Наукові записки Львівського Державного Університету імені Ів. Франка
Том V Серія фізико-математична, вип. 1 1947

А. С. КОВАНЬКО

ПРО КОМПАКТНІСТЬ СИСТЕМ УЗАГАЛЬНЕНИХ МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ ВЕЙЛЯ

ПЕРЕДМОВА

Проблема компактності майже періодичних функцій Степанова і Безиковича була вирішена нами в сенсі необхідних і достатніх умов (C. R. Ac. Sc. URSS V. XXVI № 3, XXXII № 2).

В цій статті ми ставимо аналогічне питання для майже періодичних функцій Вейля.

§ 1. ПОЗНАЧЕННЯ І ФОРМУЛИ

A) Введемо слідуючу метрику в просторі функцій, визначених на інтервалі $(-\infty < x < +\infty)$ і сумованих в степені $\omega > 1$. Віддаль між $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ визначається так:

$$D_{w_\omega}^{E}(\varphi, \psi) = \lim_{T \to \infty} \left[\sup \left\{ \frac{1}{2T} \int\limits_{E(-T, +T)} |\varphi - \psi|^{\omega} dx \right\}^{\frac{1}{\omega}} \right].$$

Якщо $E = (-\infty, +\infty)$, то ми напишемо $D_{w_\omega}^{E} = D_{w_\omega}$.

B) Припустимо $\delta_w E = \lim\limits_{T \to \infty} \left[\sup\limits_{-\infty < a < +\infty} \frac{|E(a-T, a+T)|}{2T} \right]^{*}$.

C) Нехай $E_A (\subset E)$ позначає множину точок, де $|\varphi - \psi| \geqslant A$; $\varphi(x)$ і $\Psi(x)$ — вимірні функції на $(-\infty, +\infty)$.

Ми введемо таку віддаль між $\varphi(x)$ і $\Psi(x)$:

$$\mathfrak{r}_w^{E}(\varphi, \Psi) = \inf_{0 \leqslant A < +\infty} [A + \delta_w E_A].$$

---

* $|E(\alpha, \beta)|$ позначає міру E в середині (α, β).

Якщо $E=(-\infty, +\infty)$, то пишемо просто $\mathfrak{d}_w^E = \mathfrak{d}_w$.

Легко перевірити, що обидві метрики D_w^E і $\mathfrak{d}_w^E$ задовольняють правилу трикутника. На виведенні цієї властивості ми не зупинимось.

D) Нехай $[f(x)]_N = f(x)$, якщо $|f| < N$ і $[f]_N = \frac{f}{|f|} \cdot N$, якщо $|f| \geqslant N$. Легко перевірити ще такі співвідношення, які ми приводимо без доведення:

$$D_{w_\omega}^E([\varphi]_N, [\psi]_N) \leqslant D_{w_\omega}^E(\varphi, \psi); \tag{I}$$

$$\mathfrak{d}_w^E([\varphi]_N, [\psi]_N) \leqslant \mathfrak{d}_w^E(\varphi, \psi); \tag{II}$$

$$\mathfrak{d}_{w_\omega}^E(\varphi, \psi) \leqslant \left\{ \frac{D_{w_\omega}^E(\varphi, \psi)}{a} \right\}^\omega + a; \tag{III}$$

$(a > o$ довільно)

$$D_{w_\omega}^E(\varphi, \psi) \leqslant \{\sup|\varphi - \psi|\} \cdot \{\mathfrak{d}_w^E(\varphi, \psi)\}^{\frac{1}{\omega}}; \tag{IV}$$
якщо $\sup|\varphi - \psi| \geqslant 1$

$$D_{w_\omega}([\varphi]_N, [\psi]_N) \leqslant 2N\{\delta_w E\}^{\frac{1}{\omega}}; \tag{V}$$

$$D_{w_\omega}^{E_1+E_2}(\varphi, \psi) \leqslant D_{w_\omega}^{E_1}(\varphi, \psi) + D_{w_\omega}^{E_2}(\varphi, \psi); \tag{VI}$$

$$\mathfrak{d}_w^{E_1+E_2}(\varphi, \psi) \leqslant \mathfrak{d}_w^{E_1}(\varphi, \psi) + \mathfrak{d}_w^{E_2}(\varphi, \psi). \tag{VII}$$

§ 2. ОПРЕДІЛЕННЯ І ВСТУПНІ ТЕОРЕМИ

Определення I. Множина $E \subset (-\infty, +\infty)$ зветься відносно щільною, якщо існує число $l > o$ таке, що довільний інтервал довжини l містить точки множини E.

Определення II (1,6). Функція $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ зветься $\begin{matrix} \text{a) } w_\omega \\ \sim \\ \text{b) } w \end{matrix}$ майже періодичною $\left(\begin{matrix} \text{a) } w_w \text{ м. п.} \\ \sim \\ \text{b) } w \text{ м. п.} \end{matrix}\right)$, якщо, яким би малим не було $\varepsilon > o$, існує відносно щільна множина чисел $[\tau]$ (майже періоди)

така, що $\left\{ \begin{array}{l} \text{a) } D_{w_\omega}(f(x+\tau), f(x)) < \varepsilon, \\ \text{b) } \mathfrak{d}_w(f(x+\tau), f(x)) < \varepsilon. \end{array} \right.$

Властивість I (1). $\left.\begin{matrix}\text{a)}\\ \text{b)}\end{matrix}\right\}$ яким би не було число $\varepsilon > o$, існує число $\eta > o$ таке, що

$$\left.\begin{array}{l}\text{a) } D_{w_\omega}(f(x+h),\ f(x)) < \varepsilon \\ \text{b) } \mathfrak{D}_w(f(x+h),\ f(x)) < \varepsilon\end{array}\right\} \text{ для } |h| < \eta.$$

Властивість II. $\left.\begin{array}{l}\text{a)}\\ \text{b)}\end{array}\right\}$ яке б не було $\varepsilon > o$,

$$\left.\begin{array}{l}\text{a) існує число } \sigma > o \text{ таке, що } D^E_{w_\omega}(f, o) < \varepsilon \\ \text{b) існує число } N_0 > o \text{ таке, що } \mathfrak{D}_w(f, [f]_N) < \varepsilon\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{для } \delta_w E < \varepsilon, \\ \text{для } N > N_0.\end{array}$$

Властивість III. $\left.\begin{array}{l}\text{а}\\ \text{б}\end{array}\right\}$ кожна скінчена послідовність $f_1(x) \ldots . f_n(x)$ функцій $\left(\begin{array}{l}\text{а) } w_\omega \text{ м. п.}\\ \quad\sim \\ \text{б) } w \text{ м. п.}\end{array}\right)$ має спільну множину майже періодів.

Властивість IV. $\left.\begin{array}{l}\text{a)}\\ \text{b)}\end{array}\right\}$ яке б не було $\varepsilon > o$ і функція $f(x)$ $\left(\begin{array}{l}\text{а) } w_\omega \text{ м. п.}\\ \quad\sim \\ \text{б) } w \text{ м. п.}\end{array}\right)$, можна знайти таку майже періодичну функцію $\varphi(x)$ H. Bohr'a, що

$$\text{a) } D_{w_\omega}(f(x),\ \varphi(x)) < \varepsilon,$$
$$\text{b) } \mathfrak{D}\ (f(x),\ \varphi(x)) < \varepsilon.$$

Властивість V. Яке б не було $\varepsilon > o$ і система $\mathfrak{M}(f)$ (скінчення або нескінченна) функцій w_1 м. п., що має загальну відносно щільну множину майже періодів $\{\tau\}$, існує функція $K(x)$ (ядро), що приймає тільки значення O або C, що

1) $\lim\limits_{T \to \infty} \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_a^{a+T} K(t)\,dt = 1$ (рівномірно в „a“).

2) Існує послідовність чисел (>0) $T_1 < T_2 < \ldots . \to \infty$, що

$$\varphi(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T_n}^{+T_n} f(x+t) \cdot K(t)\,dt \tag{1}$$

існує для всіх значень x.

$$3) \quad |\varphi(x+a) - \varphi(x)| \leqslant C \cdot D_{w_1}(f(x+a),\ f(x)) \tag{2}$$

$$|f(x)| \leqslant C \cdot D_{w_1}(f,\ o), \tag{3}$$

звідки випливає, що $\varphi(x)$ майже періодична в сенсі H. Bohr'a

$$4) \quad D_{w_1}(f(x),\ \varphi(x)) < \varepsilon. \tag{4}$$

Властивість VI. Якщо послідовність функції $\left.\begin{matrix} a \\ \\ b \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} w_\omega \text{ м. п.} \\ \sim \\ w \text{ м. п.} \end{matrix}\right\}$ збігається в сенсі метрики $\left\{\begin{matrix} a) D_{w_\omega} \\ \\ b) \mathfrak{d}_w \end{matrix}\right.$, то гранична функція є також функція $\left\}\begin{matrix} w_\omega \text{ м. п.} \\ \sim \\ w \text{ м. п.} \end{matrix}\right.$

Определіння III (1, 2). $f(x)$ зветься B_ω майже періодичною, якщо існує послідовність функцій $f_1(x), f_2(x) \ldots f_n(x) \ldots$ майже періодичних в сенсі H. Bohr'a, що

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}|f-f_n|^\omega dx\right\}=0.$$

Примітка (2). Можна побудувати таку B_ω м. п. функцію $f(x)$, що не існує жодної функції $\varphi(x)$, w_ω м. п., що

$$\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{2T}\int_{+T}^{+T}|f-\varphi|^\omega dx=0.$$

Теорема I (3) (Hausdorff). Необхідна і достатня умова компактності системи точок $\{x\}$ в повному просторі полягає в тому, що, яке б не було мале $\varepsilon > o$, існує скінченна система $x_1 \cdot x_2 \ldots x_n$ така, що віддаль довільної точки x системи $\{x\}$ від одної з точок x_k є $< \varepsilon$.

Теорема II (4) (Freschet). Необхідна і достатня умова компактності системи точок $\{x\}$ в повному просторі полягає в тому, що, яке б не було мале $\varepsilon > o$, можна побудувати компактну систему $\{y\}$ таку, що кожному x можна побудувати таке $\{y\}$, що віддаль між ними $< \varepsilon$.

Теорема III (4) (Люстерник). Необхідна і достатня умова компактності системи функції $f(x)$ майже періодичних в розумінні H. Bohr'a полягає в слідуючому:

1) всі функції системи обмежені в їх сукупності;

2) яке б мале не було $\varepsilon > o$, існує таке $\delta > 0$, що $|f(x+h) - f(x)| < \varepsilon$ для $|h| < \delta$ для всіх функцій системи;

3) яке б мале не було $\varepsilon > o$, існує відносно щільна множина майже періодів (τ), спільних всім функціям системи, таких, що $|f(x+\tau) - f(x)| < \varepsilon$.

§ 3. ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ ПРОСТОРІВ, ВИЗНАЧЕНИХ МЕТРИКАМИ D_{w_ω} и $\mathfrak{d}_w$

Теорема А. Простори, визначені метриками D_{w_ω} и $\mathfrak{d}_w$, неповні.

Доведення. Нехай $f_n(x)$ — послідовність майже періодичних функцій в сенсі Bohr'a, яка збігається за опреділенням III § 2 до деякої функції $f(x)$ .... B_ω м. п., причому ця остання істотно відмінна від якоїсь функції w_ω м. п. (див. примітку до III § 2).

На підставі нерівності Мінковського пишемо:

$$\left\{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}|f_{n+p}-f_n|^\omega dx\right\}^{\frac{1}{\omega}} \leqslant \left\{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}|f_{n+p}-f|^\omega dx\right\}^{\frac{1}{\omega}} +$$

$$+\left\{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}|f_n-f|^\omega dx\right\}^{\frac{1}{\omega}}.$$

Якщо $n \to \infty$ довільне натуральне число, то

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\overline{\lim_{T\to\infty}}\left[\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}|f_{n+p}-f_n|^\omega dx\right]\right\}=0, \tag{1}$$

але в силу відомих властивостей м. п. функцій H. Bohr'a ми маємо, що

$$\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}|f_{n+p}-f_n|^\omega dx = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}|f_{n+p}-f_n|^\omega dx =$$

$$=\lim_{T\to\infty}\left[\sup_{-\infty<a<+\infty}\frac{1}{2T}\int_{a-T}^{a+T}|f_{n+p}-f_n|^\omega dx\right]=\left[D_{w_\omega}(f_{n+p}, f_n)\right]^\omega. \tag{2}$$

Тому пишемо $\lim\limits_{n\to\infty} D_{w_\omega}(f_{n+p}, f_n)=0.$ (3)

Це означає, що послідовність $f_n(x)$ є фундаментальна в сенсі метрики D_{w_ω}. Але вона не має граничної функції в сенсі тої ж метрики.

Припустимо навпаки, що $\varphi(x)$ є граничною функцією цієї послідовності, тобто, що

$$\lim_{n\to\infty} D_{w_\omega}(\varphi, f_n)=0, \tag{4}$$

але тому, що

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}|f_n-\varphi|^\omega dx \leqslant \sup_{(-\infty<a<+\infty)}\frac{1}{2T}\int_{a-T}^{a+T}|\varphi-f_n|^\omega dx,$$

то

$$\overline{\lim_{T\to\infty}}\,\frac{1}{2T}\int^{+T}|f_n-\varphi|^{\omega}\,dx=[\,D_{w_{\omega}}(f,\varphi)\,]^{\omega}. \tag{5}$$

Звідки в силу (4) виводимо, що

$$\lim_{n\to\infty}\left[\,\overline{\lim_{T\to\infty}}\,\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}|f_n-\varphi|^{\omega}\,dx\,\right]=0. \tag{6}$$

Але

$$\left\{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}|f-\varphi|^{\omega}\,dx\right\}^{\frac{1}{\omega}}\leqslant\left\{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}|f_n-\varphi|^{\omega}\,dx\right\}^{\frac{1}{\omega}}+$$

$$+\left\{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}f-f_n|^{\omega}\,dx\right\}^{\frac{1}{\omega}}. \tag{7}$$

По опреділенню $f(x)$ маємо:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\,\overline{\lim_{T\to\infty}}\,\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}|f-f_n|^{\omega}\,dx\,\right]=0. \tag{8}$$

Беручи до уваги (6) і (8), ми маємо з нерівності (7), що

$$\overline{\lim_{T\to\infty}}\,\frac{1}{2T}\int_{+T}^{+T}|f-\varphi|^{\omega}\,dx=0. \tag{9}$$

Але ця остання нерівність поскільки ми припустили, що $f(x)$ істотно відмінна від якої б то не було функції w_{ω} м. п. (див. прим. до III § 2), неможлива.

Звідки аналогічно можна практикувати випадок для метрики $\tilde{D}_{w}$. Теорема A доведена.

Доведена теорема показує, що для рішення питання про компактність системи w_{ω} м. п. або $\tilde{w}$ м. п. в відповідних метриках необхідно неповні простори (з метриками $D_{w_{\omega}}$ і $\tilde{D}_{w}$) доповнити — „ідеальними“ граничними елементами.

Нехай $x_1\ x_2\ x_3\dots$ фундаментальна послідовність, що не має граничної точки. Введемо „ідеальну“ граничну точку .. $x^{(\cdot)}$.

Для якоїсь іншої послідовності $y_1\ y_2\dots$ ми маємо іншу ідеальну граничну точку $y^{(\cdot)}$. Віддаль $|x^{(\cdot)}-y^{(\cdot)}|$ між цими точками ми визначаємо як границю віддалі між x_m і y_n, коли $m\to\infty$ і $n\to\infty$.

Таким чином наш простір стає повним і знову метричним. Ми утотожнюємо таким способом поняття „фундаментальна“ з поняттям „збіжної послідовності“.

§ 4. ПРО КОМПАКТНІСТЬ СИСТЕМ W_1 М. П. ФУНКЦІЙ

Лема. Система $\mathfrak{M}(f)$ функцій w_1 м. п. є компактна в сенсі метрики D_{w_1}, якщо виконуються такі умови (достатні):

1) Існує таке постійне число $M > o$, що $D_{w_1}(f, o) \leqslant M$ для всіх функцій системи $\mathfrak{M}(f)$.

2). Яке б мале не було $\varepsilon > o$, існує число $\eta > o$ таке, що $D_{w_1}(f(x+h), f(x)) < \varepsilon$ при $|h| < \eta$ для всіх функцій системи.

3). Яке б мале не було $\varepsilon > o$, існує відносно щільна множина майже період в „τ“, спільних всім функціям системи таких що $D_{w_1}(f(x+\tau), f(x)) < \varepsilon$ для всіх функцій системи.

Доведення. Нехай $\varepsilon > o$ довільне. В силу властивості V (§ .) можемо побудувати для кожної функції $f(x)$ нашої системи майже періодичну функцію $\varphi(x)$ H. Bohr'a, як це зазначено в цій властивості.

Розглянемо множину $\mathfrak{M}'(\varphi(x))$ всіх цих функцій $\varphi(x)$. В силу § 2 і умови 1) цієї леми ми маємо:

$$|\varphi(x)| \leqslant C \cdot M. \tag{1}$$

В силу (2) § 3 і умови (2) цієї леми маємо:

$$|\varphi(x+h) - \varphi(x)| < C \cdot \varepsilon \tag{2}$$

при $|h| < \eta$.

Нарешті, в силу того ж (1) § 2 і умови нашої леми маємо:

$$|\varphi(x+\tau) - \varphi(x)| < C\varepsilon \tag{3}$$

[τ майже період для $f(x)$].

Але умови (1), (2) і (3) в силу теореми III являються умовами компактності системи $\mathfrak{M}'(\varphi(x))$ в сенсі рівномірної збіжності, значить тим більш в сенсі метрики D_{w_1}. В силу (4) (§ 2) і теореми II (§ 2) ми повинні вивести, що система $\mathfrak{M}(f)$ також компактна в сенсі метрики D_{w_1}, що й треба було довести.

§ 5. КОМПАКТНІСТЬ СИСТЕМИ w_ω М. П. ФУНКЦІЙ

Теорема В. Необхідна і достатня умова компактності системи $\mathfrak{M}(f)$ функцій w_ω м. п. в сенсі метрики D_{w_ω} полягає у виконанні наступних умов: яке б не було мале $\varepsilon > o$,

1) існує таке $\sigma > o$, що $D^E_{w_\omega}(f, o) < \varepsilon$ при $\delta_w{}^E < \sigma$;

2) існує таке $\eta > o$, що $D_{w_\omega}(f(x+h), f(x)) < \varepsilon$ при $|h| < \eta$;

3) існує відносно щільна множина майже періодів $\{\tau\}$, спільних всім функціям системи, що $D_{w_\omega}(f(x+\tau), f(x)) < \varepsilon$.

Доведення: 1. Умови (1), (2), (3) теореми необхідні. Нехай $\mathfrak{M}(f)$ компактне, тоді в силу теореми I, яке б мале не було $\varepsilon > o$, існує скінчена система функцій $f_1(x) \ldots f_n(x)$ така, що для кожної функції системи $\mathfrak{M}(f)$ можна підібрати функцію $f_k(x)$, що

$$D_{w_\omega}(f(x), f_k(x)) < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (1)$$

Але в силу властивості II a) § 2 кожній функції $f_k(x)$ можна підібрати таке число $\sigma_k > o$, що

$$D_{w_\omega}(f_k, o) < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (2)$$

при $\delta_w E < \sigma_k$.

Нехай $\sigma = \min(\sigma_1 \ldots \sigma_n)$.

Тоді, покладаючи $\delta_w E < \sigma$, ми маємо в силу (1) і (2), що

$$D^E_{w_\omega}(f, o) \leqslant D^E_{w_\omega}(f, f_k) + D^E_{w_\omega}(f_k, o) \leqslant$$

$$\leqslant D_{w_\omega}(f, f_k) + D_{w_\omega}(f_k, o) < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{3}.$$

Отже, для кожної функції $f(x)$ нашої системи $\mathfrak{M}(f)$ ми маємо нерівність:

$$D^E_{w_\omega}(f, o) < \varepsilon \qquad (3)$$

при $\delta_w E < \sigma$ тобто ми маємо умову (1) нашої теореми. В силу властивості 1[a]) § 2 можна для кожної функції $f_k(x)$ підібрати таке число $\eta_k > o$, що

$$D_{w_\omega}(f_k(x+h), f_k(x)) < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (4),$$

якщо $|h| < \eta_k$.

Нехай $\eta = \min[\eta_1 \ldots \eta_n]$. Напишемо (1) в такому вигляді:

$$D_{w_\omega}(f(x+h), \quad f_k(x+h)) < \frac{\varepsilon}{3}. \qquad (5)$$

Тоді ми маємо в силу (1), (4) і (5), що

$$D_{w_\omega}(f(x+h), f(x)) \leqslant D_{w_\omega}(f(x+h), f_k(x+h)) +$$

$$+ D_{w_\omega}(f_k(x+h), f_k(x)) + D_{w_\omega}(f_k(x), f(x)) < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

якщо тільки $|h| < \eta$, таким чином ми маємо для кожної функції $f(x) \subset \mathfrak{M}(f)$, що

$$D_{w_\omega}(f(x+h),\ f(x)) < \varepsilon, \tag{6}$$

якщо $|h| < \eta$.

Але це якраз умова 2) нашої теореми. Маємо, нарешті, в силу властивості III a) § 2, що функції $f_1(x) \ldots . f_n(x)$ мають спільну систему майже періодів $\{\iota\}$ таких, що

$$D_{w_\omega}(f_k(x+\tau),\ f_k(x) < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{7}$$

Запишемо (1) у вигляді:

$$D_{w_\omega}(f_k(x+\tau),\ f(x+\tau)) < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{8}$$

Тоді в силу (1), (7) і (8) ми маємо нерівність:

$$D_{w_\omega}(f(x+\tau),\ f(x)) \leqslant D_{w_\omega}(f(x+\tau),\ f_k(x+\tau)) +$$

$$+ D_{w_\omega}(f_k(x+\tau),\ f_k(x)) + D_{w_\omega}(f(x),\ f_k(x)) < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Отже, існує така відносно щільна множина майже періодів $\{\tau\}$, що

$$D_{w_\omega}(f(x+\tau),\ f(x)) < \varepsilon \tag{9}$$

для всіх функцій системи $\mathfrak{M}(f)$. Але це є умова 3) нашої теореми. Таким чином необхідність умов 1), 2) і 3) доведена.

II. Умови 1), 2), 3) достатні.

Обмежимо всі функції системи $\mathfrak{M}(f)$ числом $N > 1$, тобто розглянемо систему $\mathfrak{M}([f]_N)$. Легко бачити, що всі функції цієї нової системи будуть w_ω м. п., а саме система буде компактна в сенсі метрики D_{w_1}. Це випливає з співвідношень I, II, III, IV, V, VI (§ 1). Для довільних чисел a і b ми маємо:

$$D_{w_1}([f(x+b)]_N,\ [f(x)]_N) \leqslant 2N \cdot D_N([f(x+b)]_N,\ [f(x)]_N) \leqslant$$

$$\leqslant 2N\left[a + \left\{\frac{D_{w_\omega}([f(x+b)]_N, [f(x)]_N)}{a}\right\}^\omega\right].$$

Отже,

$$D_{w_1}([f(x+b)]_N,\ [f(x)]_N) \leqslant 2N\left\{a + \left[\frac{D_{w_\omega}(f(x+b), f(x))}{a}\right]^\omega\right\}, \tag{10}$$

звідки відразу видно, що якщо $f(x)$ є функцією w_ω м. п., то $[f(x)]_N$ є функцією w_1 м. п.

Припустимо, що $a=\left(\frac{\varepsilon}{4N}\right)^{\frac{1}{\omega}}$ і $b=h$ і нехай $\varepsilon<1$, тоді згідно з умовою 2) цієї теореми ми можемо вибрати $\eta>o$ таке, що $D_{w_\omega}(f(x+h),\ f(x))<\left(\frac{\varepsilon^2}{16N^2}\right)^{\frac{1}{\omega}}$ при $|h|<\eta$. Ми маємо тоді в силу (10) $\left(\text{бо}\ \frac{\varepsilon}{4N}<1\right)$, що

$$D_{w_1}([f(x+h)]_N,\ [f(x)]_N)<\varepsilon. \tag{11}$$

Але це умова 2) леми (§ 4) для системи $\mathfrak{M}([f])_N)$.

За умовою 3) цієї теореми маємо відносно густу множину майже-періодів $\{\tau\}$ таких, що $D_{w_\omega}(f(x+\tau), f(x))<\left(\frac{\varepsilon^2}{16N^2}\right)^{\frac{1}{\omega}}$,

припускаючи в рівності (10) $a=\frac{\varepsilon}{4N}$ і $b=\tau$, дістаємо на основі останньої нерівності, що

$$D_{w_1}([f(x+\tau)]_N,\ [f(x)]_N)<\varepsilon. \tag{12}$$

Але це умова 3) леми (§ 4).

Умова 1) леми (§ 4) також виконана, бо $|[f]_N|\leqslant N$, звідки

$$D_{w_1}([f]_N,\ o)\leqslant N. \tag{13}$$

На підставі вказаної леми ми виводимо, що $\mathfrak{M}([f]_N)$ компактне в сенсі метрики D_{w_1}; тому в силу теореми 1 (§ 2) маємо для кожного $\varepsilon>o$ скінчену систему функцій $[f_1]_N \dots [f_n]_N$ нашої системи $\mathfrak{M}([f]_N)$ таких, що для кожної функції $[f]_N$ знайдеться своя функція $[f_k]_N$ така, що

$$D_{w_1}([f]_N,\ [f_k]_N)<\frac{\varepsilon^{2\omega}}{(16N^2)^\omega}. \tag{14}$$

Маємо в силу співвідношень III і IV (§ 1)

$$D_{w_\omega}([f]_N,\ [f_k]_N)\leqslant 2N\{F_w([f]_N,\ [f_k]_N)\}^{\frac{1}{\omega}}\leqslant$$

$$\leqslant 2N\left\{a+\frac{D_{w_1}\{[f]_N,\ [f_k]_N\}}{a}\right\}^{\frac{1}{w}} \qquad (a>o\ \text{довільне}).$$

Виберемо $a=\frac{\varepsilon^\omega}{4N^\omega}$, тоді ми дістанемо

$$D_{w_\omega}([f]_N,[f_k]_N)\leqslant 2N\left\{\frac{\varepsilon^\omega}{(4N)^w}+\frac{\varepsilon^\omega}{(4N)^w}\right\}^{\frac{1}{\omega}}\leqslant$$

$$\leqslant 2\varepsilon\left(\frac{1}{4^w}+\frac{1}{4^w}\right)^{\frac{1}{\omega}}=2^{-1+\frac{1}{\omega}}\cdot\varepsilon<\varepsilon.$$

Таким чином

$$D_{w_\omega}([f]_N, [f_k]_N) < \varepsilon. \qquad (15)$$

Але тоді в силу теореми 1 (§ 2) ми повинні вивести, що система $\mathfrak{M}([f]_N)$ компактна в сенсі метрики D_{w_ω}.

Розіб'ємо $(-\infty, +\infty)$ на n множин $E_1 E_2 \ldots E_n$ так, щоб $\delta_\omega E_k < \sigma$, де σ взяте з умови 1) цієї теореми.* Тоді в силу цієї умови $D_{w_\omega}^{E_k}(f, o) < \varepsilon$. Але тоді в силу співвідношення VI (§ 1) ми маємо $D_{w_\omega}(f, o) \leqslant \sum_1^n D_{w_\omega}^{E_k}(f, o) < \varepsilon \cdot n = M$ (постійне).

Отже,

$$D_{w_\omega}(f, o) \leqslant M \qquad (16)$$

для довільної функції системи $\mathfrak{M}(f)$, де M зафіксоване число.

Нехай E_N є множина точок, де $|f| \geqslant N$, тоді в силу співвідношень VI (§ 1) ми маємо:

$$D_{w_\omega}(f, o) \geqslant D_{w_\omega}^{E_N}(f, o) \geqslant N\{\delta_\omega E_N\}^{\frac{1}{\omega}}.$$

Значить, в силу (16) ми виводимо, що

$$\delta_w E_N \leqslant \left(\frac{M}{N}\right)^\omega. \qquad (17)$$

Тому, що N може бути вибране довільно великим, ми умовимось вважати $N > \frac{M}{\sigma^{\frac{1}{\omega}}}$, тоді в силу (17) ми маємо, що

$$\delta_\omega E_N < \sigma. \qquad (18)$$

Але тоді в силу умови 1) нашої теореми

$$D_{w_\omega}^{E_N}(f, o) < \varepsilon. \qquad (19)$$

Поза множиною E_N ми маємо $f = [f]_N$, тому

$$D_{w_\omega}([f]_N, f) = D_{w_\omega}^{E_N}(f, [f]_N) \leqslant D_{w_\omega}^{E_N}(f, o) + D_{w_\omega}^{E_N}([f]_N, o) < 2\varepsilon.$$

Значить:

$$D_{w_\omega}([f]_N, f) < 2\varepsilon. \qquad (20)$$

Але тому, що система $\mathfrak{M}([f]_N)$ компактна в сенсі метрики D_{w_ω}, то в силу (20) і теореми II (§ 2) ми повинні вивести, що і система $\mathfrak{M}(f)$ також компактна.

Таким чином наша теорема цілком доведена.

---

* Наприклад, $E_k = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \ldots$ де $\alpha_n = \left(n + \frac{k-1}{n} < x < n + \frac{k}{n}\right)$.

§ 6. ПРО КОМПАКТНІСТЬ СИСТЕМИ ФУНКЦІЙ $\widetilde{W}$ М. П.

Теорема С. Необхідна і достатня умова компактності системи $\mathfrak{M}(f)$ функцій $\widetilde{w}$ м. п. в сенсі метрики $\mathfrak{d}_w$ полягає у виконанні умов таких: яке б мале не було $\varepsilon > o$,

1) існує число $N_0 > o$ таке, що $\mathfrak{d}_w(f, [f]_N) < \varepsilon$ при $N > N_0$ для всіх функцій системи;

2) існує число $\eta > o$ таке, що $\mathfrak{d}_w(f(x+h), f(x)) < \varepsilon$ при $|h| < \eta$ для всіх функцій системи;

3) існує відносно щільна множина майже періодів $\{\tau\}$ спільних всім функціям системи $\mathfrak{M}(f)$, тобто $\mathfrak{d}_w(f(x+\tau), f(x)) < \varepsilon$.

Доведення:

1. Умови теореми необхідні. Доведення необхідності умов 2) і 3) є повним повторенням доведення відповідних умов 2) і 3) теореми (13) лише з заміною символа D_{w_ω} на $\mathfrak{d}_w$, тому ми на них не зупиняємось. Розглянемо необхідність умови 1).

Зберігаємо позначення теореми В. Замість нерівності (1) § 5 ми маємо тепер умову

$$\mathfrak{d}_w(f, f_k) < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1}$$

В силу властивості II b) (§ 2) можна підібрати для кожної функції $f_k(x)$ таке $N_k > o$, що

$$\mathfrak{d}_w([f_k]_N, f_k) < \frac{\varepsilon}{3} \tag{2}$$

при $N > N_k$. Нехай $N_0 = \max(N_1 \ldots . N_n)$. Візьмемо $N > N_0$, тоді в силу (1) і в силу співвідношення II (§ 1)

$$\mathfrak{d}_w([f]_N, [f_k]_N) < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3}$$

На підставі (1), (2), (3) ми заключаємо, що

$$\mathfrak{d}_N(f, [f]_N) \leqslant \mathfrak{d}_w(f, f_k) + \mathfrak{d}_w(f_k, [f_k]_N) + \mathfrak{d}_w([f_k]_N, [f]) < 3\,\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Остання нерівність і є якраз умова 1) теореми.

II. Умови теореми достатні. Обмежимо функції системи $\mathfrak{M}(f)$ числом $N > 1$ і розглянемо систему обмежених (зрізаних) функцій $\mathfrak{M}([f]_N)$.

Покажемо, що ця система компактна в сенсі метрики D_{w_1}. Для цього досить показати, що вона задовольняє умові леми § 4.

Умова 1) леми очевидно виконана, тому що $D_{w_1}([f]_N, o) \leqslant N$.

Розглянемо 2) і 3) тої ж леми. Вони очевидно виконані в силу слідуючих співвідношень. З II і III і IV (§ 1) ми маємо для довільного b, що

$$D_{w_1}([f(x+b)]_N, [f(x)]_N) \leqslant 2N\mathfrak{d}_w([f(x+b)]_N, [f(x)]_N) \leqslant$$
$$\leqslant 2N \cdot \mathfrak{d}_w((x+b), f(x)).$$

Значить

$$D_{w_1}([f(x+b)]_N, [f(x)]_N) \leqslant 2N \cdot \mathfrak{d}_w(f(x+b), f(x)). \tag{4}$$

Покладаючи в цій рівності послідовно $b = h$ і $b = \tau$, де сенс величин h і τ такий же, як в умовах 2) і 3) теореми С, і беручи до уваг ці умови, ми прийдемо відповідно до умов 2) і 3) леми. Значить система $\mathfrak{M}([f]_N)$ компактна в сенсі метрики D_{w_1}, а тому в силу теореми I (§ 2) для довільного $\varepsilon > o$ існує скінченна система функцій $[f_1]_N \ldots [f_n]_N$ в системі $\mathfrak{M}([f]_N)$, що для довільної функції f системи $\mathfrak{M}(f)$ знайдеться своя функція $[f_k]_N$ така, що

$$D_{w_1}([f]_N, [f_k]_N) < \frac{\varepsilon^2}{4}. \tag{5}$$

Але в силу III (§ 2) ми маємо:

$$\mathfrak{d}_w([f]_N, [f_k]_N) \leqslant \frac{D_{w_1}([f]_N, [f_k]_N)}{a} + a \tag{6}$$

при довільному $a > o$.

Припустимо $a = \frac{\varepsilon}{2}$; беручи до уваги (5), дістанемо:

$$\mathfrak{d}_w([f]_N, [f_k]_N) < \varepsilon. \tag{7}$$

Значить в силу теореми I (§ 2) система $\mathfrak{M}([f]_N)$ також компактна в сенсі метрики $\mathfrak{d}_w$ (при довільних $N > 1$).

Але тоді в силу умови 1) нашої теореми і в силу теореми II (§ 2) ми повинні зробити висновок, що система $\mathfrak{M}(f)$ також компактна в сенсі метрики $\mathfrak{d}_w$, що й треба було довести.

§ 7. ФУНКЦІЇ $\widetilde{W}$ І W_w — НОРМАЛЬНІ

Определення.

Ми кажемо, що функція $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$

$\left.\begin{matrix}a\\ b\end{matrix}\right\}\begin{matrix}w_\omega\\ \sim\\ w\end{matrix}$ — нормальна, якщо система всіх зміщень $\{f(x+k)\}$ (k — довільне) компактна в сенсі метрики $\left.\begin{matrix}\text{а}\\ \text{в}\end{matrix}\right\}\begin{matrix}D_{w_\omega}\\ \mathfrak{D}_w\end{matrix}$.

Теорема D. Якщо $f(x)$ є функція $\left.\begin{matrix}a\\ \\ b\end{matrix}\right|\begin{matrix}w_\omega \text{ м. п.}\\ \sim\\ w \text{ м. п.}\end{matrix}$, то вона $\left.\begin{matrix}a\\ b\end{matrix}\right\}\begin{matrix}w_\omega\\ \sim\\ w\end{matrix}$ — нормальна і навпаки.

Доведення: Нехай $f(x)$ є функція $\left.\begin{matrix}\text{A}\\ \\ \text{B}\end{matrix}\right\}\begin{matrix}w_\omega \text{ м. п.}\\ \sim\\ w \text{ м. п.}\end{matrix}$, тоді система $\{f(x+k)\}$ задовольняє всім трьом умовам теореми $\left.\begin{matrix}\text{A}\\ \text{B}\end{matrix}\right\}\begin{matrix}\text{B}\\ \text{C}\end{matrix}$. Значить, система $\{f(x+k)\}$ буде компактна в сенсі метрики $\left.\begin{matrix}a\\ b\end{matrix}\right\}\begin{matrix}D_{w_\omega}\\ \mathfrak{D}_w\end{matrix}$.

Нехай, навпаки, система $\{f(x+k)\}$ компактна в сенсі метрики $\left.\begin{matrix}a\\ b\end{matrix}\right\}\begin{matrix}D_{w_\omega}\\ \mathfrak{D}_w\end{matrix}$.

Тоді згідно з теоремою 1 (§ 2), яке б мале не було $\varepsilon > o$, існує скінчена система чисел: $k_1 < k_2 < \ldots . < k_n$, таких, що для кожного k можливо знайти таке k, що

$$\left.\begin{matrix}a\\ b\end{matrix}\right\}\begin{matrix}D_{w_\omega}(f(x+k),\ f(x+k_i)) < \varepsilon\\ \mathfrak{D}_w(f(x+k),\ f(x+k_i)) < \varepsilon\end{matrix}, \tag{1}$$

або інакше:

$$\left.\begin{matrix}a\\ b\end{matrix}\right\}\begin{matrix}D_{w_\omega}(f(x+k_i-k),\ f(x)) < \varepsilon\\ \mathfrak{D}_w(f(x+k_i-k),\ f(x)) < \varepsilon\end{matrix}. \tag{2}$$

Але $k_1 < k_2 < \ldots . k_n$, значить $k_1 - k < k_i - k < k_n - k$. (3)

З (2) і (3) ми можемо заключити, що $k_i - k$ є майже період і множина майже періодів відносно щільна.

Значить $f(x)$ є функція $\left.\begin{matrix}a\\ \\ b\end{matrix}\right|\begin{matrix}w_\omega \text{ м. п.}\\ \sim\\ w \text{ м. п.}\end{matrix}$, що й треба довести.

ЛІТЕРАТУРА

1. Besicovitch A. and Bohr H. Almost — periodicity and general trigonometic series. Acta Math. Vol. 57.
2. Besicovitch A. Sur quelques points de la théorie des fonctions presque periodiques. CR, t. 181, p. 391.
3. Hausdorff. Mengenlehre, 1927.
4. Люстерник. Основы функционального анализа. Успехи матем. наук, т. I, стр 98.
5. Bohr H. Fastperiodischen Functionen. Acta Math., t. 45, 1925.
6. Kovanko A. Sur l'approximation des fonctions presque — periodiques généralisées. Rec. Math. Moscou, t. 36, 1928.

А. С. КОВАНЬКО. О КОМПАКТНОСТИ СИСТЕМЫ ОБОБЩЕННЫХ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ В СМЫСЛЕ ВЕЙЛЯ ФУНКЦИЙ.

Резюме

Результаты настоящей статьи были под тем же названием опубликованы в „Докладах Академии наук СССР", т. XLIII, № 7, 1944 г.
