Наукові записки Львівського Державного Університету імені Ів. Франка
Том V Серія фізико-математична, вип. 1 1947

І. Г. СОКОЛОВ
доцент, кандидат фізико-математичних наук

ПРО КОЕФІЦІЄНТИ ФУР'Є ДЛЯ ДЕЯКИХ КЛАСІВ НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ

(кафедра математичного аналізу)

Позначимо через $KW^{(r)}$ клас всіх функцій з періодом 2π, що мають абсолютно неперервну похідну $r-1$-го порядку і похідну r-го порядку.

$$f^{(r)}(x)=\varphi(x), \tag{1}$$

що задовольняє (там, де вона існує) нерівність:

$$|\varphi(x)|\leqslant K. \tag{2}$$

Доповнимо це определіння для $r=0$, а саме: нехай $KW^{(o)}$ — клас вимірних функцій з періодом 2π, обмежених по абсолютній величині константою K.

Ми будемо говорити, що функція $f(x)$, визначена на деякому проміжку, задовольняє умові Ліпшица порядку α з константою K, якщо для довільних двох значень x_1 і x_2, що належать до цього проміжку, має місце нерівність

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant K|x_1-x_2|^\alpha. \tag{3}$$

Сукупність всіх періодичних функцій з періодом 2π, що задовольняють умові Ліпшица порядку α $(0\leqslant\alpha\leqslant 1)$ з константою K, назвемо класом $KH^{(\alpha)}$.

Визначимо клас $KW^{(r)}H^{(\alpha)}$ $(r\geqslant 0;\, 0\leqslant\alpha\leqslant 1)$, як клас функцій, що мають похідні r-го порядку, які належать до класу $KH^{(\alpha)}$.

Для $r=0$ ми будемо вважати, що

$$KW^0K^{(\alpha)}=KH^{(\alpha)}\quad (0\leqslant\alpha\leqslant 1). \tag{4}$$

Зауважимо, що на основі відомих властивостей функцій, які задовольняють умові Ліпшица,

$$KW^{(r)}=KW^{(r-1)}H^{(1)}. \tag{5}$$

Нехай тепер нам дана сумована на проміжку $[0,2\pi]$ функція $f(x)$ з періодом 2π.

Позначимо через

$$a_n(f)=a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx;\quad b_n(f)=b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx \qquad (6)$$

її коефіцієнти Фур'є.

Якщо $f \in KW^{(r)}, r \geqslant 1$, то, як відомо, її коефіцієнти Фур'є мають порядок $0(n^{-r})$.

В тому випадку, коли $f \in KW^{(r)} H^{(\alpha)}$ $(r \geqslant 0;\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$, порядок цих коефіцієнтів буде $0\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right)$ (див. 1, ст. 45).

Hardy (2) привів приклад функції $f(x)$ класу $KH^{(\alpha)}$, коефіцієнти Фур'є якої мають порядок $0(n^{-\alpha})$, але не $o(n^{-\alpha})$. Таким чином, $f(x)$ належить до $KH^{(\alpha)}$ і точний порядок її коефіцієнтів Фур'є буде $0(n^{-\alpha})$.

Нехай тепер нам дано клас функцій S. Позначимо верхні грані:

$$A_n(S)=\sup_{f \in s} a_n(f);\quad B_n(S)=\sup_{f \in s} b_n(f)$$

величин коефіцієнтів Фур'є, розповсюджених на клас функцій S.

Ми доведемо, перш за все, що

$$A_n(S)=B_n(S) \qquad (8)$$

для довільного класу S функцій з періодом 2π, якщо цей клас включає разом з функцією $f(x)$ також функцію $f\left(x+\frac{\pi}{2n}\right)$ і слідуючі формули:

$$A_n[KW^{(r)}]=\frac{4K}{\pi n^r} \qquad [r \geqslant 0], \qquad (9)$$

причому цей результат залишається вірним, коли замість класу $KW^{(r)}$ візьмемо клас $KW^{(r)}C$, де під класом $KW^{(r)}C$ будемо розуміти клас функцій з періодом 2π, що мають неперервну похідну r-го порядку, обмежену по абсолютній величині константою K

$$A_n[KW^{(r)}H^{(\alpha)}]=\frac{K2^{\alpha+1}}{\pi}\,\frac{1}{n^{r+\alpha}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} u^{(\alpha)}\sin u\,du+0\left(\frac{1}{n^{r+\alpha+1}}\right) \qquad (10)$$

$$(r \geqslant 0);\ (0 \leqslant \alpha \leqslant 1).$$

Відмітимо для дальшого очевидні рівності:

$$A_n[KW^{(r)}] = KA_n[W^{(r)}], \qquad [r \geqslant 0];$$
$$A_n[KW^{(r)}H^{(\alpha)}] = KA_n[W^{(r)}H^{(\alpha)}], \qquad [r \geqslant 0;\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1], \tag{11}$$

що дозволяє нам надалі розглядати замість класів $KW^{(r)}$ і $KW^{(r)}H^{(\alpha)}$ класи $W^{(r)}$ і $W^{(r)}H^{(\alpha)}$.

При доведенні формули (10) ми застосували метод, вживаний С. М. Нікольським при розв'язанні аналогічних проблем [3]; [4].

Доведення формул (8) і (9).

Формула (8) випливає з очевидної рівності

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f\left(x+\frac{\pi}{2n}\right)\cos nx dx = a_n\left[f\left(x+\frac{\pi}{2n}\right)\right].$$

Далі, якщо $f(x)$ належить до одного з класів $W^{(r)}$ або $W^{(r)}H^{(\alpha)}$, то шляхом інтегрування по частинам легко дістаємо:

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{(-1)^r}{\pi n^r}\int\limits_0^{2\pi} f^{(r)}\sin\left[nt+\frac{r\pi}{2}\right]dt.$$

З цієї формули ми бачимо, що

$$A_n[W^{(r)}] = \frac{A_n[W^0]}{n^r};$$
$$A_n[W^{(r)}H^{(\alpha)}] = \frac{A_n[H^{(\alpha)}]}{n^r}. \tag{13}$$

Нехай тепер $f \in W^{(0)}$. Тоді

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx \leqslant \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} |\sin nx|\, dx = \frac{4}{\pi}. \tag{14}$$

З другого боку, для функції $\varphi_n(x) = \operatorname{sign}\sin nx$, що належить, очевидно, до класу $W^{(0)}$, рівність досягається. Тим самим в силу формули (11) доведена справедливість формули (9) для $r = 0$.

Ця формула залишається справедливою, якщо замість класу $W^{(0)}$ ми розглянемо клас C. Дійсно, нерівність (14) залишається в силі для функцій цього класу і, хоча екстремальна функція $\varphi_n(x)$ розривна в скінченому числі точок, згладжуючи злегка цю функцію в точках розриву, ми можемо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайти таку функцію $\varphi_n(x) \in C$, для якої

$$a_n[\varphi_n] \geqslant \frac{4}{\pi} - \varepsilon.$$

Тим самим доказана вірність формули (13) і для класу C. Прийнявши, нарешті, до уваги формулу (13), дістанемо формулу (9) для будь-якого $r \geqslant 0$.

Доведення формули (10).

Перш за все зауважимо, що замість класу $H^{(\alpha)}$ ми можемо розглянути клас $H_0^{(\alpha)}$ функцій з періодом 2π, що задовольняють умові Ліпшица порядку α і перетворюються в нуль в точках 0 і 2π.

Дійсно, якщо $f(x) \in H^{(\alpha)}$, то функція $\varphi(x)$

$$\varphi(x) = f(x) - f(0)$$

очевидно належить до $H_0^{(\alpha)}$ і має ті ж коефіцієнти Фур'є, що і функція $f(x)$.

Нехай $\varphi(x) \in H_0^{(\alpha)}$. Тоді

$$\int_0^{\frac{\pi}{2n}} \varphi(x) \sin nx dx = \int_0^{\frac{\pi}{2n}} [\varphi(x) - \varphi(0)] \sin nx dx = 0(n^{-(\alpha+1)}),$$

$$\int_{2\pi - \frac{\pi}{2n}}^{2\pi} \varphi(x) \sin nx dx = \int_{2\pi - \frac{\pi}{2n}}^{2\pi} [\varphi(x) - \varphi(2\pi)] \sin nx dx = 0(n^{-(\alpha+1)}).$$

А тому

$$b_n[\varphi] = \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{4n-1}{2n}\pi} \varphi(x) \sin nx dx + 0[n^{-(\alpha+1)}]. \tag{15}$$

Далі, в силу того, що $\varphi(x) \in H_0^{(\alpha)}$, дістанемо:

$$\frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{4n-1}{2n}\pi} \varphi(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{2n-1} \int_{\frac{2k-1}{2n}\pi}^{\frac{2k+1}{2n}\pi} \varphi(x) \sin nx dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^k \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \left[\varphi\left(\frac{k\pi}{n} + x\right) - \varphi\left(\frac{k\pi}{n} - x\right)\right] \sin nx dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{2n-1} \int_0^{\frac{\pi}{2n}} (2u)^\alpha \sin nu du = \frac{(2n-1) 2^\alpha}{\pi n^{\alpha+1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} u^\alpha \sin u du. \tag{16}$$

Таким чином ми дістаємо з (15) і (16)

$$A_n[H^\alpha] \leqslant \frac{2^{\alpha+1}}{\pi n^\alpha} \int_0^{\frac{\pi}{2}} u^\alpha \sin u du + 0\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right). \tag{17}$$

З другого боку, нехай функція $\varphi_n(x)$ визначається слідуючими рівностями:

$$\begin{aligned}
&\varphi_n(x) = 2^{\alpha-1} x^\alpha \qquad \left[0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2n}\right],\\
&\varphi_n(x) = (-1)^{k-1} 2^{\alpha-1}\left[\frac{k\pi}{n} - x\right]^\alpha; \left[\frac{2k-1}{2n}\pi \leqslant x \leqslant \frac{k\pi}{n}\right],\\
&\varphi_n(x) = (-1)^k 2^{\alpha-1}\left[x - \frac{k\pi}{n}\right]^\alpha; \left[\frac{k\pi}{n} \leqslant x \leqslant \frac{2k+1}{2n}\pi\right], \\
&\qquad (k = 1; 2 \ldots, 2n-1),\\
&\varphi_n(x) = -2^{\alpha-1}[2\pi - x]^\alpha; \left[\frac{4n-1}{2n}\pi \leqslant x \leqslant 2\pi\right].
\end{aligned} \tag{18}$$

Функція $\varphi_n(x)$ задовольняє умові Ліпшица порядку α з константою 1 на кожному з проміжків:

$$\left[0; \frac{\pi}{2n}\right]; \left[\frac{2k-1}{2n}\pi; \frac{2k+1}{2n}\pi\right], (k=1,2,\ldots,2n-1); \left[\frac{4n-1}{2n}\pi; 2\pi\right].$$

Тому що на границях цих проміжків $\varphi_n(x)$ досягає екстремумів, то, як відомо, $\varphi_n(x)$ задовольняє умові Ліпшица порядку α з константою одиниця на всьому проміжку $[0,2\pi]$.

Таким чином функція $\varphi_n(x) \subset H_0{}^\alpha$ (див. 3).

Для цієї функції ми маємо:

$$b_n[\varphi_n] = \frac{2^{\alpha-1}}{\pi}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2n}} x^\alpha \sin nx dx - \int_{\frac{4n-1}{2n}\pi}^{2\pi} [2\pi - x]^\alpha \sin nx dx + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{2n-1} 2\int_0^{\frac{\pi}{2n}} x^\alpha \sin nx dx\right\} = \frac{2^{\alpha+1}}{\pi n^\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{2}} u^\alpha \sin u du. \tag{19}$$

З формули (19) дістанемо:

$$A_n[H^{(\alpha)}] \geqslant \frac{2^{\alpha+1}}{\pi n^\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{2}} u^\alpha \sin u du. \tag{20}$$

Формули (17) і (20) дають нам формулу (10) для $r=0$. Формулу (10) дістанемо на основі (11) і (13) [для $r>0$; $K \neq 1$].

ЛІТЕРАТУРА

1. Зигмунд. Тригонометрические ряды, ОНТИ, 1939.

2. Hardy. The allied series of a Fourier series. Proceedings of the London Math. Society 24, 1925.

3. Никольский С. М. Приближение периодических функций тригонометрическими полиномами. Труды Матем. Института им. Стеклова, 1945.

4. Колмогоров А. Н. Zur Grossenordung des Restgliedes Fourierscher Reihen Differenzierbarer Funktionen. Annals of Mathematics V 36 № 2, 1935.

И. Г. СОКОЛОВ. О КОЭФФИЦИЕНТАХ ФУРЬЕ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ.

Резюме.

Обозначим через $KW^{(r)}$ класс периодических функций периода 2π, обладающих производной порядка r и удовлетворяющих нёравенству

$$|\overset{(r)}{f}(x)| \leqslant K.$$

Обозначим затем через $KW^{(r)}H^{\alpha}$ класс периодических функций периода 2π, производная $f^{(r)}(x)$ которых удовлетворяет условию Липшица порядка $\alpha (\leqslant 1)$ с константой K.

Пусть

$$A_n(s) = \sup_{f \in S} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx.$$

Автор доказывает, что

$$A_n[KW^{(r)}] = \frac{4k}{\pi} \frac{1}{n^r}$$

$$A_n[KW^{(r)} H^{\alpha}] = \frac{K2^{\alpha+1}}{\pi n^{r+\alpha}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} u^{\alpha} \sin u du + 0\left(\frac{1}{n^{r+\alpha+1}}\right).$$