx(1-x)}}\leqslant t\leqslant\frac{(1-x)n}{\sqrt{2nx(1-x)}}\right],$$

$$F_n(t)=1 \qquad \left[t>\frac{(1-x)n}{\sqrt{2nx(1-x)}}\right]. \tag{9}$$

В силу добре відомої теореми Лапласа $F_n(t)$ задовольняє для всіх t граничної рівності

$$\lim_{n\to\infty}F_n(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{t}e^{-u^2}du. \tag{10}$$

Формула (3) перепишеться у вигляді:

$$E_n[H^{(\alpha)}K;x]=K\left[\frac{2x(1-x)}{n}\right]^{\frac{\alpha}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}|t|^\alpha dF_n(t). \tag{11}$$

В силу рівності, яку легко перевірити,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}t^2dF_n(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}t^2dF(t) \tag{12}$$

і рівномірної відносно n збіжності інтегралів

$$\int_{-\infty}^{+\infty}t^2dF_n(t),$$

ми, покладаючи

$$|t|^\alpha=\varphi(t)\quad[0\leqslant\alpha\leqslant1];\quad t^2=f(t)$$

з (10) і (12), на підставі нашої леми дістаємо:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|t|^\alpha dF_n(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}|t|^\alpha e^{-t^2}dt+o(1)$$

і, помічаючи, що

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |t|^{\alpha} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right),$$

дістаємо в силу (11) формулу (4) для всіх x $(0 < x < 1)$. Справедливість формули (4) для $x=0$; $x=1$ очевидна, тому що для довільної функції $f(0) - B_n[f;0] = f(1) - B_n[f;1] = 0$. Результати, які ми дістали вище, можуть бути узагальнені на клас функцій K_ω, де K_ω є класом функцій $f(t)$, модуль неперервності яких на відрізку $[0;1]$

$$\varphi(h) = \max_{|t_1 - t_2| \leqslant h} |f(t_1) - f(t_2)| \qquad [0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant 1]$$

не перевищує даної функції $\omega(h)$

$$\varphi(h) \leqslant \omega(h),$$

де $\omega(h)$ — неспадаюча, неперервна, опукла до верху функція, визначена для всіх $h > 0$ і така, що задовольняє умові $\omega(0) = 0$.

Можна показати, трохи ускладнюючи наші міркування, наступні рівності:

$$E_n[K_\omega;\ x] = \sum_{k=0}^{n} \omega\left(\left|\frac{k}{n} - x\right|\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

і асимптотично

$$E_n[K_\omega;\ x] = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \omega\left[|t| \sqrt{\frac{2x(1-x)}{n}}\right] e^{-t^2} dt \{1 + o(1)\}.$$

Цей результат, який я сподіваюся опублікувати в найближчий час, узагальнює результати М. Кас і Popoviса (2).

ЛІТЕРАТУРА

1. M. Kac. Studia Mathematica, t. VII.
2. M. Kac. Studia Mathematica, t. VIII.

И. Г. СОКОЛОВ. ОБ АПРОКСИМАЦИИ ПОЛИНОМАМИ С. Н. БЕРНШТЕЙНА ФУНКЦИЙ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ УСЛОВИЮ ЛИПШИЦА.

Резюме

Автор доказывает следующую формулу

$$E_n(x) = \sup_{f \in H^{(\alpha)}K} \left| f(x) - B_n(f, x) \right| \approx \frac{K\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}} \left[x(1-x) \right]^{\frac{\alpha}{2}} \quad (0 \leqslant x \leqslant 1),$$

где: 1) $B_n(f; x)$ обозначает полином Бернштейна для $f(x)$;

2) $H^\alpha(K)$ обозначает класс функций, которые удовлетворяют условию Липшица порядка α с константой K на интервале $[0, 1]$.

Доказывается также формула

$$E_n(x) = K \sum_{k=0}^{n} \left| x - \frac{k}{n} \right|^\alpha \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad [0 \leqslant x \leqslant 1].$$