Наукові записки Львівського Державного Університету імені Ів. Франка
Том V Серія фізико-математична, вип. 1 1947

А. С. КОВАНЬКО

ПРО КВАДРУВАЛЬНІСТЬ ДЕЯКИХ ОКРЕМИХ ВИДІВ ПОВЕРХОНЬ В СЕНСІ ЛЕБЕГА

Питання про квадрувальність поверхонь в розумінні Лебега в окремих випадках було розв'язане деякими математиками. Так, поверхні виду $z = f(x, y)$ були вивчені L. Tonelli (Rend Acad naz. Linzeia, Vol III, Fasc 7, 1926). Ми також зупинимося на деяких видах поверхонь, а саме ми розглянемо поверхні: конічну і циліндричну, поверхню, утворену обертанням і сковзанням кривої, і окремий вид поверхні переносу.

§ 1. ОПРЕДІЛЕННЯ І ВСТУПНІ ЛЕМИ

Опреділення I. Площею даної поверхні S в розумінні Лебега зветься точна нижня межа нижніх границь послідовностей площ поліедрів наближення даної поверхні.

Опреділення II. Просторова крива Γ зветься квадрувальною, якщо її можна заключити в таку просторову область V, що проекція цієї області на довільну площину має яку завгодно малу площу.

Лема I. Якщо простірна однозв'язна область V заключає в собі деяку множину E, то проекція V на довільну площину має міру більшу або рівну зовнішній мірі проекції на ту ж площину.

Лема II. Якщо Ω однозв'язна область деякої поверхні, без подвійних точок обмежена замкненим контуром C, квадрувальним, то міра проекції Ω на довільну площину більша або рівна мірі проекції області, утвореної проекцією C на ту ж площину.

Лема III. Якщо однозв'язна область Ω деякої поверхні, обмежена квадрувальною кривою C (без подвійних точок), квадрувальна в розумінні Лебега, то площа Ω більша або рівна мірі проекції Ω на довільну площину.

З огляду на виключну простоту лем I й II ми не зупиняємось на їх доведенні. Для леми III ми обмежимось вказівкою, що вона дістається як крайній випадок окремого випадку — поліедра, де вона очевидна.

§ 2. КОНІЧНА ПОВЕРХНЯ

Нехай нам дана конічна поверхня, визначена рівнянням:

$$(S)\quad \left.\begin{aligned} x &= \varphi(u)\cdot v,\\ y &= \psi(u)\cdot v,\\ z &= \chi(u)\cdot v, \end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned} &(\alpha\leqslant u\leqslant\beta),\\ &(0\leqslant v\leqslant 1). \end{aligned}$$

$\varphi(u)$, $\psi(u)$, $\chi(u)$ — неперервні функції $\neq 0$.

Крім того, спрямована крива $\Gamma(v=1)$ або, що те ж саме:

$$x=\varphi(u),\ y=\psi(u),\ z=\chi(u)\ldots\ldots(\Gamma)$$

припускається квадрувальною без подвійних точок. Припустимо, крім того, що $\varphi(u)>0$, $\psi(u)>0$, $\chi(u)>0$.

Останнє обмеження неістотне і воно лише спрощує наші виклади. В силу неперервності φ, ψ і χ очевидно, що можна указати для них нижню межу $m>0$, тобто

$$\varphi\geqslant m,\ \psi\geqslant m,\ \chi\geqslant m.$$

Теорема І. Необхідна і достатня умова квадрувальності поверхні S, за Лебегом, полягає в тому, що $\frac{\varphi(u)}{\chi(u)}$, $\frac{\psi(u)}{\chi(u)}\left(\text{а значить і } \frac{\varphi(u)}{\psi(u)}\right)$ являються функціями обмеженої варіації.

Доведення.

І. Умова теореми необхідна: справді, нехай S квадрувальна за Лебегом і нехай (S) означає її міру (площу). Задамо число $\varepsilon>0$ як завгодно мале і проведемо на поверхні S лінію Γ_ε.

$$\begin{aligned} x&=\varphi(u)\cdot(1-\varepsilon),\\ y&=\psi(u)\cdot(1-\varepsilon),\\ z&=\chi(u)\cdot(1-\varepsilon). \end{aligned}$$

Задамо достатньо мале число $\delta>0$, степінь малості якого буде вказано нижче. Розіб'ємо інтервал (α, β) на частини значеннями $u_0=\alpha$, u_1, u_2 .... u_{n-1}, $u_n=\beta$ так, щоб $u_k-u_{k-1}<\delta$ $(k=1, 2, 3\ldots\ldots n)$.

Розглянемо трикутник з вершинами: $[0, 0, 0]$,

$$[\,(1-\varepsilon)\,\varphi(u_{k-1}),\ (1-\varepsilon)\,\psi(u_{k-1}),\ (1-\varepsilon)\,\chi(u_{k-1})\,],$$

$$[\,(1-\varepsilon)\,\varphi(u_k),\ (1-\varepsilon)\,\psi(u_k),\ (1-\varepsilon)\,\chi(u_k)\,].$$

Позначимо цей трикутник коротко через $\overline{S}_k(\varepsilon)$, а його площу через $|\overline{S}_k(\varepsilon)|$.

Твірні конуса $u=u_k$ $(k=1, 2\ldots, n)$ розбивають конус на n частин S_1 $S_2 \ldots S_n$. Виберемо тепер δ таким малим, щоб проекція S_k на площину xoy покрила б проекцію $\overline{S}_k(\varepsilon)$ на цю ж площину, що можливо, поскільки жодна з твірних конуса не паралельна осям координат.

Тоді очевидно, що $|np_{xoy} S_k| \geqslant |np_{xoy} \overline{S}_k(\varepsilon)|$. (1)

Але за лемою III $|S_k| \geqslant |np_{xoy} S_k|$. (2)

На підставі (1) і (2) виводимо, що

$$|S_k| \geqslant |np_{xoy} \overline{S}_k(\varepsilon)|. \tag{3}$$

$$\text{Але } |np_{xoy} \overline{S}_k(\varepsilon)| = \frac{1}{2}(1-\varepsilon)^2 . |\varphi(u_k)\psi(u_{k-1}) - \varphi(u_{k-1})\psi(u_k)|. \tag{4}$$

Тоді на підставі (3) і (4) ми виводимо, що

$$|S_k| \geqslant \frac{1}{2}(1-\varepsilon)^2 |\varphi(u_k)\psi(u_{k-1}) - \varphi(u_{k-1})\psi(u_k)|. \tag{5}$$

Сумуючи (5) для $(k=1, 2\ldots, n)$, дістанемо

$$|S| \geqslant \frac{1}{2}(1-\varepsilon)^2 \sum_{k=1}^{k=n} |\varphi(u_k)\psi(u_{k-1}) - \varphi(u_{k-1})\psi(u_k)| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2}(1-\varepsilon)^2 \frac{1}{m^2} \sum_{1}^{n} \left| \frac{\varphi(u_k)}{\psi(u_k)} - \frac{\varphi(u_{k-1})}{\psi(u_{k-1})} \right|. \tag{6}$$

Звідси виводимо, що

$$\sum_{1}^{n} \left| \frac{\varphi(u_k)}{\psi(u_k)} - \frac{\varphi(u_{k-1})}{\psi(u_{k-1})} \right| \leqslant \frac{2(S)}{(1-\varepsilon)^2 m^2}. \tag{7}$$

Звідси випливає, що оскільки вибір значень u_1 $u_2 \ldots u_n$ довільний (або $u_k - u_{k-1} < \delta$), то значить функція $\frac{\varphi(u)}{\psi(u)}$ є функцією обмеженої варіації.

II. Умова теореми достатня.

Нехай $\frac{\varphi(u)}{\psi(u)}$, $\frac{\psi(u)}{\chi(u)}$ и $\frac{\chi(u)}{\varphi(u)}$ — функції обмеженої варіації.

Нехай M — верхня межа для функцій $\varphi(u)$, $\psi(u)$, $\chi(u)$.

Візьмемо трикутники $S_k(\varepsilon)$ $(k=1, 2\ldots n)$ і позначимо

$$\varphi(u_k) = x_k, \ \psi(u_k) = y_k, \ \chi(u_k) = z_k.$$

Маємо $\left|\overline{S}_k(0)\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(y_k z_{k-1} - y_{k-1} z_k)^2 + (z_k x_{k-1} - z_{k-1} x_k)^2 +}$

$$+ (x_k y_{k-1} - x_{k-1} y_k)^2 \leqslant \frac{1}{2}\left| y_k z_{k-1} - y_{k-1} z_k \right| + \frac{1}{2}\left| z_k x_{k-1} - z_{k-1} x_k \right| +$$

$$+ \frac{1}{2}\left| x_k y_{k-1} - x_{k-1} y_k \right| \leqslant \frac{1}{2} y_k y_{k-1} \left| \frac{z_k}{y_k} - \frac{z_{k-1}}{y_{k-1}} \right| +$$

$$+ \frac{1}{2} z_k z_{k-1} \left| \frac{x_k}{z_k} - \frac{x_{k-1}}{z_{k-1}} \right| + \frac{1}{2} x_k x_{k-1} \left| \frac{y_k}{x_k} - \frac{y_{k-1}}{x_{k-1}} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M^2}{2}\left\{ \left| \frac{z_k}{y_k} - \frac{z_{k-1}}{y_{k-1}} \right| + \left| \frac{x_k}{z_k} - \frac{x_{k-1}}{z_{k-1}} \right| + \left| \frac{y_k}{x_k} - \frac{y_{k-1}}{x_{k-1}} \right| \right\}. \quad (8)$$

Сумуємо (8) для ($k = 1, 2 \ldots, n$), дістанемо

$$\sum_1^n \left| \overline{S}_k(0) \right| \leqslant \frac{M^2}{2}\left\{ \sum_1^n \left| \frac{z_k}{y_k} - \frac{z_{k-1}}{y_{k-1}} \right| + \sum_1^n \left| \frac{x_k}{z_k} - \frac{x_{k-1}}{z_{k-1}} \right| + \right.$$

$$\left. + \sum_1^n \left| \frac{y_k}{x_k} - \frac{y_{k-1}}{x_{k-1}} \right| \right\}. \quad (9)$$

Звідси бачимо, що поліедри, утворені з трикутників $\overline{S}_k(0)$, залишаються на площі обмеженими при довільному виборі точок ділення $u = u_k$ ($k = 1, 2 \ldots, n$), поскільки права частина (9) залишається обмеженою, і назвемо цей поліедр „веєром".

Якщо ми дамо послідовність значень $\delta_1 > \delta_2 > \delta_3 \ldots \ldots \to 0$, то дістанемо послідовність „веєрів", яка апроксимує поверхню, а тому згідно з означенням і нижній край площ цих є величина $\geqslant (S)$, але тому, що цей нижній край (lim), що випливає з (9), буде обмежений, то значить і (S) обмежено. Значить, поверхня (S) квадрувальна в сенсі Лебега. Доведену теорему можна сформувати інакше, а саме:

Теорема II. Необхідна і достатня умова квадрувальності поверхні (S) полягає в тому, що будь-який плоский переріз (S), який не проходить через вершину, дає криву, що може бути спрямлена.

Доведення: Переріжемо поверхню (S) площиною

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (10)$$

Вставляючи в (10) замість x, y і z їх значення з рівняння поверхні (S), дістанемо:

$$A\varphi(u)\, v + B\Psi(u)\, v + C\chi(u)\, v + D = 0,$$

звідки

$$v = -\frac{D}{A\varphi(u) + B\psi(u) + C\chi(u)}.$$

Значить, рівняння лінії перерізу будуть

$$\left.\begin{aligned} x &= -\frac{D\varphi(u)}{A\varphi(u)+B\psi(u)+C\chi(u)}, \\ y &= -\frac{D\psi(u)}{A\varphi(u)+B\psi(u)+C\chi(u)}, \\ z &= -\frac{D\chi(u)}{A\varphi(u)+B\psi(u)+C\chi(u)}. \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Якщо (3) квадрувальна, то на підставі теореми I відношення $\frac{\varphi(u)}{\chi(u)}$, $\frac{\psi(u)}{\chi(u)}$, $\frac{\chi(u)}{\varphi(u)}$ — функції обмеженої варіації. Звідки випливає, що і вирази (II) також функції обмеженої варіації, а тоді виходить, що крива Γ буде випрямленою.

Припустимо навпаки, що (Γ) може бути випрямлена. Тоді вирази (II) будуть функціями обмеженої варіації, а тому і їх відношення також (оскільки вони не обертаються в 0). А це будуть якраз $\frac{\varphi}{\psi}$, $\frac{\psi}{\chi}$ і $\frac{\chi}{\varphi}$. Значить, на підставі теореми I поверхня S квадрувальна.

§ 3. ОБЧИСЛЕННЯ ПЛОЩІ КОНІЧНОЇ ПОВЕРХНІ

Візьмемо знову поверхню S (§ 2) і поставимо питання про обчислення її площі в випадку, коли вона квадрувальна. Ми доведемо таку теорему:

Теорема III. Площа поверхні S дорівнює границі площі її „веера" наближення, коли $n \to \infty$ і $\delta \to 0$ (див. § 2).

Доведення: Зберігаємо значення і побудови теореми I. Згідно з означенням I витікає: δ можна вважати настільки малим, що $\left|\sum_{1}^{n} \overline{S}_k(0)\right| \geqslant |S| - \varepsilon'$, де ε' наперед задане яке завгодно мале число.

Вважаємо δ настільки малим, щоб проекції S_k на відповідні площини трикутників $\overline{S}_k(\varepsilon)$ покривали цілком ці трикутники.

Тоді за лемою III

$$|S_k| \geqslant |\bar{S}_k(\varepsilon)| = (1-\varepsilon)^2 \bar{S}_k(0). \tag{13}$$

Сумуючи (13) для ($k=1, 2, 3\ldots, n$), дістанемо:

$$|S| \geqslant (1-\varepsilon)^2 \left|\sum_1^n S_k(0)\right|,$$

звідки

$$\left|\sum_1^n S_k(0)\right| \leqslant \frac{(S)}{1-\varepsilon}. \tag{14}$$

Порівнюючи (12) і (14), знаходимо:

$$|S| - \varepsilon' \leqslant \left|\sum_1^n \bar{S}_k(0)\right| \leqslant \frac{(S)}{(1-\varepsilon)^2}, \tag{15}$$

звідки

$$|S| - \varepsilon' \leqslant \lim_{\substack{n \to \infty \\ \delta \to 0}} \left|\sum_1^n \bar{S}(0)\right| \leqslant \frac{|S|}{(1-\varepsilon)^2}. \tag{16}$$

Але тому, що ε і ε' довільно малі, ми робимо висновок, що

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ \delta \to 0}} \left|\sum_1^n \bar{S}_k(0)\right| = |S|, \tag{17}$$

що й треба було довести.

Після цього ми можемо приступити до обчислення границі площі „веєра".

Для цього ми доведемо слідуючу лему:

Нехай $\Phi(\lambda, \mu)$ означає частину поверхні S, замкнену між твірними $u=\lambda$ і $u=\mu$.

Нехай $F_\varrho(\lambda, \mu)$ означає площу трикутника з вершинами

$$(0, 0, 0), \ [(1-\varrho)\varphi(\lambda), (1-\varrho)\psi(\lambda), (1-\varrho)\chi(\lambda)],$$
$$[(1-\varrho)\varphi(\mu), (1-\varrho)\psi(\mu), (1-\varrho)\chi(\mu)].$$

Якщо $\varrho=0$, ми будемо писати просто $F(\lambda, \mu)$.

Нехай $\lambda = u - \delta_1$ і $\mu = u + \delta_2$.

Тоді очевидно, що

$$\lim_{\substack{\delta_1 \to 0 \\ \delta_2 \to 0}} \frac{\Phi(u-\delta_1, u+\delta_2)}{\delta_1 + \delta_2} = \Phi'_u(\alpha, u) \tag{18}$$

там, де $\Phi'_u(\alpha, u)$ існує.

Лема IV. $\Phi'_u(\alpha, u)$ існує для майже всіх значень u і збігається з $\lim\limits_{\substack{\delta_1 \to 0 \\ \delta_2 \to 0}} \frac{F(u-\delta_1,\ u+\delta_2)}{\delta_1+\delta_2}$, який існує також майже всюди на $(\alpha \leqslant u \leqslant \beta)$.

Доведення. Перш за все доведемо існування границі

$$\lim_{\substack{\delta_1 \to 0 \\ \delta_2 \to 0}} \frac{F(u-\delta_1,\ u+\delta_2)}{\delta_1+\delta_2}.$$

Для скорочення запису повернемось до попередніх означень і припустимо: $\Theta(\mu) - \Theta(\lambda) = \Delta\Theta$.

Дістанемо тоді

$$F(\lambda,\mu) = \frac{1}{2}\sqrt{[\psi(\mu)\chi(\lambda) - \psi(\lambda)\chi(\mu)]^2 + [\chi(\mu)\varphi(\lambda) - \chi(\lambda)\varphi(\mu)]^2 + + [\varphi(\mu)\psi(\lambda) - \varphi(\lambda)\psi(\mu)]^2}. \tag{19}$$

Перетворимо кожну квадратову дужку

$$[\psi(\mu)\chi(\lambda) - \varphi(\lambda)\chi(\mu)]^2 = \chi^2(\lambda)\chi^2(\mu)\left[\frac{\psi(\mu)}{\chi(\mu)} - \frac{\psi(\lambda)}{\chi(\lambda)}\right]^2 =$$

$$= \chi^2(\lambda)\chi^2(\mu)\left[\Delta\left(\frac{\psi}{\chi}\right)\right]^2.$$

Його можна перетворити й так:

$$\psi^2(\lambda)\varphi^2(\mu)\left[\Delta\left(\frac{\chi}{\psi}\right)\right]^2.$$

Аналогічно перетворюємо останні дві дужки і тоді вся підкоренева кількість прийме такий вигляд:

$$\frac{1}{2}\varphi^2(\lambda)\varphi^2(\mu)\left\{\left[\Delta\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)\right]^2 + \left[\Delta\left(\frac{\chi}{\varphi}\right)\right]^2\right\} + \frac{1}{2}\psi^2(\lambda)\psi^2(\mu)\left\{\left[\Delta\left(\frac{\chi}{\psi}\right)\right]^2 + \right.$$

$$\left. + \left[\Delta\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)\right]^2\right\} + \frac{1}{2}\chi^2(\lambda)\chi^2(\mu)\left\{\left[\Delta\left(\frac{\varphi}{\chi}\right)\right]^2 + \left[\Delta\left(\frac{\psi}{\chi}\right)\right]^2\right\}.$$

Беручи корінь і розділяючи на $\mu - \lambda$, а потім, переходячи до границі при $\lambda \to u$ і $\mu \to u$, або, що те ж саме, при $\delta_1 \to 0$ і $\delta_2 \to 0$, дістанемо:

$$\lim_{\substack{\delta_1 \to 0 \\ \delta_2 \to 0}} \frac{F(u-\delta_1,\ u+\delta_2)}{\delta_1+\delta_2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{\varphi^4\left\{\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)'^2+\left(\frac{\chi}{\varphi}\right)'^2\right\}+ \overline{+\,\psi^4\left\{\left(\frac{\chi}{\psi}\right)'^2+\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)'^2\right\}+\chi^4\left\{\left(\frac{\varphi}{\chi}\right)'^2+\left(\frac{\psi}{\chi}\right)'^2\right\}}}. \tag{20}$$

І це буде мати місце для майже кожного значення u, поскільки відношення $\frac{\psi}{\varphi}$, $\frac{\chi}{\varphi}, \ldots, \frac{\psi}{\chi}$ функції обмеженої варіації, а тому мають майже всюди похідні. Існування границі доведене. Позначимо його корінь через $l(u)$. Переходимо до дальшого.

Нехай E_N — множина значень u на (α, β), які мають ту властивість, що, коли замкнемо якусь точку E_N у відрізок (λ, μ) такий, що $\mu - \lambda < \frac{\beta-\alpha}{N}$, то

$$\left|\frac{\Phi(\lambda, \mu) - F(\lambda, \mu)}{\mu - \lambda}\right| > \frac{1}{N}. \tag{21}$$

Візьмемо множину $E = \sum_{1}^{\infty} E_N$. (22)

Це очевидно множина точок, де $\Phi'_u(\alpha, u) \neq l(u)$.

Розіб'ємо (α, β) на інтервали (u_{k-1}, u_k) $(k=1, 2 \ldots . n)$ так, що довжина кожного $< \frac{1}{N}$ і крім того ще такими малими, щоб за вищевзятими позначеннями ми мали б (в силу леми III):

$$F_\varrho(u_{k-1}, u_k) \leqslant \Phi(u_{k-1}, u_k), \tag{23}$$

де ϱ — наперед фіксоване яке завгодно мале число (> 0), а також, щоб

$$-\frac{\varepsilon}{N} < \Phi(\alpha, \beta) - \sum_{1}^{n} F(u_{k-1}, u_k) < +\frac{\varepsilon}{N}. \tag{24}$$

Множачи останню нерівність на $(1-\varrho)^2$, ми дістанемо

$$-\frac{\varepsilon}{N}(1-\varrho)^2 < \Phi(\alpha, \beta)\,(1-\varrho)^2 - \sum_{1}^{n} F_\varrho(u_{k-1}, u_k) < +\frac{\varepsilon}{N}(1-\varrho)^2,$$

звідки $$-\frac{\varepsilon}{N}(1-\varrho)^2 < \Phi(\alpha,\beta) - \sum_1^n F_\varrho(u_{k-1}, u_k) +$$
$$+(\varrho^2 - 2\varrho)\,\Phi(\alpha,\beta) < +\frac{\varepsilon}{N}(1-\varrho)^2,$$

або інакше

$$-\frac{\varepsilon}{N}(1-\varrho)^2 + \varrho(2-\varrho)\,\Phi(\alpha,\beta) < \Phi(\alpha,\beta) - \sum_1^n F_\varrho(u_{k-1}, u_k) <$$
$$< +\frac{\varepsilon}{N}(1-\varrho)^2 + \varrho(2-\varrho)\,\Phi(\alpha,\beta). \tag{25}$$

В силу (23) видно, що середній член останнього співвідношення — величина невід'ємна, а тому ми можемо залишати тільки середній і правий члени, переписавши (25) в такому вигляді:

$$\sum_1^n [\,\Phi(u_{k-1}, u_k) - F_\varrho(u_{k-1}, u_k)\,] < \frac{\varepsilon}{N}(1-\varrho)^2 + \varrho(2-\varrho)\Phi(\alpha,\beta). \tag{26}$$

Залишимо тільки ті члени, які відносяться до інтервалів (u_{k-1}, u_k), що покривають точки множини E_N.

Відповідну суму позначимо через $\sum\limits_{(E_N)}$.

Ми дістанемо, очевидно, в силу (21) і вибору інтервалів (u_{k-1}, u_k), також беручи до уваги (26), що

$$|E_N| \leqslant \sum_{(E_N)} (u_k - u_{k-1}) < \sum_{(E_N)} |\,\Phi(u_{k-1}, u_k) - F(u_{k-1}, u_k)\,| \leqslant$$
$$\leqslant N\sum_1^n \left|\,\Phi(u_{k-1}, u_k) - F(u_{k-1}, u_k)\right| \leqslant \frac{N}{(1-\varrho)^2}\left\{\sum_1^n \left|\,\Phi(u_{k-1}, u_k) -\right.\right.$$
$$\left.\left. - F_\varrho(u_{k-1}, u_k)\,\right| + \varrho(2-\varrho)\Phi(\alpha,\beta)\right\} \leqslant \frac{N}{(1-\varrho)^2}\left\{\frac{\varepsilon}{N}(1-\varrho)^2 +\right.$$
$$\left. + 2\varrho(2-\varrho)\,\Phi(\alpha,\beta)\right\} = \varepsilon + \frac{2\varrho(2-\varrho)}{(1-\varrho)^2}\,N\Phi(\alpha,\ \beta).$$

Число ϱ було вибране нами наперед і незалежно від числа N. Тому вираз $\frac{2\varrho(2-\varrho)}{(1-\varrho)^2}\,N\cdot\Phi(\alpha,\beta)$ довільно малий разом з ϱ.

Звідси випливає висновок, що $|E_N|=0$, значить

$$|E|=\sum_1^{\infty}|E_N|=0.$$

Поза E ми маємо

$$\Phi'_u(\alpha,\ u)=l(u), \tag{27}$$

що й треба було довести.

В силу загальних властивостей функцій обмеженої варіації і того факту, що $\Phi(\alpha,\ u)$ не спадаюча функція u, виникає очевидно, що $\Phi(\alpha,\beta)\geqslant\int_\alpha^\beta l(u)\,du$. Рівність очевидно можлива, якщо $\Phi(\alpha,u)$ — абсолютно неперервна функція u.

Теорема IV. Якщо відношення $\frac{\varphi}{\chi}$ і $\frac{\psi}{\chi}$ абсолютно неперервні функції u, то $\Phi(\alpha,\beta)=\int_\alpha^\beta l(u)\,du$ і навпаки.

Для цього очевидно досить довести, що $\Phi(\alpha,\ u)$ абсолютно неперервна функція u. Зберігаючи попередні позначення, ми маємо:

$$\left.\begin{array}{l}\left|\Delta\left(\dfrac{\chi}{\varphi}\right)\right|\\[2mm] \left|\Delta\left(\dfrac{\varphi}{\chi}\right)\right|\\[2mm] \left|\Delta\left(\dfrac{\psi}{\chi}\right)\right|\end{array}\right\}\leqslant\frac{2\sqrt{2}}{m^2}\cdot F(\lambda,\ \mu) \tag{28}$$

і
$$F(\lambda,\mu)\leqslant\frac{M^2}{2\sqrt{2}}\left\{\left|\Delta\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)\right|+\left|\Delta\left(\frac{\chi}{\varphi}\right)\right|+\left|\Delta\left(\frac{\chi}{\psi}\right)\right|+\right.$$
$$\left.+\left|\Delta\left(\frac{\chi}{\psi}\right)\right|+\left|\Delta\left(\frac{\varphi}{\chi}\right)\right|+\left|\Delta\left(\frac{\psi}{\chi}\right)\right|\right\}. \tag{29}$$

Сумуючи (28) і (29) по системі інтервалів, $(\lambda,\ \mu)$, загальна довжина яких достатньо мала, можемо добитись того (тому що $\frac{\varphi}{\chi}$ і $\frac{\psi}{\chi}$, а значить і інші відношення функцій абсолютно неперервні функції u), що $\sum\limits_{(\lambda\mu)}F(\lambda,\ \mu)$ буде величиною якою завгодно малою, як видно з (29).

Обернене виходить з (28), але $\sum\limits_{(\lambda\mu)}F(\lambda,\ \mu)$ яке завгодно мале відрізняється від $\sum\limits_{(\lambda\mu)}{}'\Phi(\lambda,\ \mu)$, якщо крім всього інтервали (λ, μ) будуть обрані якими завгодно малими. Значить і $\sum\limits_{(\lambda\mu)} \Phi(\lambda, \mu)$ — величина яка завгодно мала разом з $\sum\limits_{(\lambda\mu)} \left| \Delta\left(\frac{\varphi}{\chi}\right) \right|, \sum\limits_{(\lambda\mu)} \left| \Delta\left(\frac{\psi}{\chi}\right) \right|$.

Це означає, що $\Phi(\alpha, u)$ є функція абсолютно неперервна, що й треба було довести.

Якщо ми не припускаємо абсолютної неперервності відношень функцій φ, ψ і χ, то ми можемо говорити про площу поверхні, яка виражається інтегралом (границею суми) типу Стільтьеса, який ми запишемо так:

$$S(\alpha, \beta) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi^4 \left\{ \left[d\left(\frac{\psi}{\varphi}\right) \right]^2 + \left[d\left(\frac{\chi}{\varphi}\right) \right]^2 \right\} + \psi^4 \left\{ \left[d\left(\frac{\chi}{\psi}\right) \right]^2 + \left[d\left(\frac{\varphi}{\psi}\right) \right]^2 \right\} + \chi^4 \left\{ \left[d\left(\frac{\varphi}{\chi}\right) \right]^2 + \left[d\left(\frac{\psi}{\chi}\right) \right]^2 \right\}}. \tag{30}$$

§ 4. ЦИЛІНДРИЧНА ПОВЕРХНЯ І ОБЧИСЛЕННЯ ЇЇ ПЛОЩІ

Нехай дана циліндрична поверхня

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(u), \\ y &= \psi(u), \\ z &= v \cdot \chi(u), \end{aligned}\right\} (s) \qquad \begin{aligned} &(\alpha \leqslant u \leqslant \beta), \\ &(0 \leqslant v \leqslant 1), \\ &\varphi, \psi \text{ і } \chi \text{ — неперервні } (\chi > 0). \end{aligned}$$

Крива (Γ): $x = \varphi(u)$, $y = \psi(u)$, $z = \chi(u)$ не має подвійних точок.

Побудуємо слідуючу криву Γ_ε:

$$x = \varphi(u), \quad y = \psi(u), \quad z = (1 - \varepsilon)\chi(u).$$

Розіб'ємо інтервал $(\alpha \leqslant u \leqslant \beta)$ на n частин значеннями $u_0 = \alpha$, u_1, u_2, $\ldots$, u_{n-1}, $u_n = \beta$. Ці інтервали ділення виберемо так, щоб ламана, утворена послідовними сполученнями точок $[\varphi(u_k), \psi(u_k), (1 - \varepsilon) \cdot \chi(u_k)]$, $(k = 1, 2, 3 \ldots n)$, мала проекціями на площини xoz і yoz лінії, що цілком покриваються відповідними проекціями S на ті ж площини.

Припустимо $x_k = \varphi(u_k)$, $y_k = \psi(u_k)$, $z_k = \chi(u_k)$.

Побудуємо трапеції, вершинами яких будуть:

$$M_{k-1}(x_{k-1}, y_{k-1}, 0), \quad M_k(x_k, y_k, 0), \quad N_{k-1}(x_{k-1}, y_{k-1}, z_{k-1}),$$
$$N_k(x_k, y_k, z_k) \qquad (k = 1, 2 \ldots n)$$

і інші трапеції з вершинами:

M_{k-1}, N_k, P_{k-1} $(x_{k-1}, y_{k-1}, z_{k-1}(1-\varepsilon))$, P_k $(x_k, y_k, z_k(1-\varepsilon))$.

Площі їхніх проекцій на yoz відповідно дорівнюють

$$\frac{(z_{k-1}+z_k)\,|y_k-y_{k-1}|}{2};\ \frac{(1-\varepsilon)\,(z_{k-1}+z_k)\,|y_k-y_{k-1}|}{2}.$$

Твірні $u=u_k$ $(k=1,2,3\ldots,n)$ розбивають S на n частин.

Позначимо через S_k k^{w} частину.

Тому, що проекція S_k на площину yoz повністю покриває проекцію трапеції $M_{k-1}\,M_k\,P_{k-1}\,P_k$, то за лемою III

$$|S_k| \geqslant \frac{(1-\varepsilon)}{2}(z_{k-1}+z_k)\ |y_k-y_{k-1}|,$$

звідки $$|y_k-y_{k-1}| \leqslant \frac{2}{1-\varepsilon}\cdot\frac{|S_k|}{z_{k-1}+z_k}.$$

Оскільки $x>0$, то x має нижню межу $m>0$, а тому з останнього співвідношення витікає, що:

$$|y_k-y_{k-1}| \leqslant \frac{|S_k|}{(1-\varepsilon)\,m} \qquad (k=1,2\ldots n). \qquad (31)$$

Сумуючи (31) по індексу k, дістанемо:

$$\sum_{k=1}^{n}|y_k-y_{k-1}| \leqslant \frac{|S|}{(1-\varepsilon)\,m}$$

або $$\sum_{1}^{n}|\psi(u_k)-\psi(u_{k-1})| \leqslant \frac{|S|}{(1-\varepsilon)\cdot m}. \qquad (32)$$

Звідси видно, що $\psi(u)$ є функцією обмеженої варіації.

Розглянемо поверхню, утворену трапеціями $M_{k-1}\,M_k\,P_{k-1}\,P_k$, а потім трапеціями $M_{k-1}\,M_k\,N_{k-1}\,N_k$.

Позначимо трапеції $M_{k-1}\,M_k\,P_{k-1}\,P_k$ через $\bar{S}_k(\varepsilon)$, тоді трапеція $M_{k-1}\,M_k\,N_{k-1}\,N_k$ буде позначатися через $\bar{S}_k(0)$, (бо для неї $\varepsilon=0$). Задамо довільно мале число $\varepsilon'>0$.

За означенням I очевидно, що при n досить великому і інтервалах (u_{k-1}, u_k) достатньо малих

$$\left|\sum_{1}^{n}\bar{S}_k(0)\right| \geqslant |S|-\varepsilon. \qquad (33)$$

З другого боку, за лемою III виникає, що

$$|S_k| \geqslant |\bar{S}_k(\varepsilon)| = (1-\varepsilon)^2\,|\bar{S}_k(0)|. \qquad (34)$$

Сумуючи (34) за індексом $k\,(k=1, 2, 3 \ldots . n)$, дістанемо:

$$|S| \geqslant (1-\varepsilon)^2 \cdot \left| \sum_1^n \overline{S}_k(0) \right|, \tag{35}$$

звідки

$$\left| \sum_1^n \overline{S}_k(0) \right| \leqslant \frac{|S|}{(1-\varepsilon)^2}. \tag{36}$$

Порівнюючи (33) і (36), ми бачимо, в зв'язку з довільністю ε, що $\sum\limits_1^n \overline{S}_k(0)$ служить поліедром наближення для S в сенсі Лебега (див. опреділення 1).

Тепер легко бачити, що умови, щоб $\varphi(u)$ і $\psi(u)$ були функціями обмеженої варіації, являються достатніми для квадрувальності поверхні S. Дійсно, $\left|\sum\limits_1^n \overline{S}_k(0)\right|$ залишається величиною обмеженою, тому що

$$|\overline{S}_k(0)| = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2} \cdot \frac{z_{k-1} + z_k}{2}, \tag{37}$$

звідки видно

$$|\overline{S}_k(0)| \leqslant M\{|x_k - x_{k-1}| + |y_k - y_{k-1}|\}, \tag{38}$$

де M є максимум $x(u)$.

Сумуючи (38), дістанемо:

$$\left|\sum_1^n \overline{S}_k(0)\right| \leqslant M\{\sum_1^n |\varphi(u_k) - \varphi(u_{k-1})| + \sum_1^n |\psi(u_k) - \psi(u_{k-1})|\}, \tag{39}$$

звідки і виникає наше твердження. З формул (37) випливає, що для $|S|$ ми маємо формулу в вигляді інтеграла типу Стільтьєса

$$|S| = \int_\alpha^\beta \chi(u) \sqrt{[d\varphi(u)]^2 + [d\psi(u)]^2}. \tag{40}$$

Зокрема, якщо $\varphi(u)$ і $\psi(u)$ абсолютно неперервні, можна легко показати, що

$$|S| = \int_\alpha^\beta \chi(u) \sqrt{[\varphi'(u)]^2 + [\psi'(u)]^2}\, du. \tag{41}$$

Таким чином доведена слідуюча теорема:

Теорема V. Необхідна і достатня умова, щоб циліндрична поверхня S була квадрувальною, полягає в тому, що функції $\varphi(u)$ і $\psi(u)$ обмеженої варіації, або, що те саме, плоский поперечний переріз циліндричної поверхні є випрямлена крива. В випадку квадрувальності площа S виражається формулою (40) або в окремому випадку формулою (41).

§ 5. ПОВЕРХНЯ, УТВОРЕНА ОБЕРТАННЯМ КРИВОЇ ЗІ СКОВЗАННЯМ

Розглянемо поверхню, виражену рівнянням:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(u)\,\mathrm{Cos}\,v,\\ y &= \varphi(u)\,\mathrm{Sin}\,v,\\ z &= \psi(u) + f(v), \end{aligned}\right\}\ (S)\quad \begin{aligned} &(\alpha \leqslant u \leqslant \beta)\ f(v) \text{ — немаліюча функція,}\\ &(o \leqslant v \leqslant \pi)\ \varphi(u) \text{ і } \chi(u) \text{ — неперервні.}\end{aligned}$$

$\varphi(u) > o$ і крива (Γ) $x = \varphi(u)$ $y = o$ $z = \chi(u)$ не має подвійних точок.

Теорема VI. Необхідна і достатня умова квадрувальності поверхні (S) полягає в тому, щоб крива (Γ) була випрямлена.

Доведення.

1) Умови теореми необхідні.

Розіб'ємо інтервал (α, β) на частини значеннями $u_0 = \alpha$, $u_1, u_2, \ldots u_{n-1}$, $u_n = \beta$. Криві $u = u_k$ $(k = 1, 2 \ldots n)$ розіб'ють поверхню на n пасів, які позначимо через $S_1, S_2 \ldots S_n$.

Так що $S = \sum\limits_{k=1}^{r=n} S_k$, звідки $|S| = \sum\limits_{k=1}^{n} |S_k|$

$|S|$ має скінчену величину, а значить і кожна з S_k також.

Спроектуємо S_k на площину xoy. Це буде півкільце між колами радіусів $\varphi(u_{k-1})$ і $\varphi(u_k)$, тому площа проекції не менша, як $\frac{\pi}{2} \left| \varphi^2(u_k) - \varphi^2(u_{k-1}) \right|$. А тоді за лемою II ми маємо

$$|S_k| \geqslant \frac{\pi}{2} \left| \varphi^2(u_k) - \varphi^2(u_{k-1}) \right|. \tag{42}$$

Сумуючи (42) за k, дістанемо:

$$|S| \geqslant \frac{\pi}{2} \sum_1^n \left| \varphi^2(u_k) - \varphi^2(u_{k-1}) \right| = \frac{\pi}{2} \sum_1^n \left| \varphi(u_k) - \varphi(u_{k-1}) \right| \cdot$$

$$\cdot \left| \varphi(u_k) + \varphi(_{k-1}) \right| \geqslant \frac{\pi}{2} \cdot 2m \sum_1^n \left| \varphi(u_k) - \varphi(u_{k-1}) \right|,$$ де m позначає нижню межу $\varphi(u)$.

Тоді $$\sum_{1}^{n} \left| \varphi(u_k) - \varphi(u_{k-1}) \right| \leqslant \frac{1}{m\pi} |S|. \tag{43}$$

З (43) видно, що $\varphi(u)$ є функцією обмеженої варіації.

Спроектуємо тепер S_k на площину xoz. В проекції ми дістанемо пас, обмежений такими кривими Γ_1 і Γ_2:

$$\Gamma_1 \begin{cases} x = \varphi(u_{k-1}) \operatorname{Cos} v, \\ z = \psi(u_{k-1}) + f(v); \end{cases} \qquad \Gamma_2 \begin{cases} x = \varphi(u_k) \operatorname{Cos} v, \\ z = \psi(u_k) + f(v); \end{cases}$$

(ці криві очевидно не перетинаються) і прямими $v = o$, $v = \pi$ (в площині xoz). Площа вказаного пасу має такий вираз:

$$\left| \int_o^\pi [\psi(u_k) + f(v)]\, d(\varphi(u_k) \cdot \operatorname{Cos} v) - \int_o^\pi [\psi(u_{k-1}) + f(v)]\, d(\varphi(u_{k-1}) \cdot \operatorname{Cos} v) \right| = \Big| [\psi(u_k)\varphi(u_k) - \psi(u_{k-1})\, \varphi(u_{k-1})] \int_o^\pi \operatorname{Sin} v\, dv +$$

$$+ [\varphi(u_k) - \varphi(u_{k-1})] \int_o^\pi f(v) \cdot \operatorname{Sin} v\, dv \Big| = \big| [2\psi(u_k) + A]\, \varphi(u_k) - [2\varphi(u_{k-1}) + A]\, \varphi(u_{k-1}) \big|,$$

де $$A = \int_o^\pi f(v) \operatorname{Sin} v\, dv.$$

За лемою III ми робимо висновок, що

$$|S_k| \geqslant \big| [2\psi(u_k) + A]\, \varphi(u_k) - [2\psi(u_{k-1}) + A]\, \varphi(u_{k-1}) \big|. \tag{44}$$

Сумуючи (44) за k, дістанемо:

$$|S| \geqslant \sum_{k=1}^{n} \big| [2\psi(u_k) + A]\, \varphi(u_k) - [2\psi(u_{k-1}) + A]\, \varphi(u_{k-1}) \big|. \tag{45}$$

Звідси випливає, що $[2\psi(u) + A]\, \varphi(u)$ є функцією обмеженої варіації. І тому, що $\varphi(u) \geqslant m$, то $2\psi(u) + A$, а значить $\psi(u)$ є також функціями обмеженої варіації.

Значить Г випрямлена. Необхідність умов доведена.

2) Умови теореми достатні.

Нехай Г випрямлена. Тоді $\varphi(u)$ і $\psi(u)$ функції обмеженої варіації. Тоді, як відомо, можна зробити таке гомеоморфне перетворення параметру u в новий, що функції $\varphi(u)$ і $\psi(u)$

будуть задовольняти умові Ліпшица. А тоді наша поверхня буде ректифікованою, а значить квадрувальною і її площа буде дана класичною формулою в вигляді подвійного інтеграла. Відмітимо, що можна було б йти прямим шляхом побудови поліедру наближення без застосування загальної теорії поверхонь. Зокрема, якщо $f(v)=o$, ми маємо поверхню обертання і відомий результат I. Favard'a.

§ 6. ПОВЕРХНЯ ТРАНСЛЯЦІЇ (ОКРЕМИЙ ВИД)

Розглянемо поверхню, дану рівняннями

$$\left.\begin{aligned} x&=\varphi(u),\\ y&=\psi(u),\\ z&=f_1(u)+f_2(v) \end{aligned}\right\} (S) \qquad \left\{\begin{aligned} \alpha\leqslant u\leqslant\beta\\ a\leqslant v\leqslant b \end{aligned}\right\},$$

де $\varphi(u)$, $\psi(v)$, $f_1(u)$, $f_2(v)$ — неперервні функції відповідних змінних.

Теорема VII. Необхідна і достатня умова квадрувальності поверхні (S) в сенсі Лебега полягає в тому, що функції $\varphi(u)$, $\psi(v)$, $f_1(u)$, $f_2(v)$ будуть функціями обмеженої варіації відповідних змінних.

Доведення.

1) Умови теореми необхідні.

Розіб'ємо інтервали (α, β) і (a, b) на частини значеннями $u_0=\alpha$, u_1, $u_2, \ldots, u_{n-1}$, $u_n=\beta$, $v_0=a$, v_1, $v_2 \ldots, v_{n-1}$, $v_n=b$.

Значення $u=u_k$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ розбивають поверхню на ряд пасів, проекції яких на площину xoy будуть обмежені прямими, паралельними осі oy. Позначимо ці паси через $S_1, \ldots S_n$.

Проекція S_k на площину xoy буде не менша, ніж

$$|\varphi(u_k)-\varphi(u_{k-1})|\cdot(b-a).$$

Звідси за лемою III ми дістанемо, що

$$|S_k|\geqslant|\varphi(u_k)-\varphi(u_{k-1})|\cdot(b-a). \tag{46}$$

Сумуючи (46) за k, дістанемо

$$|S|\geqslant\sum_{k=1}^{n}|\varphi(u_k)-\varphi(u_{k-1})|\cdot(b-a). \tag{47}$$

Звідси видно, що $\varphi(u)$ є функцією обмеженої варіації. Так само, міняючи ролі осей xo і yo, ми дістанемо, що $\psi(v)$

є функція обмеженої варіації. Проекція S_k на площину yoz буде очевидно не менша, ніж

$$(b-a)\cdot\left|[f_1(u_k)+f_2(v)]-[f_1(u_{k-1})+f_2(v)]\right| = \\ = |f_1(u_k)-f_1(u_{k-1})|\cdot(b-a).$$

Звідси за лемою III ми маємо, що

$$|S_k| \geqslant |f_1(u_k)-f_1(u_{k-1})|\cdot(b-a). \tag{48}$$

Сумуючи (48), дістанемо

$$|S| \geqslant (b-a)\sum_{k=1}^{n}|f_1(u_k)-f_1(u_{k-1})|. \tag{49}$$

Тому ми робимо висновок, що $f_1(u)$ є функцією обмеженої варіації. Змінюючи ролі вісей ox і oy, ми так само доведемо, що $f_2(v)$ є функцією обмеженої варіації. Необхідність умови доведена.

2) Умови теореми достатні.

Нехай $f_1(u)$, $f_2(v)$, $\varphi(u)$ і $\psi(v)$ будуть функціями обмеженої варіації. Звідси випливає, як і в прикладі § 5, що поверхня ректифікована, а значить квадрувальна, що й треба було довести.

Розглянемо 4 точки

$$(u_{k-1},\ v_{e-1}),\quad (u_{k-1},\ v_e),\quad (u_k,\ v_{e-1}),\quad (u_k,\ v_e)$$

на поверхні (S). Легко перевірити, що вони лежать в одній площині і творять паралелограм.

З другого боку, лінії $u=u_{k-1}$, $u=u_k$, $v=v_{e-1}$, $v=v_e$ утворюють на поверхні S криволінійний чотирикутник, що має ту властивість, що його проекція на площину паралелограма не менша площі паралелограма. Даючи k значення $1, 2, 3, \ldots, n$ і $e-1, 2, 3, \ldots m$, ми з одержаних паралелограмів утворюємо поліедр, вписаний в нашу поверхню. В силу тільки що сказаного ми повинні вивести, що площа (S) нашої поверхні не менша площі цього поліедра, які б малі не були його боки. Значить, цей поліедр можна розглядати, як поліедр наближення для даної поверхні, який дає площу поверхні за Лебегом. Елементарний паралелограм має проекції на площі координат, площі яких дорівнюють відповідно:

$$|\varphi(u_k)-\varphi(u_{k-1})|\cdot|\psi(v_e)-\psi(v_{e-1})|,\ f_2(v_e)-f_2(v_{e-1})|\cdot|\varphi(u_k)-\varphi(u_{k-1})|$$

$$|f_1(u_k)-f_1(u_{k-1})|\cdot|\psi(v_e)-\psi(v_{e-1})|.$$

Беручи суму квадратів цих трьох величин, витягаючи корінь квадратовий і сумуючи за всіма індексами k і l, ми дістанемо площу поліедра наближення.

Переходячи до границі, ми виразимо поверхні в формі подвійного інтегралу типу Стільтьеса:

$$|S|=\int_{\alpha}^{\beta}\int_{a}^{b}\sqrt{[d\varphi(u)]^2\cdot[d\Psi(v)]^2+[df_2(v)]^2\cdot[d\varphi(u)]^2+[df_1(u)]^2\cdot[d\Psi(v)]^2}. \tag{50}$$

Зокрема, якщо $\varphi(u)$, $\Psi(v)$, $f_1(u)$, $f_2(v)$ задовольняють умові Ліпшица або навіть тільки абсолютно неперервні[1]), то ми дістаємо класичний інтеграл

$$|S|=\int_{\alpha}^{\beta}\int_{a}^{b}\sqrt{[\varphi'(u)]^2\cdot[\psi'(v)]^2+[f'_2(v)]^2\cdot[\varphi'(u)]^2+[f'_1(u)]^2\cdot[\psi'(v)]^2}\,dudv. \tag{51}$$

ЛІТЕРАТУРА

1. А. С. Ковалько. Об одном прямом методе исследования некоторых квадрируемых поверхностей. Известия НИИММ, Томск, государственный университет.

2. I. Favard. Exemples de surfaces quarrables. Annali della Scuolo Norm. sup. di Pisa (sc. Tosiche Metlem), Ser. II, Vol. IV, 1935 — XIII.

А. С. КОВАНЬКО. О КВАДРИРУЕМОСТИ НЕКОТОРЫХ ЧАСТНЫХ ВИДОВ ПОВЕРХНОСТЕЙ В СМЫСЛЕ ЛЕБЕГА

Резюме

1) Коническая поверхность

$$\left.\begin{aligned} x&=v\varphi(u),\\ y&=v\psi(u),\\ z&=v\varkappa(u), \end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned}&(\alpha\leqslant u\leqslant\beta)\\ &(0\leqslant v\leqslant 1),\end{aligned} \tag{1}$$

где $\varphi(u)$, $\psi(u)$, $\varkappa(u)$ — непрерывные, отличные от нуля функции.

Необходимое и достаточное условие квадрируемости в смысле Лебега поверхности (1) состоит в том, чтобы отношения $\frac{\varphi(u)}{\varkappa(u)}$ и $\frac{\psi(u)}{\varkappa(u)}$ были функциями ограниченной вариации.

2) Цилиндрическая поверхность

$$\left.\begin{aligned} x&=\varphi(u),\\ y&=\psi(u),\\ z&=v\varkappa(u),\end{aligned}\right\}\ \begin{aligned}&\alpha\leqslant u\leqslant\beta)\\ &(0\leqslant v\leqslant 1)\end{aligned}, \tag{2}$$

где $\varphi(u)$, $\psi(u)$, $\varkappa(u)$ — непрерывные функции.

Необходимое и достаточное условие квадрируемости поверхности (2) состоит в том, чтобы функции $\varphi(u)$ и $\psi(u)$ были ограниченной вариации.

3) Поверхность

$$\left.\begin{aligned} x&=\varphi(u)\cos v,\\ y&=\psi(u)\sin v,\\ z&=\psi(u)+f(v),\end{aligned}\right\}\ \begin{aligned}&(\alpha\leqslant u\leqslant\beta)\\ &(0\leqslant v\leqslant\pi)\end{aligned}, \tag{3}$$

$\varphi(u)$ и $\psi(u)$ — непрерывные функции, $f(v)$ — функция невозрастающая. Условие необходимое и достаточное для квадрируемости поверхности (3) состоит в т м, чтобы $\varphi(u)$ и $\psi(u)$ были функциями ограниченной вариации.

4) Поверхность переноса

$$\left.\begin{aligned} x&=\varphi(u),\\ y&\quad\psi(v),\\ z&=f_1(u)+f_2(v)\end{aligned}\right\}\ \begin{aligned}&(\alpha\leqslant u\leqslant\beta),\\ &(a\leqslant v\leqslant b)\end{aligned} \tag{4}$$

$\varphi(u)$, $\psi(v)$, $f_1(u)$, $f_2(v)$ — непрерывные функции.

Необходимое и достаточное условие квадрируемости поверхности (4) состоит в том, что $\varphi(u)$, $\psi(v)$, $f_1(u)$, $f_2(v)$ являются функциями ограниченной вариации.