Наукові записки Львівського Державного Університету імені Ів. Франка
Том V Серія фізико-математична, вип. 1 1947

М. ЗАРИЦЬКИЙ

ЗАУВАЖЕННЯ ДО ПРОБЛЕМИ НАБЛИЖЕНИХ ОБЧИСЛЕНЬ В ГРЕЦЬКІЙ МАТЕМАТИЦІ

1. Коли ми читаємо математичні книги давніх греків, нас вражає одне цікаве явище. З одного боку, відкриття в школі Піфагора існування несумірних величин та введена Евдоксом вимога логічної точності, що довели до таких вершин точності в з'ясуванні дефініції, умов теорем та доведень, які ще сьогодні спостерігаємо в творах Архімеда й Аполонія. З другого боку, знаходимо (перед Героном і Діофантом) хіба винятково, якісь числові результати, даремно шукаємо способів їх обчислення. Грецьким астрономам доводилось користуватися вавілонськими числовими таблицями* разом з їхньою шістдесятковою системою. Однак, вавілонські таблиці не могли бути єдиним джерелом грецьких числових результатів. Відомої Архімедової апроксимації $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$** не знав ніякий давніший математик. Коли ж грецькі математики не переказали нам у своїх творах, як вони обчислювали, наприклад, другі корені з натуральних чисел, то цікаво було б відшукати всі такі фрагменти в їх книгах, в яких можна б вивести практичний спосіб обчислення коренів. Зацікавлення такими питаннями стане для майбутніх істориків цінним матеріалом, який дасть їм змогу вказати на ті загальні теореми грецької „геометричної алгебри", з яких греки робили практичні висновки при відшукуванні числових результатів.

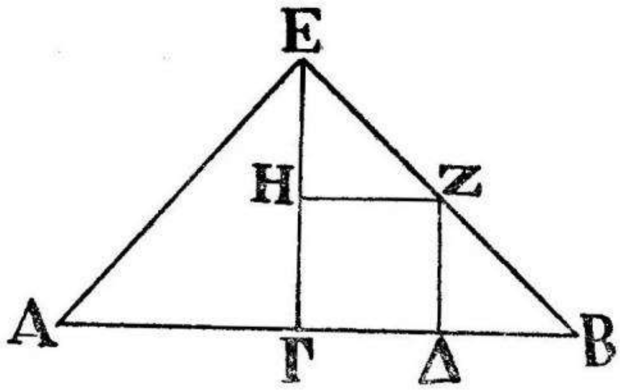
---

* Див. O. Neugebauer, Mathematische. Keilschrifttexte, Quellen und Studien zur Gesch. d. Mathem. Abt. A. Bd. 3. Berlin. Знаменитий виклад вавілонської математики маємо в книзі O. Neugebauer, Vorlesungen uber die Gesch. der antiken mathemat. Wissenschaften, 1 Bd. Vorgriechische Mathematik, Berlin, 1934.

** Archimedis Opera omnia, ed. J. L. Heiberg, vol. I. Lipsiae, „*Κύκλου μέτρησις*", стор. 24[illegible]. В III томі цього видання знаходимо Євтокієві (VI ст. н. е.) обчислення Архімедового наближення (Eutocii commentarius in dimensionem circuli, o. cit. vol. III, стор. 227—261).

2. Розглянемо дев'яту теорему другої книги Евклідових „Елементів". Ця теорема та її доведення являють собою типовий приклад „геометричної алгебри" стародавніх греків. Друга книга „Елементів" містить у собі численні застосування теореми Піфагора до доведення всяких алгебричних формул, поданих у геометричному вигляді.

Теорема 9. Якщо поділимо відрізок AB на дві рівні частини $A\Gamma$ і ΓB та на дві нерівні частини $A\Delta$ і ΔB (де Δ — довільна точка між Γ і B), то сума квадратів, побудованих на нерівних частинах, дорівнює подвійній сумі квадратів, з яких один побудований на половині $A\Gamma$, а другий на відрізку, що лежить між точками поділу Γ і Δ.



Отже, Евклід доводить, що:

$$A\Delta^2 + \Delta B^2 = 2\left(A\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2\right)$$

і для доведення креслить прямокутний і рівнораменний трикутник ABE, відрізки $E\Gamma \perp AB$, $\Delta Z \perp AB$, $ZH \perp E\Gamma$ та зводить A з Z.

Потім доводить з педантичною точністю, що трикутники $EA\Gamma$, $E\Gamma B$, EHZ і $Z\Delta B$ також прямокутні і рівнораменні. Нарешті з рівностей:

$$EA^2 = 2A\Gamma^2,\ EZ^2 = 2HZ^2 = 2\Gamma\Delta^2,$$

$$EA^2 + EZ^2 = 2\left(A\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2\right),$$

$$AZ^2 = AE^2 + EZ^2 = 2\left(A\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2\right),$$

$$AZ^2 = A\Delta^2 + \Delta Z^2,$$

$$A\Delta^2 + \Delta Z^2 + 2\left(A\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2\right) \text{ і } \Delta Z = \Delta B$$

одержує $A\Delta^2 + \Delta B^2 = 2\left(A\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2\right)$, що й треба довести.

3. Вже Г. Цейтен* зауважив, що наведена теорема може послужити для обчислення з довільним наближенням другого кореня з числа 2. Покажу, як можна Евклідову формулу змодифікувати, щоб з її алгебричної інтерпретації можна було вивести легкий спосіб обчислення другого кореня з довільного натурального числа.

Розглянемо форму:

$nx_1^2 - y_1^2$, де n — натуральне число та x_1 і y_1 будь-які натуральні числа.

Покладемо: $x_2 = x_1 + y_1$, $y_2 = nx_1 + y_1$.

З цього одержуємо:

$$nx_2^2 - y_2^2 = -(n-1)\left(nx_1^2 - y_1^2\right).$$

Приймаючи: $x_3 = x_2 + y_2$, $y_3 = nx_2 + y_2$ і т. д., одержуємо таку послідовність формул:

$$nx_2^2 - y_2^2 = -(n-1)\left(nx_1^2 - y_1^2\right),$$

$$nx_3^2 - y_3^2 = +(n-1)^2\left(nx_1^2 - y_1^2\right),$$

$$nx_4^2 - y_4^2 = -(n-1)^3\left(nx_1^2 - y_1^2\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$nx_i^2 - y_i^2 = (-1)^{i+1}(n-1)^{i-1}\left(nx_1^2 - y_1^2\right).$$

Приймемо: $nx_1^2 - y_1^2 = 1$**, як перше наближення.

Одержимо послідовність формул

$$nx_i^2 - y_i^2 = (-1)^{2+1}(n-1)^{i-1},$$

які можна написати в такому вигляді:

---

* H. G. Zeuthen. Histoire des Mathematiques dans l'antiquite et le moyen âge. Paris, 1902, стор. 47—48. Див. також: Gli elementi d'Euclide e la critica antica e moderna, editi da Federigo Enriques, Roma, 1925, стор. 1 5. Heath T. L., A history of greck mathematiks, Oxford, 1921, стор. 398. N. Chuquet, Le triparty en la sciense des nombres, 1484.

** Це відоме рівняння Пелля; ми бачимо, як близькі були грецькі математики до теорії неперервних дробів, до теорії зредукованих чисел та до інших понять теорії чисел. Див. праці Paul Tannery: Memoires scientifiques, 5 томів, 1912—1922.

$$\frac{y_1}{x_1}=\sqrt{n-\frac{1}{x_1^2}},$$

$$\frac{y_2}{x_2}=\sqrt{n+\frac{n-1}{x_2^2}},$$

$$\frac{y_3}{x_3}=\sqrt{n-\frac{(n-1)^2}{x_3^2}}, \qquad (\alpha)$$

$$\frac{y_i}{x_i}=\sqrt{n+(-1)^i\,\frac{(n-1)^{i-1}}{x_i^2}}.$$

Послідовність $\left\{\frac{(n-1)^i}{x_i^2}\right\}$ сходиться до нуля, отже формули (α) дають наближення другого кореня з числа n ($n \geqslant 2$), якщо замість x_1 і y_1 підставимо, наприклад, $x_1 = y_1 = 1$ або ще краще $x_1 = 1$, а y_1 нехай дорівнює найбільшому з натуральних чисел, квадрат яких не більший ніж n.

Розглянемо один приклад, щоб побачити, як обчислюються за формулами (α) другі корені з натуральних чисел.

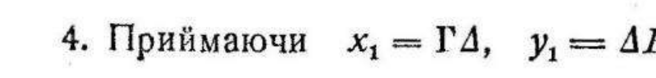
Приймемо $n=10$. З формул $x_i = x_{i-1} + y_{i-1}$, $y_i = nx_{i-1} + y_{i-1}$, одержуємо таблицю ($x_1 = 1$, $y_1 = 3$):

x_i	1	4	17	70	293	2216
y_i	3	13	53	223	923	3856

Маємо збіжну до $\sqrt{10}$ послідовність дробів:

$$\frac{3}{1} \quad \frac{13}{4} \quad \frac{53}{17} \quad \frac{223}{70} \quad \frac{923}{293} \quad \frac{3856}{1216} \to \sqrt{10}$$

4. Приймаючи $x_1 = \Gamma\Delta$, $y_1 = \Delta B$ та $n = 2$, одержуємо окремий випадок наведених у попередньому уступі формул і обчислень, який являється



безпосереднім висновком Евклідової формули. Приймаючи $A\Delta = y_2 = 2x_1 + y_1$, $A\Gamma = x_2 = x_1 + y_1$, одержуємо формулу $2x_2^2 - y_2^2 = -\left(2x_1^2 - y_1^2\right)$, яка дає змогу обчислювати наближені вартості другого кореня з числа 2 і яка є ідентична формулі Евкліда:

$$2A\Gamma^2 - A\Delta^2 = -(2\Gamma\Delta^2 - B\Delta^2).$$

Розглянемо ще зміст десятої теореми другої книги „Елементів“.

Довільний відрізок AB ділимо точкою Г на дві рівні частини. Точка Δ — довільна точка на продовженні відрізка AB. Евклід доводить, що $A\Delta^2 + \Delta B^2 = 2\, A\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2$).

З вигляду цієї рівності виходить, що вона може також послужити для набл женого обчислення другого кореня з числа 2, а геометрично вона різниться від дев'ят ї теореми тільки тим, що точка Δ ділить той відрізок AB зовнішньо у довільному відношенні.

5. Доведемо ще, що послідовність $\left\{\frac{(n-1)^{i-1}}{x_i^2}\right\}$ (див. рівності α) сходиться до нуля, якщо $i \to \infty$.

Досить, очевидно, розглянути випадок $x_1 = y_1 = 1$, бо кожне з чисел $x_2, x_3, x_4, \ldots$ стає більшим, якщо замість x_1 і y_1 приймемо натуральні числа більші ніж одиниця. Неважко перевірити, що числа x_i, y_i визначені формулами:

$$x_1 = 1,\ y_1 = 1,$$
$$x_{i+1} = x_i + y_i, \quad y_{i+1} = nx_i + y_i$$

можна написати у вигляді:

$$x_i = n^{\frac{i-1}{2}} + \binom{i}{2} n^{\frac{i-3}{2}} + \binom{i}{4} n^{\frac{i-5}{2}} + \ldots + i, \quad \text{для непарного } i,$$

$$x_i = \binom{i}{1} n^{\frac{i-2}{2}} + \binom{i}{3} n^{\frac{i-4}{2}} + \binom{i}{5} n^{\frac{i-6}{2}} + \ldots + i, \quad \text{для парного } i^*.$$

Для непарних індексів, маємо:

$$\frac{(n-1)^{i-1}}{x_i^2} = \frac{(n-1)^{i-1}}{\left\{n^{\frac{i-1}{2}} + \binom{i}{2} n^{\frac{i-3}{2}} + \binom{i}{4} n^{\frac{i-5}{2}} + \ldots + i\right\}^2} =$$

$$= \left(\frac{n-1}{n}\right)^{i-1} \cdot \frac{1}{\left\{1 + \binom{i}{2}\frac{1}{n} + \binom{i}{4}\frac{1}{n^2} + \ldots + i\,\frac{1}{n^{\frac{i-1}{2}}}\right\}^2} < \left(\frac{n-1}{n}\right)^{i-1}.$$

---

* $y_i = \binom{i}{2} n^{\frac{i-1}{2}} + \binom{i}{3} n^{\frac{i-3}{2}} + \binom{i}{5} n^{\frac{i-5}{2}} + \ldots + 1$, для непарного i

$y_i = n^{\frac{i}{2}} + \binom{i}{2} n^{\frac{i-2}{2}} + \binom{i}{4} n^{\frac{i-4}{2}} + \ldots + 1$, для парного i.

Звідси виходить:

$$\lim_{i \to \infty} \frac{(n-1)^{i-1}}{x_i^2} = O, \text{ для довільного натурального } n.$$

Для парних індексів i маємо:

$$\frac{(n-1)^{i-1}}{x_i^2} = \frac{(n-1)^{i-1}}{\left\{\binom{i}{1} n^{\frac{i-2}{2}} + \binom{i}{3} n^{\frac{i-4}{2}} + \binom{i}{5} n^{\frac{i-6}{2}} + \ldots + i\right\}^2} =$$

$$= n\left(\frac{n-1}{n}\right)^{i-1} \cdot \frac{1}{\left\{\binom{i}{1} + \binom{i}{3}\frac{1}{n} + \binom{i}{5}\frac{1}{n^2} + \ldots + i\frac{1}{n^{\frac{i-2}{2}}}\right\}^2} < n\left(\frac{n-1}{n}\right)^{i-1}.$$

Звідси виходить:

$$\lim_{i \to \infty} \frac{(n-1)^{i-1}}{x_i^2} = O, \text{ для } n = 1, 2, 3, \ldots$$

М. О. ЗАРИЦКИЙ. ЗАМЕЧАНИЕ О ПРИБЛИЖЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ ДРЕВНИХ ГРЕКОВ.

Резюме

Я показываю возможность следующих действий при вычислении $\sqrt{n}$ в древнегреческой математике:

Положим $x_2 = x_1 + y_1$, $y_2 = nx_1 + y_1$, где n, x_1 и y_1 — натуральные числа. В результате: $nx_2^2 - y_2^2 = -(n-1)\ (nx_1^2 - y_1^2)$.

Положив $x_i = x_{i-1} + y_{i-1}$, $y_i = nx_{i-1} + y_{i-1}$, находим, что

$$nx_i^1 - y_i^2 = (-1)^{i+1}\,(n-1)^{i-1}\ (nx_1^2 - y_1^2.$$

Предположив, что $nx_1^2 - y_1^2 = 1$, получаем

$$\frac{y_i}{x_i} = \sqrt{n + (-1)^i \frac{(n-1)^{i-1}}{x_i^2}}.$$

Так как $\lim\limits_{i \to \infty} \frac{(n-1)^{i-1}}{x_i^2} = o$, то мы получаем, что $\sqrt{n} = \lim\limits_{i \to \infty} \frac{y_i}{x_i}$.
