Наукові записки Львівського Державного Університету імені Ів. Франка
Том V Серія фізико-математична, вип. 1 1947

М. О. ЗАРИЦЬКИЙ
професор

ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ ПОНЯТТЯ ПОХІДНОЇ МНОЖИНИ В АБСТРАКТНИХ ПРОСТОРАХ

(кафедра загальної математики)

Творець теорії множин G. Cantor розглядав геометричні твори як довільні точкові множини евклідового простору. Щойно M. Fréchet (1906) зауважив, що для досліду основних властивостей точкових множин не потрібні спеціальні властивості евклідового continuum.

Fréchet і інші математики ще до сьогоднішнього дня кладуть в основу своїх дослідів деякі загальні властивості якогось одного основного поняття теорії точкових множин (оточення, похідна, замкнення і т.д.) і виводять з них інші властивості розглянутих „абстрактних" множин. Таким способом повстали теорії багатьох, загальніших від евклідового, просторів. Залежно від того, яке топологічне поняття приймаємо за основне поняття і які його властивості приймаємо за аксіоми, одержуємо різні „топологічні" простори.

Деякі математики (Fréchet, Riesz, Sierpiński і інші) досліджували вже також поняття похідної множини, як базу теорії точкових множин. Однак нема досі в літературі систематичної і послідовної побудови теорії точкових множин на основі властивостей похідної множини. В більшій праці, яка готується до друку, будується повна теорія абстрактного простору, основним поняттям якого є поняття похідної множини з певними загальними його властивостями як незалежними аксіомами.

Поки що публікую деякі початкові, відокремлені фрагменти цієї монографічної праці.

I. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ І ПОЗНАЧЕННЯ

1. Знаком C позначаю досліджувану абстрактну множину, а буквами A, B, A_1, A_2 і т.д. підмножини множини C. Знаком A^c позначаю доповнення множини A до множини C, тобто: $A^c = C - A$.

Припустимо, що кожній підмножині $A \subset C$ припорядкована однозначно певна підмножина A^d, яка є також частиною множини C ($A^d \subset C$). Тоді множину C називатимемо, за Александровим, загальнотопологічним простором. Множину A^d називаємо похідною множини A.

Писатимемо $A \subset B$ або $A \rightarrow B$, якщо множина A є частиною множини B. Якщо A не є частиною множини B, писатимемо $A \not\subset B$, або $A \not\rightarrow B$.

2. В загальнотопологічному просторі приймаємо такі означення: *

Множину A називатимемо

1) замкненою, якщо $A^d \subset A$;
2) в собі щільною, якщо $A \subset A^d$;
3) досконалою, якщо $A^d = A$;
4) відкритою, якщо $A \subset A^{cdc}$;
5) ізольованою, якщо $A^d \subset A^c$;
6) всюди щільною, якщо $A^d = C$;
7) ніде нещільною, якщо $A^{dcd} = C$;
8) межовою, якщо $A \subset A^{cd}$.

3. З наведених означень випливають деякі теореми, які можна довести, користуючись тільки законами алгебри Буля. Ці теореми вірні в кожному загальнотопологічному просторі. Наведемо деякі з них:

T_1. Доповнення замкненої множини є відкритою множиною і, навпаки, доповнення відкритої множини є замкненою множиною.

T_2. Для того, щоб множина була досконала, треба і досить, щоб вона була замкнена і в собі щільна.

T_3. В жодному загальнотопологічному просторі не існує непуста множина одночасно:

а) в собі щільна і ізольована,
б) всюди щільна і ізольована,
в) межова і відкрита.

T_4. Жодна властива частина загальнотопологічного простору не може бути одночасно замкненою і всюди щільною множиною.

T_5. Кожна всюди щільна множина є в собі щільна.

T_6. Кожний загальнотопологічний простір є замкненою множиною.

T_7. Для того, щоб загальнотопологічний простір був у собі щільний, треба і досить, щоб він був всюди щільний.

---

* Знаком 0 позначаємо пусту множину. Приймаємо ще короткі позначення ітерованих операцій A^c і A^d: $A^{cd} = (A^c)^d$, $A^{dd} = (A^d)^d$, $A^{dcd} = \{(A^d)^c\}^d$ і т. д.

T_8. Кожний в собі щільний загальнотопологічний простір є досконалою множиною,

T_9. В кожному відкритому загальнотопологічному просторі пуста множина є ізольованою множиною.

T_{10}. Для того, щоб всюди щільний загальнотопологічний простір був ніде нещільною множиною, треба і досить, щоб пуста множина була всюди щільною множиною.

T_{11}. Для того, щоб загальнотопологічний простір був межовою множиною, треба і досить, щоб пуста множина була всюди щільною множиною.

T_{12}. В кожному загальнотопологічному просторі пуста множина є в собі щільна, відкрита, межова і ізольована.

T_{13}. В просторі, в якому кожна множина є всюди щільна, кожна множина є в собі щільна, ніде нещільна і межова, тільки весь простір є замкнений і досконалий, тільки пуста множина є відкрита і ізольована.

T_{14}. В просторі, в якому кожна множина є досконала, кожна множина є замкнена, в собі щільна і відкрита, тільки пуста множина є ізольована, ніде нещільна і межова, а тільки весь простір є всюди щільний.

T_{15}. Для того, щоб загальнотопологічний простір був межовий, треба і досить, щоб пуста множина була всюди щільна.

II. СИСТЕМА АКСІОМ

1. В загальнотопологічному просторі кожній множині припорядкована однозначно похідна A^d, причому це припорядкування може бути зовсім довільне. Припустимо тепер, що похідна A^d повинна бути визначена так, щоб вона задовольняла такі умови:

I_d якщо $A \subset B$, то $A^d \subset B^d$,

II_d $(A + B)^d \subset A^d + B^d$,

III_d $C^d = C$,

IV_d $A^{dd} \subset A^d$,

V_d $O^d = O$,

VI_d якщо $A^d \subset A \subset A^{cdc}$, то $A = O$, або $A = C$.

Простір, в якому похідна задовольняє ці умови, називатимемо простором (d).

Умови I_d — VI_d називатимемо аксіомами простору (d).

Для доведення незалежності аксіом розглянемо простір, що має три довільні елементи a, b, c, тобто $C = \{a, b, c\}$.

Для кожної підмножини * цього простору визначимо шістьма різними способами похідну, як це бачимо у відповідних стовбцях такої таблиці:

	I_d	II_d	III_d	IV_d	V_d	VI_d
O^d	O	O	O	O	C	O
a^d	C	a	a	b	C	a
b^d	C	b	a	C	C	b
c^d	C	c	a	C	C	c
$(a, b)^d$	(a, b)	C	a	C	C	(a, b)
$(b, c)^d$	C	C	a	C	C	(b, c)
$(c, a)^d$	C	C	a	C	C	(c, a)
C^d	C	C	a	C	C	C

В кожному з стовбців цієї таблиці наведені такі означення похідної, які задовольняють всі аксіоми, крім однієї, відміченої зверху відповідного стовбця.

2. Щоб довести, що наведені аксіоми несуперечні, покладемо в тому самому просторі $C = \{a, b, c\}: O^d = O$, а $A^d = C$ для кожної іншої множини $A \subset C$.

Не важко перевірити, що визначена таким способом похідна задовольняє всі аксіоми $I_d - VI_d$.

3. В просторі $C\{a, b\}$, що скдадається тільки з двох елементів, з аксіом III_d і V_d випливає аксіома I_d. Справді, якщо $O^d = O$ і $C^d = C$, то як-небудь ми означили б a^d і b^d, матимемо для кожної пари A, B підмножин такого простору: якщо $A \subset B$, то $A^d \subset B^d$.

4. В нашій системі аксіом немає мови про елементи простору, отже й не видно в ній реляції $a \subset A$, яка говорить, що „точка a є елементом множини A".

Властивості похідної множини виражені тут за допомогою самих тільки символів алгебри Boole-а, що спрощує значно і означення інших основних понять топології і доведення теорем, що випливають з наших аксіом.

5. В нашій системі аксіом нема такої умови, що похідна однієї точки є пустою множиною. З цього виходить, що досліджуваний нами простір є інший, ніж так званий „доступний" простір Fréchet.

* Для позначення такої підмножини, що складається з одного тільки елементу, писатимемо a^d замість $(a)^d$.

III. ДЕЯКІ ВИСНОВКИ З АКСІОМ $I_d - IV_d$

1. З самих тільки аксіом $I_d - IV_d$ можна вивести за допомогою теорем алгебри Boole-а такі властивості поняття похідної множини

$$1_d: (A+B)^d = A^d + B^d,$$
$$2_d: (AB)^d \subset A^d B^d,$$
$$3_d: A^d - B^d \subset (A-B)^d,$$
$$4_d: A^{cdc} \subset A^d,$$
$$5_d: A^{dcdcdcd} = A^{dcd},$$
$$6_d: \text{якщо } A \subset B, \text{ то } A^{cdc} \subset B^{cdc},$$
$$7_d: A^{dcdd} = A^{dcd},$$
$$8_d: A^{ddcd} = A^{dcd}.$$

2. Раніш, ніж перейти до обговорення цих теорем, наведемо означення (за допомогою похідної) деяких основних понять теорії точкових множин.

Зімкненням множини A називаємо множину

$$A^r = A + A^d.$$

Нутром множини A називаємо множину:

$$A^i = AA^{cdc}.$$

Множиною зовнішніх точок множини A називаємо множину:

$$A^e = A^c A^{dc}.$$

Межою множини A називаємо множину:

$$A^f = AA^{cd} + A^c A^d.$$

Берегом множини A називаємо множину:

$$A^b = AA^{cd}.$$

3. Відомі формули $1_d - 3_d$ не вимагають ніякого обговорення. Формула 4_d говорить більше, ніж відома формула $A^i \subset A$. Формула 4_d говорить, що не тільки спільна частина множин A і A^{cdc} є підмножиною похідної A^d, але й ціла множина A^{cdc} є частиною цієї похідної. Не важко знайти приклад такої множини A, для якої $AA^{cdc} \neq A^{cdc}$. Нехай простором C буде проста, множиною A проста без точки $x = O$ і означимо похідну як множину точок скупчення даної множини. Тоді $AA^{cdc} =$ просторові C без точки $x = O$, а $A^{cdc} =$ просторові. Позначимо тепер буквою ϱ скінченний поступ знаків d і c, в якому на непарних місцях стоїть буква d, а на парних місцях буква c (наприклад dcd, $dcdcd$ і т.д.). Тоді множина A^ϱ являє собою множину, що її одержуємо внаслідок скінченної ітерації упохіднювання і доповнення

множини A. Тоді формула 5_d вирішує таке питання: чи для двох різних $\varrho_1 \neq \varrho_2$ є завжди $A^{\varrho_1} \neq A^{\varrho_2}$?

З цієї формули виходить, що для довільної множини A семикратна ітерація дає ту саму множину, що трикратна ітерація операторів d і c.

З цього виходить, що в загальному випадку є тільки шість різних множин типу A^ϱ: A^d, A^{dc}, A^{dcd}, A^{dcdc}, A^{dcdcd} і A^{dcdcdc}. Теорема 6_d узагальнює відому теорему, за якою з умови $A \subset B$ випливає інклюзія $A^\varrho \subset B^\varrho$.

Теорема 7_d говорить, що для довільного A множина A^{dcd} є досконала. Множини A^d, A^{dd}, A^{ddd} і т.д. є, в загальному випадку, відмінні одна від одної. Але, якщо між двома першими операторами d міститься оператор c, то дальше застосування операції d до множини A^{dcd} не дає нових множин.

Теорема 8_d говорить, що оператор dcd, застосований до довільної множини A, дає те саме, що цей оператор, застосований до похідної A^d.

4. Позначимо тепер буквою σ довільний скінченний поступ операторів d і c, причому цей поступ може починатися буквою d або c і букви d можуть наступати одна безпосередньо по одній в довільній скінченній кількості. Множину A^σ називатимемо множиною типу A^σ. Вирішимо тепер такі дві проблеми:

а) визначити всі можливі множини типу A^σ, б) визначити всі можливі інклюзії $A^{\sigma_1} \subset A^{\sigma_2}$ між різними множинами типу A^σ.

Вирішення обох цих задач дадуть нам такі дві таблиці (де n є довільне натуральне число):

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] T_{d,1}^{*} & A^{cdc} \arrow[r] & A^{cddc} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & A^{cd^n c} \arrow[r] & A^{cdcdcdc} \arrow[ur] \arrow[dr] & A^{cdcd} \arrow[dr] & A^{dcdcd} \arrow[r] & A^{d^n} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & A^{dd} \arrow[r] & A^{d} \\ & & & & & & A^{dcdc} \arrow[ur] & & & & & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] T_{d,2} & A^{dc} \arrow[r] & A^{ddc} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & A^{d^n c} \arrow[r] & A^{dcdcdc} \arrow[ur] \arrow[dr] & A^{cdcd} \arrow[dr] & A^{cdcdcd} \arrow[r] & A^{cd^n} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & A^{cdd} \arrow[r] & A^{cd} \\ & & & & & & A^{cdcdc} \arrow[ur] & & & & & \end{tikzcd}$$

Спираючись на аксіоми $I_d - IV_d$ і виведені з них теореми $1_d - 8_d$, можна довести, що (в загальному випадку): *

α) Всі наведені в обох таблицях множини типу A^σ є відмінні одна від одної.

---

* Знак $A \to B$ позначає те саме, що $A \subset B$. Пишемо A^{d^2} замість A^{dd}, A^{d^3} замість A^{ddd} і т.д.

β) Вірні всі інклюзії між множинами A^σ, що їх бачимо в таблицях.

γ) Не існують інші інклюзії між множинами, що містяться в таблицях, крім тих інклюзій, що їх бачимо в таблицях.

δ) Не існують жодні інші множини типу A^σ крім тих, що їх бачимо в обох таблицях, тобто кожна множина типу A^σ (при довільному A і при довільному σ) є тотожна одній з тих множин, що містяться в таблицях ($T_{d,1}$ і $T_{d,2}$).

IV. ЗВ'ЯЗОК МІЖ ПОХІДНОЮ МНОЖИНИ І ЇЇ ЗАМКНЕННЯМ

1. К. Куратовський * вивів основні властивості замкнення множини з такої системи аксіом:

$$
\begin{array}{ll}
I_r & (A+B)^r = A^r + B^r, \\
II_r & A \subset A^r, \\
III_r & O^r = O, \\
IV_r & A^{rr} = A^r.
\end{array}
$$

Можна довести, що система аксіом $I_r - IV_r$ випливає з аксіом I_d, II_d, IV_d і V_d.

2. Спираючись на аксіоми $I_r - IV_r$, К. Куратовський побудував такі дві таблиці інклюзій між множинами, що їх можна одержати за допомогою ітерації операції A^r і A^c виконуваних на довільній множині A:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & A^{crcr} \arrow[dr] & & \\
T_{r,1} & A^{crc} \arrow[r] \arrow[ddrr] & A^{crcrcrc} \arrow[ur] \arrow[dr] & & A^{rcrcr} \arrow[r] & A^{r} \\
 & & & A^{rcrc} \arrow[ur] & & \\
 & & & A \arrow[uurr] & &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & A^{rcr} \arrow[dr] & & \\
T_{r,2} & A^{rc} \arrow[r] \arrow[ddrr] & A^{rcrcrc} \arrow[ur] \arrow[dr] & & A^{crcrcr} \arrow[r] & A^{cr} \\
 & & & A^{crcrc} \arrow[ur] & & \\
 & & & A^{c} \arrow[uurr] & &
\end{tikzcd}
$$

* Sur l'opération A de Analysis Situs, Fundamenta mathematicae, T. III p. 182—199. Аналогічні властивості інших понять топології можна знайти в моїх працях: 1) M. Zarycki, Quelques notions fondamentales de l'Analysis Situs au point de vue de l'Algèbre de la Logique, Fundam. Mathem. IX, pp. 3—15; 2) M. Zarycki, Allgemeine Eigenschaften der Cantorschen Kohärenzen, Transactions of Americ. Mathem. Society, XXX, p. 498; 3) M. Zarycki, Über den Kern einer Menge, Jahresberichte der deutschen Mathem.-vereinigung, XXXIX, s. 154.

3. Можна вивести такі формули, що виражають зв'язок між множинами таблиць $T_{d,1}$ і $T_{d,2}$ і відповідними множинами таблиць $T_{r,1}$ і $T_{r,2}$:

9_d : $A^{crc} \subset A^{cdc}$, $\quad$ 15_d : $A^{crcrc} = A^{cdcdc}$,
10_d : $A^{d} \subset A^{r}$, $\quad$ 16_d : $A^{rcrc} = A^{dcdc}$,
11_d : $A^{rc} \subset A^{dc}$, $\quad$ 17_d : $A^{rcrcrc} = A^{dcdcdc}$,
12_d : $A^{cd} \subset A^{cr}$, $\quad$ 18_d : $A^{crcrcrc} = A^{cdcdcdc}$,
13_d : $A^{rcr} = A^{dcd}$, $\quad$ 19_d : $A^{crcrcr} = A^{cdcdcd}$,
14_d : $A^{crcr} = A^{cdcd}$, $\quad$ 20_d : $A^{rcrcr} = A^{dcdcd}$.

4. Бачимо, що деякі множини таблиць $T_{d,1}$ і $T_{d,2}$ є тотожні відповідним множинам таблиць К. Куратовського. Факт, що в таблицях К. Куратовського є тільки скінчена кількість різних множин, а таблиці $T_{d,1}$ і $T_{d,2}$ містять у собі безліч різних множин, є наслідком того, що $A^{rr} = A^{r}$, а A^{dd} є, в загальному випадку, відмінне від A^{d}.

V. ДЕЯКІ ВИСНОВКИ З АКСІОМИ VI_d

Можна довести, що з аксіоми VI_d випливає зв'язність простору C.*

З аксіом III_d і V_d виходить, що пуста множина і цілий простір є одночасно відкритими і замкненими множинами.

З аксіоми VI_d виходить, що жодна інша підмножина простору не може бути одночасно замкнена і відкрита, бо для $O \neq A \neq C$ умова $A^{d} \subset A \subset A^{cdc}$ неузгоджена з аксіомою VI_d.

VI. ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ МНОЖИНИ A^{dcd}

1. В доведеннях розглянутих досі теорем важливу роль відіграє множина A^{dcd}, яку позначимо коротко знаком A^{m}. Можна довести такі властивості цієї множини:

1_m : якщо $A \subset B$, то $B^{m} \subset A^{m}$,
2_m : $A^{mmm} = A^{mcm} = A^{m}$,
3_m : $O^{m} = C$,
4_m : $C^{m} = O$,
5_m : $(AB)^{mm} \subset A^{mm} B^{mm}$,
6_m : $A^{mm} + B^{mm} \subset (A+B)^{mm}$,
7_m : $A^{mc} \subset A^{mm}$,
8_m : $(A + B)^{m} \subset A^{m} B^{m}$,

* Множину A називаємо зв'язною, якщо її не можна розкласти на суму таких двох непустих множин M і N, щоб було: $MN + MN^{d} + NM^{d} = O$.

$$
\begin{aligned}
&9_m: && A^m + B^m \subset A^m B^m,\\
&10_m: && A^{cm} \subset A^{mm},\\
&11_m: && \text{якщо } A \subset B, \text{ то } A^{mm} \subset B^{mm},\\
&12_m: && A^m \subset A^{cmm},\\
&13_m: && A^m + A^{mm} = C.
\end{aligned}
$$

2. Можна довести, що для жодної множини A не може бути $A^m = A$.

Можна довести, що A^m є похідною множини зовнішніх точок множини A. Для того, щоб множина A була всюди щільна, треба і досить, щоб задовольнялась одна з таких умов: 1) $A^m = O$, 2) $A^m \subset A$, 3) $A^{mm} = C$.

Множина AA^m є завжди ніде нещільна.

Різниця $A - A^{mm}$ є також завжди ніде нещільна.

Можна нарешті довести, що достатньою і необхідною умовою для того, щоб множина A була ніде нещільна, є кожна з таких формул: 1) $A^m = C$, 2) $A^{mm} = O$, 3) $A \subset A^m$, 4) $A \subset A^{mmc}$, 5) $A^{mm} \subset A^m$, 6) $A^d \subset A^m$, 7) $A^{dd} \subset A^m$.

3. Для множини A^m можна вивести такі таблиці інклюзій

$$
T_{m,1} \qquad
\begin{tikzcd}
 & A^m \arrow[dr] & \\
A^{mmc} \arrow[ur] \arrow[dr] & & A^{cmm} \\
 & A^{mc} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

$$
T_{m.} \qquad
\begin{tikzcd}
 & A^{cm} \arrow[dr] & \\
A^{cmmc} \arrow[ur] \arrow[dr] & & A^{mm} \\
 & A^{mc} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

VII. ПРО ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ НЕПЕРЕРВНИХ І ГОМЕОМОРФНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ

1. Нехай кожній точці a простору буде припорядкована однозначно якась точка простору, яку позначимо знаком a^φ. Обернену операцію позначимо знаком $a^{\varphi^{-1}}$. Тоді функція φ перетворює множину A на множину A^φ. Функцію φ називатимемо взаємооднозначною, якщо для кожної множини A маємо $A^{\varphi\varphi^{-1}} = A$.

Функцію φ називаємо неперервною в просторі C, якщо для кожного $A \subset C$:

$$(1) \quad A^{d\varphi} \subset A^\varphi + A^{\varphi d}.$$

2. Можна довести, що в евклідових просторах функція є неперервна тоді і тільки тоді, коли

$$(2) \quad A^{d\varphi} + A^{d\varphi d} \subset A^{\varphi} + A^{\varphi d}.$$

Маємо тут друге означення неперервності.

Формули (1) і (2) дають в евклідових просторах два еквівалентні означення поняття неперервності функції. Однак в загальнотопологічному просторі ці два означення не є еквівалентні.

Можна довести, що для їх еквівалентності необхідно і досить, щоб поняття похідної множини задовольняло аксіоми I_d, II_d і III_d.

3. Функцію називатимемо взаємооднозначною і взаємонеперервною, якщо: $A^{d\varphi} \subset A^{\varphi} + A^{\varphi d}$ і $A^{d\varphi^{-1}} \subset A^{\varphi^{-1}} + A^{\varphi^{-1} d}$ (при першому означенні неперервності), або:

$$A^{d\varphi} + A^{d\varphi d} \subset A^{\varphi} + A^{\varphi d} \text{ і } A^{d\varphi^{-1}} + A^{d\varphi^{-1} d} \subset A^{\varphi^{-1}} + A^{\varphi 1 d}$$

(при другому означенні неперервності).

Можна довести, що це означення є в обох випадках еквівалентне таким двом умовам:

$$A^{d\varphi} \subset A^{\varphi d} \text{ і } A^{d\varphi^{-1}} \subset A^{\varphi^{-1} d}.$$

Функцію φ називаємо гомеоморфізмом, якщо:

$$A^{d\varphi} = A^{\varphi d}.$$

Вияснимо на кількох прикладах роль аксіом I_d — VI_d в теорії неперервних функцій. Розгляньмо такі прості класичні теореми:

T_1. Неперервна функція від неперервної функції є неперервна.

T_2. Тотожне перетворення є неперервне.

T_3. Взаємооднозначні і взаємонеперервні функції творять групу.

T_4. Гомеоморфізми творять групу.

T_5. Гомеоморфізм є рівноважний взаємній однозначності і взаємній неперервності.

T_6. Стала функцій є неперервна.

Ці відомі теореми класичного аналізу не мусять, очевидно, бути вірні в загальніших просторах. Наступні зауваження дадуть нам відповідь на питання, які загальні аксіоми необхідні для доведення цих теорем, яка спеціалізація загальнотопологічного простору потрібна для того, щоб ці теореми були вірні.

Для доведення першої теореми необхідні аксіоми I_d і II_d. Для доведення другої теореми достатня аксіома IV_d при другому означенні неперервності, и при перщому означенні неперервності ця теорема вірна в загальнотопологічному просторі.

Для доведення третьої теореми необхідні аксіоми I_d, II_d і IV_d.

Четверта теорема є вірна в кожному загальнотопологічному просторі.

П'ята теорема вірна в загальнотопологічному просторі при першому означенні неперервності, а при другому означенні неперервності потрібні аксіоми I_d, II_d і IV_d.

Шоста теорема є вірна в кожному загальнотопологічному просторі при обох означеннях неперервності.

М. О. ЗАРИЦКИЙ. О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ПРОИЗВОДНОГО МНОЖЕСТВА В АБСТРАКТНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ.

Резюме:

Пусть C — топологическое пространство, в котором производное множество множества $A \subset C$ удовлетворяет следующим аксиомам:

I : $A \subset B$ влечёт $A^d \subset B^d$,

II : $(A+B)^d \subset A^d + B^d$,

III : $C^d = C$,

IV : $A^{dd} \subset A^d$,

V : $O^d = O$,

VI : $A^d \subset A \subset A^{cdc}$ влечёт $A = O$ или $A = C$.

Через A^c обозначено множество $C - A$.

Можно доказать, что аксиомы I—VI взаимно независимы.

Из перечисленных аксиом можно вывести следующие формулы:
1) $(A+B)^d = A^d + B^d$, 2) $(AB)^d = A^d B^d$, 3) $A^d - B^d \subset (A-B)^d$, 4) $A^{cdc} \subset A^d$, 5) $A^{dcdcdcd} = A^{dcd}$, 6) $A \subset B$ влечёт $A^{cdc} \subset B^{cdc}$ 7) $A^{dcdd} = A^{dcd} = A^{ddcd}$.

Можно вывести многие другие свойства производного множества.

Обозначив через A^r замыкание A, $A^r = A + A^d$, можно вывести из аксиом I—V тождество $A^{rcr} = A^{dcd}$.

Я укажу ещё на следующую теорему: каждое из соотношений 1) $A^{dcd} = C$, 2) $A^{dcdcd} = O$, 3) $A \subset A^{dcd}$, 4) $A \subset A^{dcdcdc}$, 5) $A^{dcdcd} \subset A^{dcd}$, 6) $A^d \subset A^{dcd}$ и 7) $A^{d^n} \subset A^{dcd}$ (где A^{d^n} означает n-ую производную множества A) является необходимым и достаточным условием того, чтобы множество A было неплотным.

Пуст φ есть однозначная функция, преобразующая каждую точку C в точку C и A^{φ} — множество образов точек A. В эвклидовом про-

странстве каждая из формул 1) $A^{d\varphi} \subset A\varphi + A\varphi^{d}$ и 2) $A^{d\varphi} + A^{d\varphi d} \subset A\varphi + A\varphi^{d}$ является необходимым и достаточным условием того, чтобы функция φ была непрерывной. Эти два определения будут эквивалентны в пространствах, в которых производное множество удовлетворяет аксиомам I, II и IV. Имеют место также три аналогичные условия для того, чтобы функция φ взаимно однозначна ($A\varphi\varphi^{-1} = A$) и взаимно непрерывна:

1) $A^{d\varphi} \subset A\varphi + A\varphi^{d}$ и $A^{d\varphi^{-1}} \subset A\varphi^{-1} + A\varphi^{-1d}$,

2) $A^{d\varphi} + A^{d\varphi d} \subset A\varphi + A\varphi^{d}$ и $A^{d\varphi^{-1}} \subset A^{d\varphi^{-1}d} \subset A\varphi^{-1} + A\varphi^{-1d}$,

3) $A^{d\varphi} \subset A\varphi^{d}$ и $A^{d\varphi^{-1}} \subset A\varphi^{-1d}$.

Если $A^{d\varphi} = A\varphi^{d}$, то имеет место гомеоморфизм.

Можно доказать, что непрерывная функция от непрерывной функции является функцией непрерывной в пространствах, в которых выполняются аксиомы I и II.

Тождественное преобразование непрерывно по первому определению в общих топологических пространствах и по второму определению непрерывно в пространствах, удовлетворяющих аксиомам I, II и IV. Гомеоморфизмы образуют группу; функция, равная постоянной, непрерывна в общих топологических пространствах. По первому определению непрерывности гомеоморфизм эквивалентен взаимной непрерывности и взаимной однозначности в любых топологических пространствах, но по второму определению непрерывности они эквивалентны только в пространствах, в которых производные множества подчинены аксиомам I, II и IV.
