Наукові записки Львівського Державного Університету імені Ів. Франка
Том V Серія фізико-математична, вип. 1 1947

ЛЯНЦЕ В. Е.
студент III курсу

ДО ТЕОРІЇ МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ ДВОХ ДІЙСНИХ ЗМІННИХ

Проф. О. С. Кованько поставив ряд питань, які стосуються вивчення функцій двох змінних, майже періодичних по кожному змінному зокрема. На його думку, при відомих незначних обмеженнях, накладених на структуру множини майже періодів, такі функції можна наближати рівномірно на всій площині xOy „тригонометричними поліномами" виду:

$$\sum_k a_k e^{i(\alpha_k xy + \beta_k y + \gamma_k x)}.$$

Ми розглянемо один із простіших випадків.

Відомо, що множина E, розташована на прямій, зветься відносно щільною, якщо існує таке число $l > o$, що в кожному інтервалі довжини l знайдеться точка $x \subset E$. Тоді число l зветься масштабом відносної щільності множини E.

Розглянемо підмножину $\{D\}_{\beta\gamma}$ класу двояко майже періодичних функцій, таку, що для кожної функції $f \subset \{D\}_{\beta\gamma}$ і кожного числа $\varepsilon > o$ існує така відносно щільна множина чисел $\{\tau_\varepsilon\}$ (з масштабом відносної щільності l_ε), що для деяких дійсних постійних β і γ:

$$\left| f\left(x + \frac{\tau_\varepsilon}{y+\gamma}, y\right) - f(x, y)\right| < \varepsilon,$$

$$\left| f\left(x, y + \frac{\tau_\varepsilon}{x+\beta}\right) - f(x, y)\right| < \varepsilon, \qquad (1)$$

при довільних значеннях x та y.

Як звичайно, будемо вважати, що $f \subset \{D\}_{\beta\gamma}$ комплексна функція дійсних змінних неперервна і визначена на всій площині xOy. Числа τ_ε, що стосуються до неї, будемо звати майже періодичними константами для даного ε.

Розглянемо ще клас $\{T\}_{\beta\gamma}$ „тригонометричних поліномів" виду:

$$T(x, y) = \sum_k a_k\, e^{i\lambda_k(xy + \beta y + \gamma x)},$$

де a_k — довільні комплексні, а λ_k — довільні дійсні числа.

Ми доведемо, що:

Теорема. Клас двояко майже періодичних функцій $\{D\}_{\beta\gamma}$ являється замиканням (в сенсі рівномірної збіжності на всій площині xOy) класу „тригонометричних поліномів" $\{T\}_{\beta\gamma}$:

$$\{D\}_{\beta\gamma} \equiv \overline{\{T\}}_{\beta\gamma}.$$

Для доведення досить обмежитися випадком, коли $\beta = \gamma = o$, так як випадок $\beta^2 + \gamma^2 > O$ зводиться до попереднього заміною змінних

$$x = x + \beta,\ y = y + \gamma.$$

Ми використаємо таке допоміжне положення:

Лема. Для кожної двояко майже періодичної функції $f \subset \{D\}_{0,0}$ існує така майже періодична функція Bohr'а $\varphi(t)$, що при довільних значеннях змінних x і y виконується співвідношення

$$f(x, y) = \varphi(xy).$$

Доведення леми. Нехай $f \subset \{D\}_{0,0}$. Задамо довільну пару точок (x_0, y_0), (ξ_0, η_0) таких, що:

$$x_0\, y_0 = \xi_0\, \eta_0 \tag{2}$$

і число $\varepsilon > o$. Позначимо

$$A = \frac{x_0\, y_0}{l_\varepsilon}, \tag{3}$$

де l_ε — масштаб відносної щільності множини майже періодичних констант $\{\tau_\varepsilon\}$ функції f.

Задамо далі послідовності цілих чисел $\{\mu_n\}$, $\{\nu_n\}$ таких, що:

$$|\mu_n|,\ |\nu_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

$$y_0\left(1 + \frac{\nu_n}{\mu_n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \eta_0 \tag{4}$$

Числу μ_n, (ν_n) поставимо у відповідність число α_n, (β_n) таке, що

$$o \leqslant \alpha_n \leqslant 1, \qquad (o \leqslant \beta_n \leqslant 1)$$

і

$$(\mu_n + \alpha_n)\, l_\varepsilon \subset \{\tau_\varepsilon\}, \qquad ((\nu_n + \beta_n)\, l_\varepsilon \subset \{\tau_\varepsilon\}).$$

Зауважимо, що в цьому випадку $(\mu_n + \nu_n + \alpha_n + \beta_n)\, l_\varepsilon$ є майже періодична константа функції f для 2ε.

Покладемо:

$$x_1 = x_0 + \frac{(\mu_n + \alpha_n)\, l_\varepsilon}{y_0},\ y_1 = y_0$$

$$x_2 = x_1,\ y_2 = y_1 + \frac{(\nu_n + \beta_n)\, l_\varepsilon}{x_1} \tag{5}$$

$$x_n = x_2 - \frac{(\mu_n + \nu_n + \alpha_n + \beta_n)\, l_\varepsilon}{y_2},\ y_n = y_2.$$

В силу властивості (1), $(\beta = \gamma = o)$ маємо:

$$|f(x_n, y_n) - f(x_2, y_2)| < 2\varepsilon$$

$$|f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)| < \varepsilon$$

$$|f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$$

і значить:

$$|f(x_n, y_n) - f(x_0, y_0)| < 4\varepsilon. \tag{6}$$

Приймаючи до уваги (3), (5) і (2), знайдемо:

$$y_n = y_0\, \frac{A + \mu_n + \nu_n + \alpha_n + \beta_n}{A + \mu_n + \alpha_n}$$

$$x^n y^n = \xi_0 \eta_0.$$

В силу (4) та обмеженості чисел α_n, β_n

$$y_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \eta_0,$$

тому також

$$x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \xi_0,$$

а так як по означенню $f \subset \{D\}_{0,0}$ неперервна функція, то

$$f(x_n, y_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} f(\xi_0, \eta_0).$$

Порівнюючи останнє співвідношення з нерівністю (6), бачимо, що:

$$|f(x_0, y_0) - f(\xi_0, \eta_0)| < 4\varepsilon,$$

а внаслідок довільності числа ε

$$f(x_0, y_0) = f(\xi_0, \eta_0).$$

Проте (x_0, y_0), (ξ_0, η_0) довільна пара точок, для якої виконується рівність (2). Тому з останньої рівності випливає, що для довільних x та y,

$$\left.\begin{array}{ll}\text{якщо} & xy = const,\\ \text{то також} & f(x, y) = const.\end{array}\right\} \tag{7}$$

Нехай тепер:

$$\varphi(t) = f(t, 1). \tag{8}$$

Приймаючи до уваги (7) та (8), дістанемо

$$f(x, y) = f(xy, 1) = \varphi(xy).$$

Очевидно, функція $\varphi(t)$, визначена рівністю (8), є майже періодична функція Bohr'a, і таким чином лема доведена.

Висновок 1. Двоїко періодичною (в вузькому розумінні) будемо звати кожну неперервну функцію $f(x, y)$, для якої існує „майже періодична константа“ ω, така, що:

$$f(x, y) = f\left(x + \frac{\omega}{y+\gamma}, y\right) = f\left(x, y + \frac{\omega}{x+\beta}\right) \qquad \left(\text{клас} \left\{P\right\}^{\omega}_{\beta\gamma}\right)$$

при довільних значеннях змінних x, y.

З приведеного доведення леми виводимо, що для кожної функції $f \subset \left\{P\right\}^{\omega}_{\beta\gamma}$ існує така періодична функція $\varphi(t)$ з періодом ω, що

$$f(x, y) = \varphi(xy + \beta y + \gamma x).$$

Доведення теореми. Нехай

$$f(x, y),\ g(x, y) \subset \{D\}_{0,0}$$

і $\varphi(t)$, $\psi(t)$ майже періодичні функції Bohr'a, що відповідають їм згідно леми.

Для кожного майже періода τ_ε, спільного функціям $\varphi(t)$ і $\psi(t)$, маємо:

$$\left|\left[f\left(x + \frac{\tau_\varepsilon}{y}, y\right) + g\left(x + \frac{\tau_\varepsilon}{y}, y\right]\right) - \left[f(x, y) + g(x, y)\right]\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\varphi(xy + \tau_\varepsilon) - \varphi(xy)\right| + \left|\psi(xy + \tau_\varepsilon) - \psi(xy)\right| < 2\varepsilon.$$

Аналогічно дістанемо

$$\left|\left[f\left(x,\ y+\frac{\tau_\varepsilon}{x}\right)+g\left(x,\ y+\frac{\tau_\varepsilon}{x}\right)\right]-\left[f(x,y)+g(x,y)\right]\right|<2\varepsilon.$$

Значить,

$$[f+g]\subset\{D\}_{0,0}.$$

Очевидно для довільних a і $\lambda: ae^{i\lambda xy}\subset\{D\}_{0,0}$.
Тому:

$$\{T\}_{0,0}\subset\{D\}_{0,0}. \tag{9}$$

Нехай тепер послідовність функцій $\{f_n(x,y)\}$, $f_n\subset\{D\}_{0,0}$ збігається рівномірно на всій площині xOy до функції $f_0(x,y)$ і $\varphi_n(t)$— відповідна f_n, згідно леми, майже періодична функція Bohr'a. При довільних x, y маємо:

$$|\varphi_p(xy)-\varphi_q(xy)|=|f_p(x,\ y)-f_q(x,\ y)|\underset{p,\,q\to\infty}{\rightrightarrows}0.$$

Звідси виводимо, що

$$\varphi_0(t)=\lim_{n\to\infty}\varphi_n(t)$$

існує рівномірно в $t(-\infty<t<\infty)$ і значить $\varphi_0(t)$ є майже періодична функція Bohr'a. Переходячи до границі при $n\to\infty$ в рівності

$$f_n(x,\ y)=\varphi_n(xy),$$

дістанемо

$$f_0(x,\ y)=\varphi_0(xy).$$

Отже, $\{D\}_{0,0}$ замкнена множина:

$$\overline{\{D\}}_{0,0}\subset\{D\}_{0,0}. \tag{10}$$

Нехай, нарешті, $f\not\subset\{D\}_{0,0}$, $\varphi(t)$— відповідна до f функція Bohr'a і $\{T_n(t)\}$ послідовність поліномів виду $\sum\limits_{\lambda} a_\lambda e^{i\lambda t}$, що збігається рівномірно $(-\infty<t<\infty)$ до $\varphi_n(t)$ при $n\to\infty$. Тоді послідовність $\{T_n(xy)\}$ дає рівномірну на всій площині xOy апроксимацію функції $f(x,\ y)$. Тому маємо:

$$\{D\}_{0,0}\subset\{T\}_{0,0}. \tag{11}$$

Із сукупності співвідношень (9), (10), (11) безпосередньо випливає зазначена теорема.

Висновок 2. Клас двояко періодичних функцій $\{P\}^{3}_{\beta\omega}$, тотожний з замиканням класу поліномів виду:

$$\sum_{k} a_k\, e^{\frac{2\pi i}{\omega} k (xy + \beta y + \gamma x)} \qquad (k \text{ — ціле число})$$

де замикання розуміється в сенсі рівномірної збіжності на всій площині xOy.

В. ЛЯНЦЕ. К ТЕОРИИ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ДВУХ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ.

Резюме

Автор изучает класс функций $f(x, y)$ таких, что, каково бы ни было $\varepsilon > o$, существует относительно плотное множество таких чисел τ_ε, что

$$|f(x + \frac{\tau_\varepsilon}{y+\gamma}, y) - f(x, y)| < \varepsilon,$$

$$|f\left(x, y + \frac{\tau_\varepsilon}{x+\beta}\right) - f(x, y)| < \varepsilon.$$

Доказывается, что этот класс функций является замыканием множества тригонометрических полиномов

$$T(x, y) = \sum_{k} a_k\, e^{i \lambda_k (xy + \beta y + \gamma x)}$$

(λ_k — действительны) в смысле равномерной сходимости.
