Наукові записки Львівського Державного Університету імені Ів. Франка
Том V Серія фізико-математична, вип. 1 1947

Г. Л. БУЙМОЛА

КОЕФІЦІЄНТ ТОЧНОСТІ ГЕОМЕТРИЧНИХ ПОБУДОВ

Як відомо, поняття простоти побудови було введене Лемуаном (E. Lemoine „Géométrographie on art des constructions géométriques", 1902).

Найпростішою вважається, за Лемуаном, та побудова, яка вимагає найменшого числа проведення операцій циркулем та лінійкою. Пгичому всі операції: C_1, C_2, C_3, R_1, R_2..., що розрізняє Лемуан, треба вважати однаково простими. Він покладає: $C_1 = C_2 = C_3 = R_1 = R_2 = 1$. В зв'язку з використанням інших прилад в рисуванні пізніше були введені такі символи: W_1, ξ_1, η_1, P_1, що позначають відповідно деякі характерні операції розміщення угольника в площині рисунку та повторні операції циркулем і лінійкою. Отже, загальний Лемуанів символ побудови можна було б тепер записати у такому вигляді: $OP(n_1 R_1 + n_2 R_2 + n_3 C_1 + n_4 C_2 + n_5 C_3 + n_6 P_1 + n_7 W_1 + n_8 \xi_1 + n_9 \eta_1)$, де також треба покласти: $C_1 = C_2 = C_3 = R_1 = R_2 = P_1 = W_1 = \xi_1 = \eta_1 = 1$. Сума $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 + n_7 + n_8 + n_9 = S$ і визначає собою простоту побудови, або коефіцієнт простоти. Отже, простота побудови залежить тільки від числа проведених операцій рисувальними приладдями. Найпростіше розв'язання задачі на побудову, тобто таке, якому відповідає найменше число S, Лемуан назвав геометрографічним її розв'язанням.

Щодо визначення простоти побудови та геометрографічного розв'язання задачі ми маємо ряд критичних зауважень Адлера (А. Адлер „Теория геометрических построений", переклад з німецького під редакцією Шатуновського. Одеса, 1910), Бемера (P. Böhmer „Über geometrische Approximation" inangural Dissertation zur Erlangung der Doktorwürde. Berlin, 1904), Каргіна (Д. И. Каргин „Точность графических расчётов" — дисертація на степінь доктора технічних наук. Ленінград, 1937).

Всі ці зауваження в основному зводяться до того, що поняття геометрографічного розв'язання не задовольняє практиків хоча б тому, що при такому визначенні не можна з певністю стверджувати, що знайдене розв'язання вже геометрографічне.

Справді, це потребує доведення. Але ні Лемуан, ні його послідовники доведення цього не подали.

Бемер говорить, що встановлення простоти побудови є діло практики, а не теорії. Для теорії має значення точність виконаного рисунку, а не те, яким шляхом він виконаний і скільки проведено при цьому рисувальних операцій, бо найпростіше розв'язання задачі, в розумінні Лемуана, може бути не самим точним її розв'язанням.

Точність же побудови Лемуан характеризує числом проведених підготовчих операцій рисування $E = n_1 + n_2 + n_4 + n_6 + n_7 + n_8 + n_9$.

Але оскільки цілком очевидно, що точність залежить не лише від числа підготовчих операцій, а й в більшій мірі від ряду інших причин, тому це число не має ніякої практичної ваги і тому ним зовсім не користуються.

Бемер вказує метод обчислення величини помилки побудови, виходячи з того, що розглядає елементи рисунку (точки і прямі), як фізичні образи ідеальних геометричних елементів. При цьому він враховує фізіологічні властивості ока людини та фізичні властивості рисувальних приладь. Він досліджує ті „області помилок", в межах яких можливі відхилення від дійсного положення шуканих елементів. Причому найбільшу, або граничну, помилку („відхилення") остаточної побудови він і приймає за точність всієї побудови.

Він ставить задачу: відшукати з усіх можливих розв'язань даної задачі те, яке дало б мінімальну граничну помилку („відхилення").

Отже, тут мова йде лише про абсолютну величину помилки, що зроблена під час побудови. Правда, далі Бемер вказує на можливість обчислення відносної помилки побудови, але сам цієї роботи не проводить, а зупиняється лише на обчисленні абсолютної величини остаточної, або граничної, помилки побудови, яку і вважає за величину помилки всієї проведеної побудови.

Зауважимо тут, що величина помилки побудови сама по собі ще не характеризує точності побудови в цілому. Вона може бути й незначною, але точність виконаного рисунку буде невелика і навпаки.

Це залежить, наприклад, і від того, в якому масштабі виконано рисунок.

Величину помилки побудови часто і приймають в практиці за точність побудови. Насправді ж точність побудови краще виразити певним числом, що характеризувало б якість побудови.

За таке число можна взяти відношення деякого початкового відхилення точки чи прямої, що обумовлюється фізіологічними особливостями нашого ока, до граничного або найбільшого відхилення, яке дістаємо внаслідок остаточної побудови. Це число можна назвати коефіцієнтом точності.

* * *

Практично рисунок виконується на аркуші паперу при допомозі циркуля, лінійки та угольника. Допоміжним знаряддям є олівець, рейсфедер, або перо, з допомогою яких рисуються лінії і позначаються точки на рисунку.

В практичному рисуванні ми маємо два роди речей: реальні точки — плями і реальні лінії — смужки, які являються елементами рисунку.

Якщо при нормальній дальності зору в 25 см найменша видима (гранична) ширина смужки і діаметр плями, які фактично приймаємо за точку і пряму, будуть відповідно ε_1 і ε_2, то, зважаючи на те, що видимість залежить ще від інтенсивності освітлення і багатьох інших причин (наприклад, втома зору, що має місце при спостереженні, виключає можливість довго спостерігати на межі зорових вражень і т. ін.), можна прийти до висновку, що найменша ширина дійсно виконаної (нарисованої) смужки і діаметр плями повинні бути більшими за граничні величини ε_1 і ε_2.

Позначимо цю найменшу ширину смужки і найменший діаметр плями відповідно через $2\omega_1 > \varepsilon_1$ і $2\omega_2 > \varepsilon_2$.

Причому будемо вважати, що:

1. Всяка пляма, яку приймаємо ми за реальну точку, позначену на рисунку з допомогою пера чи уколу ніжки циркуля, міститься в середині кола, радіус якого не перевищує певної величини ω_2 як свого максимуму. Це коло замінює собою геометричну точку, а саме — геометричний центр плями.

2. Кожна смужка, яку ми приймаємо за реальну пряму (позначена в полі рисунку з допомогою пера чи рейсфедера), обмежена двома паралельними прямими, віддаль між якими не перевищує $2\omega_1$ як свого максимуму. Тоді кожна така смужка замінює собою геометричну пряму, а саме — середню лінію смужки.

3. Кожна кільцева смужка (позначена в полі рисунку з допомогою циркуля), яку ми приймаємо за реальне коло, обмежена двома концентричними колами. Тоді кожна кільцева смужка, ширина якої не більша $2\omega_1$, замінює собою

геометричне коло, а саме — середню лінію кільцевої смужки.

Важливим вихідним принципом всіх побудов в рисуванні будемо вважати принцип сумісного положення плям і смужок, або так званий принцип інцидентності складових елементів рисунку. Цьому принципу надають таке формулювання, беручи до уваги фізіологічні особливості сприймання.

Пляму і смужку слід вважати інцидентними, якщо їх не можна відрізнити окремо одне від другого. Це має місце тоді, коли найменша віддаль їх контурів не досягає деякої величини ε.

В зв'язку з цим введемо такі три величини (рис. 1): $\omega_1' = \omega_1 + \frac{\varepsilon}{2}$; $\omega_2' = \omega_2 + \frac{\varepsilon}{2}$; $\omega_0 = \omega_1' + \omega_2'$ і будемо вважати,

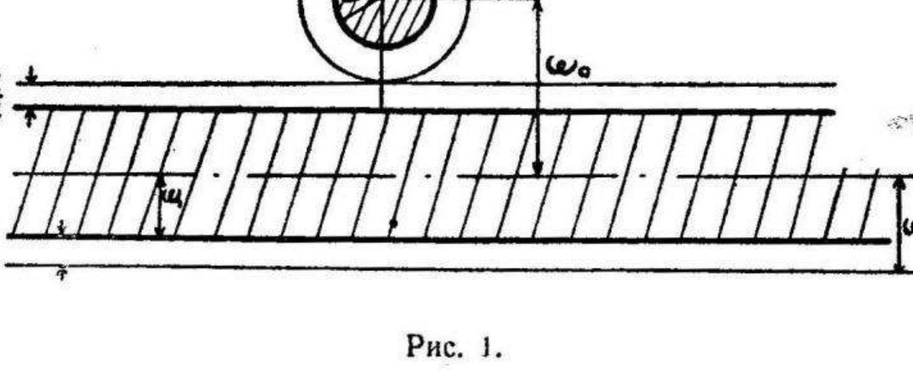

Рис. 1.

що інцидентність має місце, якщо віддаль центра плями від середньої лінії смужки не перевищує ω_0 як свого максимуму.

Дві плями не відрізняються одна від другої, якщо віддаль між їх центрами не більше $2\omega_1'$, тобто, якщо вони містяться разом в середині деякого кола, радіус якого ніколи не перевищує ω_0 (рис. 2).

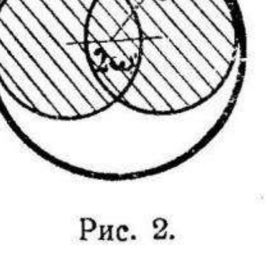

Рис. 2.

Такі плями будемо також називати інцидентними.

Розглядаючи сукупності реальних геометричних образів (точок і прямих) на рисунку, ми приходимо до поняття „області відхилення", тобто тієї області рисунку, в межах якої можливе непомітне відхилення збудованого геометричного образу від ідеального його положення. Остаточна помилка якоїсь побудови являє собою деяку пляму помилок, що виникає внаслідок появи „областей відхилень“, які самі виникають при елементарних операціях. Важливо, звичайно, визначити не тільки величину цієї помилки, а й схарактеризувати степінь точності виконаної побудови.

З цією метою при розв'язуванні будь-якої геометричної задачі на побудову ми будемо розрізняти помилки двох типів:

1) „помилку ширини“, тобто лінійну помилку, яку будемо звати просто „відхиленням“;

2) „площу помилок“.

Перший тип помилок зустрічається в побудові при фіксуванні точки на прямій, а також при проведенні прямої через одну або дві точки.

Такого типу буде остаточна помилка, що з'являється в побудові при розв'язуванні задач, у яких шуканим елементом є пряма.

Збудована пряма (що являється розв'язкою задачі), як би точно ми побудову не проводили, завжди буде відхилятися від ідеально-геометричного положення її, тобто від того положення, яке б вона займала, коли б ми мали змогу будувати ідеально-геометричні прямі та точки.

Проте, оскільки на рисунку ми маємо справу не з ідеально-геометричними точками та прямими, а лише з їх фі-

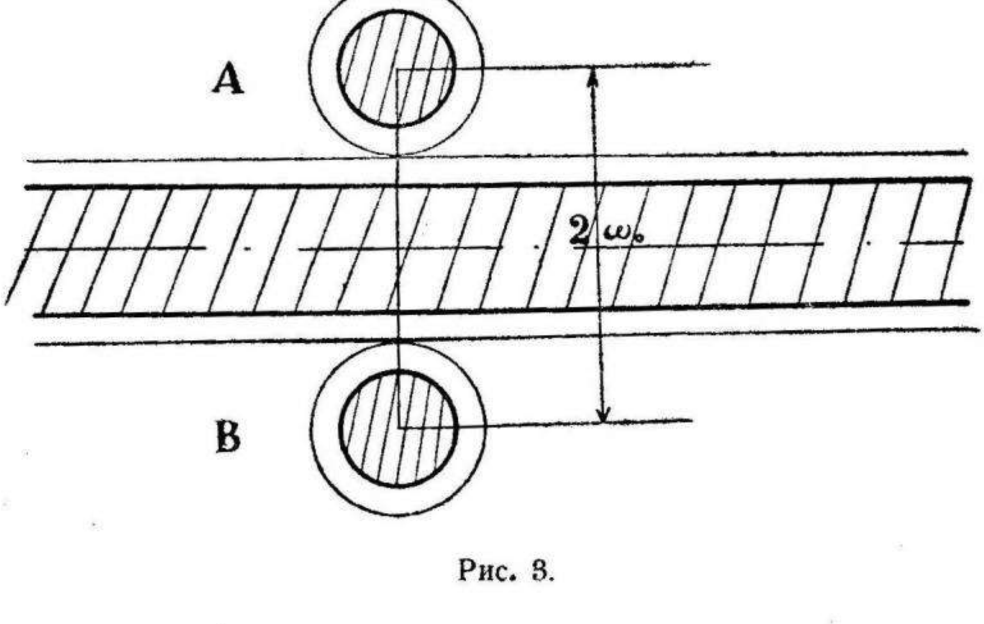

Рис. 3.

зичними образами, то природно, що остаточне положення збудованої прямої буде відхилятись від ідеально-геометричного її положення. Лінійна величина цього відхилення і буде

„помилкою ширини", або просто „відхиленням", що з'являється в побудові.

Другий тип помилок з'являється в побудові і при будь-якому графічному визначенні положення точки (перетином ліній або встановленням ніжки циркуля чи пера в графічно задану точку).

Отже, цей тип помилок з'являється в побудові при розв'язуванні задач, у яких шуканим елементом є точка. „Відхилення", рівне діаметрові плями (точки) та ширині нарисованої смужки (лінії), тобто рівне $2\omega_2' + 2\omega_1' = 2\omega_0 = AB$ (рис. 3), назвемо „одиничним відхиленням", або **одиничною помилкою першого типу**.

Будемо позначати його через t_1. За одиничну помилку другого типу, тобто за „одиничну площу помилок" ми візьмемо „площу помилок", рівну $2\omega_0 \cdot 2\omega_0 = 4\omega_0^2$ (рис. 4). Ця

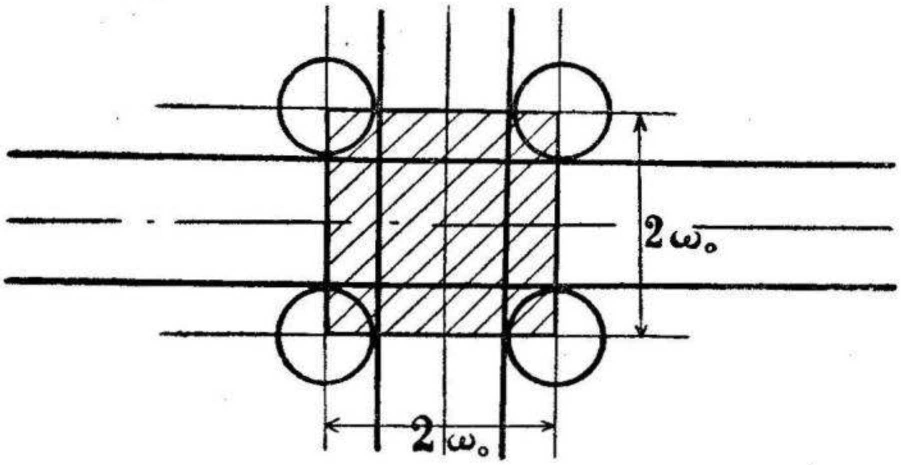

Рис. 4.

площа одержується внаслідок визначення точки перетином двох реальних прямих (смужок) під прямим кутом. Будемо позначати її через t_2.

Найбільше крайнє, або граничне можливе „відхилення", яке дістаємо внаслідок побудови прямої, ми будемо називати **граничною помилкою побудови прямої** і позначатимемо через T_1.

Найбільшу граничну „площу помилок", яку дістаємо внаслідок побудови точки, ми зватимемо **граничною помилкою побудови точки**, або „**граничною площею помилок**", і будемо позначати через T_2.

Для того, щоб судити про точність розв'язання задачі на побудову, щоб мати змогу порівнювати точність розв'язань однієї і тієї ж задачі різними способами або різних поміж собою задач, необхідно мати міру точності. За міру точності побудови ми візьмемо відношення одиничної помилки до граничної помилки T.

Тобто, точність побудови ми будемо характеризувати відношенням $\frac{t}{T} = K_\alpha$.

Число K_α назвемо коефіцієнтом точності побудови. Отже, коефіцієнтом точності побудови, у якого шуканим елементом є пряма, буде $K_1 = \frac{t_1}{T_1}$, а коефіцієнт точності побудови, у якого шуканим елементом є точка, буде $K_2 = \frac{t_2}{T_2}$.

Зауважимо, що завжди $t_1 = \sqrt{t_2}$. Отже, якщо $K_1 = \sqrt{K_2}$, то побудови будуть одного порядку точності. Звідси видно, що чим більший коефіцієнт K_α, тим більша точність побудови. Те розв'язання задачі на побудову, при якому дістаємо максимальне значення K_α, будемо вважати кращим її розв'язанням.

Застосовуючи введені поняття, ми зможемо тепер кожну Лемуанову елементарну операцію рисування схарактеризувати певним числом — коефіцієнтом точності цієї операції, обчисленим за вказаним принципом.

Так, наприклад, розглядаючи операцію встановлення ніжки циркуля (чи взагалі вістря пера, олівця) в реальну точку (пляма) як позначення в полі рисунку плями інцидентної заданій плямі чи смужці, ми можемо обчислити коефіцієнт точності операції C_1 так: $K_{c_1} = \frac{4\omega_0^2}{I/\omega_0^2} = 1{,}27\ldots$, де I/ω_0^2 — площа кола, що являє собою „граничну площу помилок". Щождо встановлення ніжки циркуля в точку перетину двох прямих під довільним кутом α, а також в точку перетину двох кривих (якщо елемент кривої замінити поблизу точки перетину дотичною), то „областю відхилення" буде та частина площини рисунку, на якій розміщені геометричні центри всіх плям інцидентних обом заданим прямим (рис. *i*). Ця частина площини носить назву „площі відхилень" або „площі помилок". Її форма і величина залежить в основному лише від кута α, під яким перетинаються ці прямі. Якщо позначити площу помилок через T_2, то ця залежність виразиться такою формулою: $T_2 = \frac{4\omega_0^2}{\operatorname{Sin}\alpha}$ і коефіцієнт точності операції $c_1 - K_{c_1} = \frac{4\omega_0^2}{T_2} = \operatorname{Sin}\alpha$. Для $\alpha = 60^0$ будемо мати $K_{c_1} = 0{,}86\ldots$ Звідси очевидно, що коефіцієнт точності встановлення ніжки циркуля в точку перетину двох прямих під прямим кутом дорівнює одиниці, що, між іншим, видно із прийнятого визначення „одиничної площі помилок".

Розглянемо тепер Лемуанову операцію C_2 — встановлення ніжки циркуля в довільну точку заданої лінії.

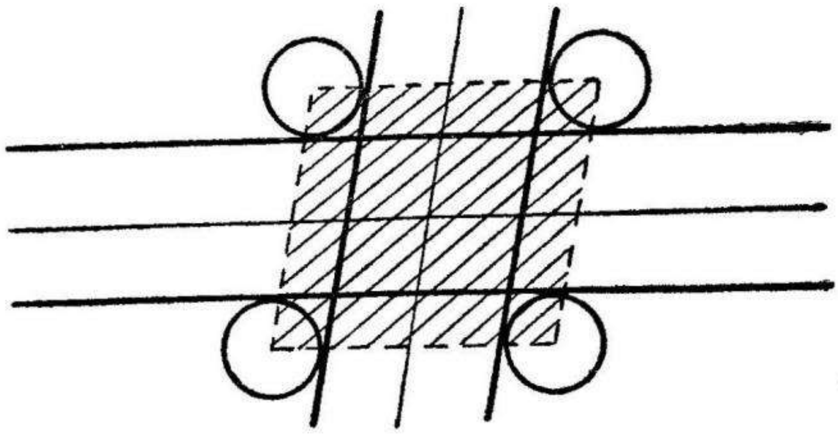

Рис. 5.

Сумісне положення (інцидентність) реальної точки (плями) та реальної лінії (смужки) утворює „відхилення" $\omega_0 = \omega_1' + \omega_2'$ в ту і другу сторону. Тому $K_{c_2} = \frac{2\omega_0}{2\omega_0} = 1$.

Точність прикладування лінійки до заданої графічної точки — $Op(R_1)$ — характеризується величиною ω_0.

Тобто операції $Op(R_1)$ і $Op(c_2)$ приймаються рівноточними.

Тоді: $K_{R_1} = \frac{2\omega_0}{2\omega_0} = 1$.

Операцію прикладування лінійки до двох заданих точок $(2R_1)$ можна схарактеризувати коефіцієнтом точності $K_{2R_1} = \frac{2\omega_0}{2\beta}$, де 2β — „граничне відхилення" проведеної прямої (смужки) через дві задані точки (плями) від ідеально-геометричного її положення.

Величина відрізку 2β нормального до лінії центрів тих кіл, що являють собою реальні точки A та B (рис. 6) (тобто до ідеальної прямої AB), в точці x залежить від відношення $\lambda = XA:XB$. Для різних ділянок (I, II, III) прямої AB це відхилення буде дорівнювати:

$$1)\quad 2\beta_{\mathrm{I}} = 2\frac{\lambda\omega_0 + \omega_0}{1-\lambda}; \qquad 2)\quad 2\beta_{\mathrm{II}} = 2\frac{\lambda\omega_0 - \omega_0}{\lambda - 1} = 2\omega_0;$$

$$3) \quad 2\beta_{III} = 2\frac{\lambda\omega_0 + \omega_0}{\lambda - 1}.$$

Якщо відхилення розглядається в точках лише на відрізку AB, то $2\beta_{II} = 2\omega_0$ і коефіцієнт точності у цьому випадку дорівнює $K_{2R_1} = \frac{2\omega_0}{2\omega_0} = 1$.

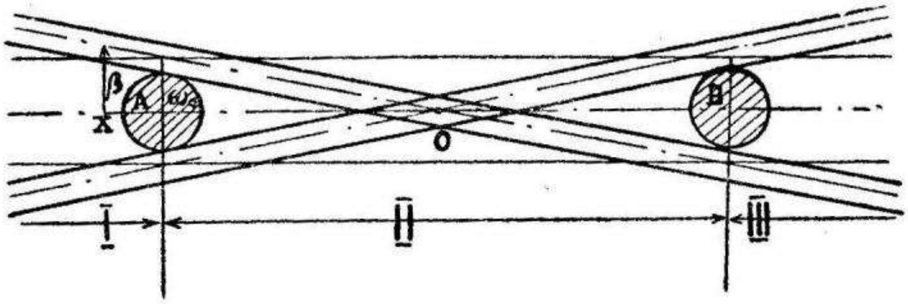

Рис. 6.

Аналогічним способом, очевидно, можна встановити коефіцієнт точності і для інших елементарних операцій, що вживаються в рисуванні.

Зокрема. для операцій (R_2) і (C_3) — рисування прямої та кола — коефіцієнт точності можна умовно вважати рівним одиниці.

Таке припущення стверджується наслідками експериментальних досліджень цих операцій, проведених Каргіним.

В складніших випадках, коли помилка побудови („відхилення") з'являється внаслідок цілого ряду елементарних побудов, треба брати до уваги не тільки ті „відхилення", що повстають під час проведення елементарних операцій рисування, а й „к о м п о н е н т и" їх (тобто ортогональні проекції відхилень на певний напрям), що, входячи в слідуючу область „відхилень", яка з'являється внаслідок дальнішої побудови, сприяють нарощуванню помилки

Отже, остаточна помилка побудови являє собою деяку пляму „помилок", яка з'являється внаслідок появи „відхилень", що виникають при елементарних операціях та „компонентів відхилень".

Розглядаємо тепер декілька прикладів на обчислення коефіцієнта точності основних геометричних побудов.

1. ПОДІЛИТИ ЗАДАНИЙ ВІДРІЗОК ПОПОЛАМ

Хай задано графічно відрізок AB (рис. 7). Для розв'язання цієї задачі описують з точки A та B, як з центрів, послідовно два кола довільним радіусом При цьому можливі такі помилки: 1). При встановленні ніжки циркуля в точку

A „відхилення" буде дорівнювати $2\omega_0$. Те ж саме в точку B, поскільки операції встановлення ніжки циркуля як в точку A, так і в точку B цілком однакові і, крім того, одна від другої не залежить.

2). В точках перетину дуг C і D, очевидно, також „площі помилок" будуть однакові і кожна з них може бути обчислена так: „компоненти помилок" вздовж AC та BC будуть рівні, $\omega_a = \omega_b = \omega_0 \operatorname{Sin} \alpha$.

„Площа помилок" в точці C буде: $T_c = \frac{\omega_0^2 (\operatorname{Sin} \alpha + 2)^2}{\operatorname{Sin} \gamma}$, де γ — кут, під яким перетинаються дуги.

Точність побудови точок C і D, очевидно, буде найбільшою, якщо „площа помилок" в точках C і D буде мінімальною. А це може бути тоді, коли кут перетину дуг γ буде дорівнювати $\frac{\pi}{2}$.

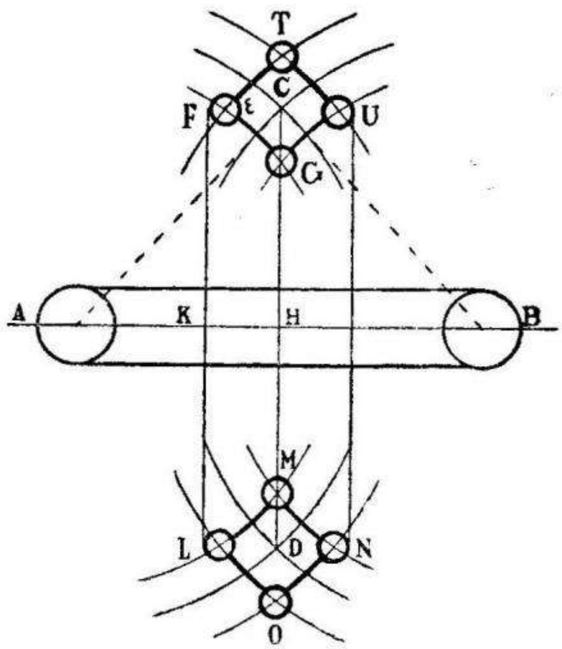

Рис. 7.

Тоді радіуси кіл будуть рівні $\frac{AB^2}{2} \approx 0{,}7\,AB$, трохи більшими за половину AB, як це здебільшого і вживають в рисуванні.

Обчислимо коефіцієнт точності побудови точки C. $K_c = \frac{t_2}{T} = \frac{4\omega_0^2 \operatorname{Sin} \gamma}{\omega_0^2 (\operatorname{Sin} \alpha + 2)^2}$, і якщо $\gamma = \frac{\pi}{2}$, то коефіцієнт точності побудови точки C буде:

$$K_c = 0{,}54\ldots$$

Щоб обчислити відхилення, яке має місце при проведенні прямої, яка сполучає точки C і D, треба обчислити спочатку „компоненти відхилення" в точках C і D на AB, які й можна наближено прийняти за величину помилки поділу відрізка AB пополам, а також побудову перпендикуляра до середини заданого відрізка.

Тому щонайбільше „відхилення" ми одержуємо у випадку одностороннього дотику прямої EL „площі помилок" в точках C і D, максимальне зміщення перпендикуляра CD буде рівне KH. Величина KH і є „компонент відхилення" в точках C і D на AB. Величину KH можна розглядати, як проекцію $(GE+EF)$ на AB, причому $GE=\omega_0 \operatorname{Sin}\alpha+2\omega_0$, а $EF=\omega_0$, тобто величині тієї помилки, що виникає при прикладуванні лінійки до точки.

Отже, проекція $[(\omega_0 \operatorname{Sin}\alpha+2\omega_0)+\omega_0]$ на AB повинна дати нам „відхилення“ (рівне KH) перпендикуляра CD від дійсного його положення.

$$KH=\omega_0(\operatorname{Sin}\alpha+2)\operatorname{Cos}(GE,\hat{AB})+\omega_0\operatorname{Cos}(EF,\hat{AB})=$$
$$=\omega_0[(\operatorname{Sin}\alpha+2)\operatorname{Cos}\alpha+1],$$

якщо покласти кут $(GE,\hat{AB})=\alpha$, а між EF та $AB=0$.

Отже, $KH=\omega_0(\operatorname{Sin}\alpha\operatorname{Cos}\alpha+2\operatorname{Cos}\alpha+1)$.

Ця найбільша величина „відхилення“ буде при умові $\alpha=\frac{\pi}{4}$ дорівнювати: $KH\approx 2{,}9\,\omega_0$.

Якщо вважати, за Бемером, величину $\omega_0=0{,}08$ мм, то дістанемо $KH=0{,}23$ мм. Це і є величина помилки поділу відрізку пополам і побудування перпендикуляра в середині відрізку. Коефіцієнт точності цієї побудови буде дорівнювати відношенню $\frac{2\omega_0}{T_1}$, де „граничне відхилення“ $T_1=2KH$. Або при вказаних умовах: $K_{CD}=\frac{2\omega_0}{2\cdot 2{,}9\omega_0}=0{,}34\ldots$ Величина цього відношення прямо пропорціональна точності побудови, тобто чим більше відношення, тим більша точність побудови.

Порівнюючи коефіцієнти точності побудови точки C і D та прямої CD, ми бачимо, що, оскільки $t_1=\sqrt{t_2}$, $\sqrt{K_c}=0{,}734\ldots$, а $K_{CD}=0{,}34\ldots$, порядок точності побудови не однаковий.

2. ПОДІЛ КУТА ПОПОЛАМ

Розглянемо кут $ASB=\alpha$ (рис. 8). Щоб поділити його пополам, опишемо дугу з точки S, як центра, довільним радіусом r.

При встановленні ніжки циркуля в точку S ми робимо помилку, яка характеризується „площею помилок“

$$T_s=\frac{4\omega_0^2}{\operatorname{Sin}\alpha}.$$

„Компонент відхилень“ в точці S на напрям SA, який позначимо через ω_s, буде:

$$\omega_s=\omega_0\operatorname{Cos}(90-\alpha)=\omega_0\operatorname{Sin}\alpha.$$

Тоді „відхилення“ $MN = \omega_0 \operatorname{Sin} \alpha + 2\omega_0 = \omega_0 (\operatorname{Sin} \alpha + 2) = \omega_0 f(\alpha)$, де $f(\alpha) = \operatorname{Sin} \alpha + 2$.

„Площа помилок“ в точці A буде дорівнювати

$$T_A = 2\omega_0^2 f(\alpha).$$

Аналогічно можна обчислити відхилення KL і „площу помилок“ в точці B.

Далі з точок A та B, як центрів, опишемо дуги рівними радіусами, більшими за половину AB, $(R = 0{,}7\,AB)$, що перетнуться в точці C.

При такому радіусі R дуги перетнуться під кутом, близьким до прямого, і тоді „площа помилок“ в точці $C - T_c$

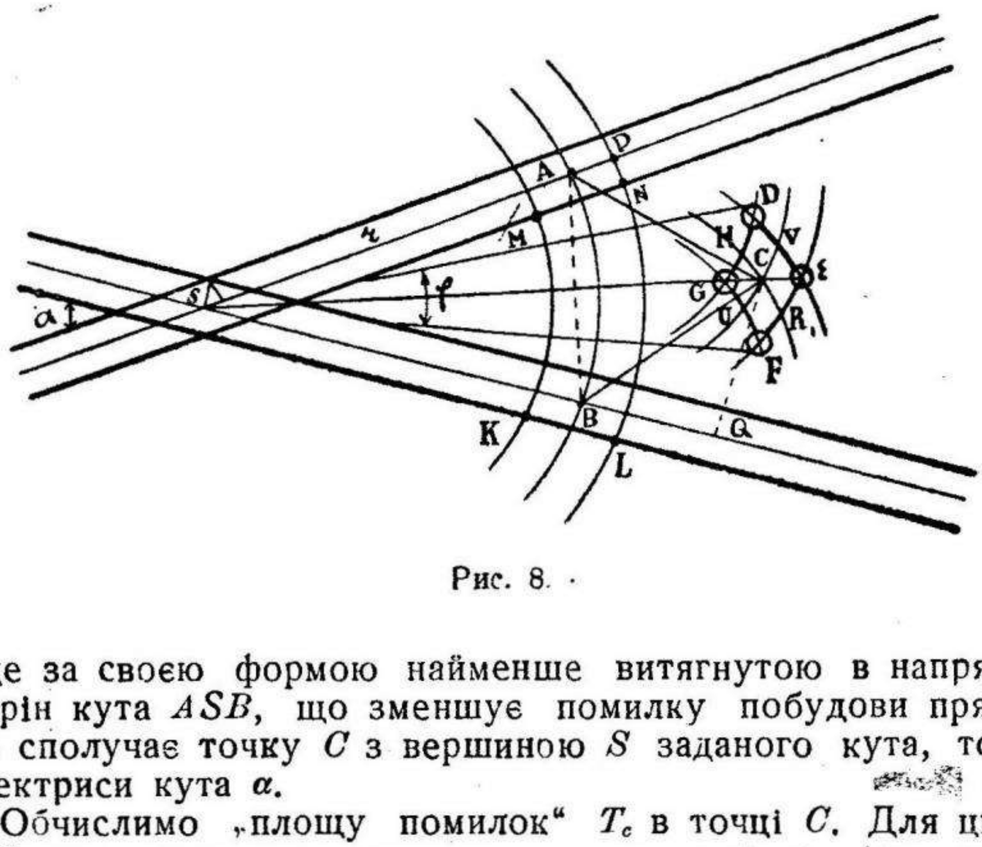

Рис. 8.

буде за своєю формою найменше витягнутою в напрямку сторін кута ASB, що зменшує помилку побудови прямої, яка сполучає точку C з вершиною S заданого кута, тобто бісектриси кута α.

Обчислимо „площу помилок“ T_c в точці C. Для цього знайдемо спочатку величину ω_a „компонента відхилення“ на напрямок AC.

$$\omega_a = AP \operatorname{Cos} \psi, \text{ де } \psi = \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}.$$

Підставляючи $AP = \frac{1}{2}\, MN = \frac{1}{2}\omega_0 f(a)$,

дістанемо $\omega_a = \frac{\omega_0}{2} f(a) \operatorname{Cos} \psi$.

Аналогічно можна обчислити ω_b для точки B, що, як легко бачити, буде дорівнювати ω_a.

Відхилення HR_1 і UV в точці C будуть рівні між собою.

$$UV = HR_1 = \frac{\omega_0}{2} f(\alpha) \operatorname{Cos} \psi + 2\omega_0 = \omega^0 \left(\frac{1}{2} f(\alpha) \operatorname{Cos} \psi + 2 \right).$$

„Площею помилок“ в точці C буде площа $DEFG$, яку наближено можна вважати за квадрат, якщо кут γ, під яким перетинаються дуги в точці C, буде дорівнювати $\frac{\pi}{2}$.

Площа $DEFG = T_c = \omega_0^2 \left[\frac{1}{2} f(\alpha) \operatorname{Cos} \psi + 2 \right]^2$.

Отже, тепер ми маємо змогу визначити точність побудови кожної з точок A, B, C за формулою.

Щоб схарактеризувати точність поділу кута ASB пополам, можна обчислити спочатку „кутову помилку“ або „кут відхилення“ φ, що утворюється при сполученні точок C і D. Цей кут приймемо за величину можливої помилки даної побудови.

З рисунку знаходимо:

$$tg \frac{\varphi}{2} = \frac{DC + 2\omega_0}{SC},$$

де $2\omega_0$ — це те сумарне „відхилення“, яке з'являється при прикладуванні лінійки до точок C і S, причому лінійка займає положення SD (можливе також „відхилення“ лінійки в напрямку SF). Розглядаючи $DC = \frac{1}{2} DF$ і $DF^2 = DE^2 + EF^2$, знаходимо $DC = \frac{\omega_0}{4} [f(\alpha) \operatorname{Cos} \psi + 4] \sqrt{2}$.

Для визначення SC знаходимо BQ

$$BQ = BC \cdot \operatorname{Cos} \psi = 0{,}72\, AB \operatorname{Cos} \psi.$$

Підставивши значення $AB = r \sqrt{2(1 - \operatorname{Cos} \alpha)}$,

$$BQ = 0{,}72\, r \sqrt{2(1 - \operatorname{Cos} \alpha)} \cdot \operatorname{Cos} \psi.$$

Тепер визначимо SC.

$$SC^2 = SB^2 + BC^2 + 2SB \cdot BQ,$$

звідки після підстановки значень відповідних відрізків дістанемо:

$$SC = r \sqrt{1 + 0{,}98(1 - \operatorname{Cos} \alpha) + 1{,}4 \sqrt{2(1 - \operatorname{Cos} \alpha)} \operatorname{Cos} \psi}.$$

Обчислимо тепер:

$$tg\,\frac{\varphi}{2} = \frac{\frac{\omega_0}{4}[f(\alpha)\,\mathrm{Cos}\,\psi + 4]\sqrt{2} + 2\omega_0}{r\sqrt{1 + 0{,}98\,(1 - \mathrm{Cos}\,\alpha) + 1{,}4\,\sqrt{2\,(1 - \mathrm{Cos}\,\alpha)}\cdot\mathrm{Cos}\,\psi}}$$

Отже, величина кута φ залежить від величини кута α і від радіуса r: чим більший радіус r, тим менша „кутова помилка" (а також від ω_0 — товщини проведених ліній).

Обчислимо для $\alpha = 60^0$ і $r = 100$ мм величину „кутової помилки", тобто кут φ:

$$tg\,\frac{\varphi}{2} = \frac{3{,}659\,\omega_0}{136}.$$

Покладаючи $\omega_0 = 0{,}08$ мм, дістанемо наближено:

$tg\,\frac{\varphi}{2} = 0{,}0021\ldots$, звідки $\frac{\varphi}{2} = 7'$ і, значить, „кутова помилка" даної побудови $\varphi = 14'$ для $\alpha = 60^0$ і $r = 100$ мм (тобто „кутова помилка" побудови становить біля $0{,}4\%$ заданого кута).

Характеризуючи точність цієї побудови відношенням $\frac{2\omega_0}{T}$, знаходимо:

$$K_{sc} = \frac{2\,\omega_0}{2\,(DC + 2\,\omega_0)} = \frac{2\omega_0}{2\cdot 3{,}659\,\omega_0} = 0{,}27\ldots$$

Отже, коефіцієнт точності поділу заданого кута пополам

$$K_{sc} = 0{,}27\ldots$$

3. ПОБУДОВА ПРЯМОЇ, ЩО ПРОХОДИТЬ ЧЕРЕЗ ЗАДАНУ ТОЧКУ ПАРАЛЕЛЬНО ЗАДАНІЙ ПРЯМІЙ

Хай AB — задана пряма і C — точка зовні неї, через яку повинна пройти шукана пряма паралельно до AB (рис. 9).

Здебільшого при побудові шуканої прямої використовують угольник і лінійку, бо для практики важлива простота побудови.

Побудова проводиться так: прикладають угольник однією з його сторін (напр. гіпотенузою) до заднього відрізку AB і по лінійці зміщують його в напрямку точки C до тих пір, поки сторона угольника (гіпотенуза), що раніше зливалася з AB, не пройде через задану точку. Потім проводять вздовж цієї сторони пряму CD, яка і буде шуканою прямою.

Дослідимо точність цієї побудови.

Помилка прикладування сторони угольника до відрізку AB характеризується кутом φ — „відхилення" сторони угольника від ідеального положення прямої,

$$tg\varphi = \frac{\omega_0}{AO} = \frac{2\,\omega_0}{AB}.$$

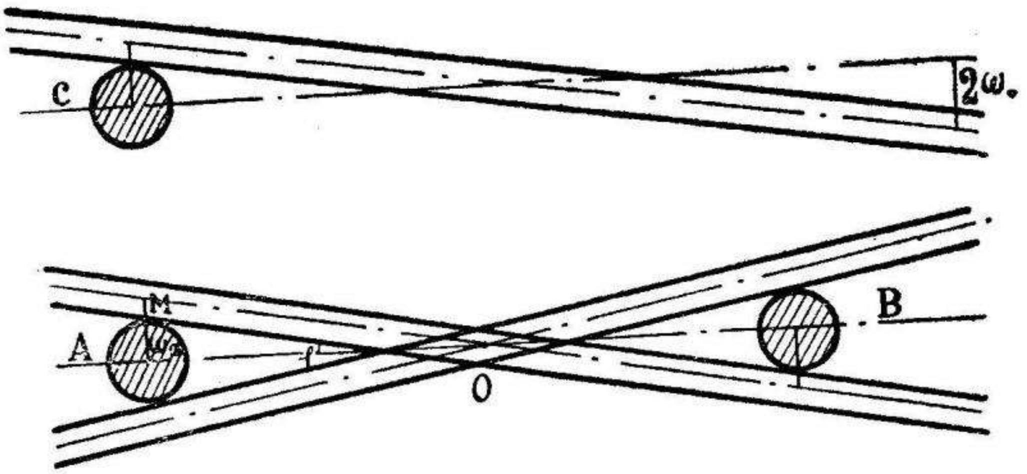

Рис. 9.

Якщо довжина заднього відрізку $AB = 100$ мм і $\omega_0 = 0{,}08$ мм, то $tg\,\varphi = 0{,}0016$, звідки $\varphi = 5'30''$.

Переміщування угольника по лінійці, ми вважаємо, не вносить помилки в побудову. Прикладування сторони угольника до точки C характеризується величиною ω_0 і тому $tg\,\psi$ „кута відхилення", що має місце в цьому випадку, і буде дорівнювати $\frac{0{,}08}{100} = 0{,}0008$. Звідки $\psi = 2'30''$.

Отже, максимальна величина „кутової помилки" побудови угольником і лінійкою паралельної прямої, що проходить через задану точку, рівна $\xi = \varphi + \psi = 8'$ на 100 мм довжини заданого відрізку.

Коефіцієнт точності цієї побудови обчислимо за формулою:

$$K_1 = \frac{t_1}{T_1}.$$

В даному разі „граничне відхилення" $T_1 = 3\omega_0$.

Тому $K_1 = \frac{2\omega_0}{3\omega_0} = 0{,}66.$

Аналогічно можна обчислити коефіцієнт точності ряду інших основних геометричних побудов.

Г. БУЙМОЛА. О ТОЧНОСТИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПОСТРОЕНИЙ

Резюме

Автор изучает вопрос точности некоторых геометрических построений. Он вычисляет величины, характеризующие эту точность, и применяет их к операциям Лемуана (Lémouane) и другим элементарным геометрическим построениям.
