ЛЬВІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені ІВАНА ФРАНКА

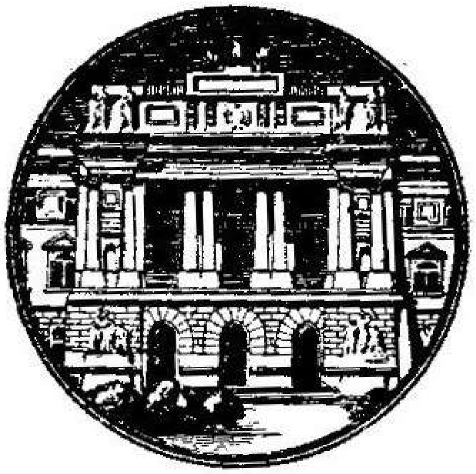
НАУКОВІ ЗАПИСКИ

ТОМ V

СЕРІЯ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА

ВИПУСК ПЕРШИЙ

ЛЬВІВСЬКОГО ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ — 1947



ЛЬВІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені ІВАНА ФРАНКА

НАУКОВІ ЗАПИСКИ

ТОМ V

СЕРІЯ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА

ВИПУСК ПЕРШИЙ

ВИДАННЯ ЛЬВІВСЬКОГО ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ — 1947

ЛЬВОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени ИВАНА ФРАНКО

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ

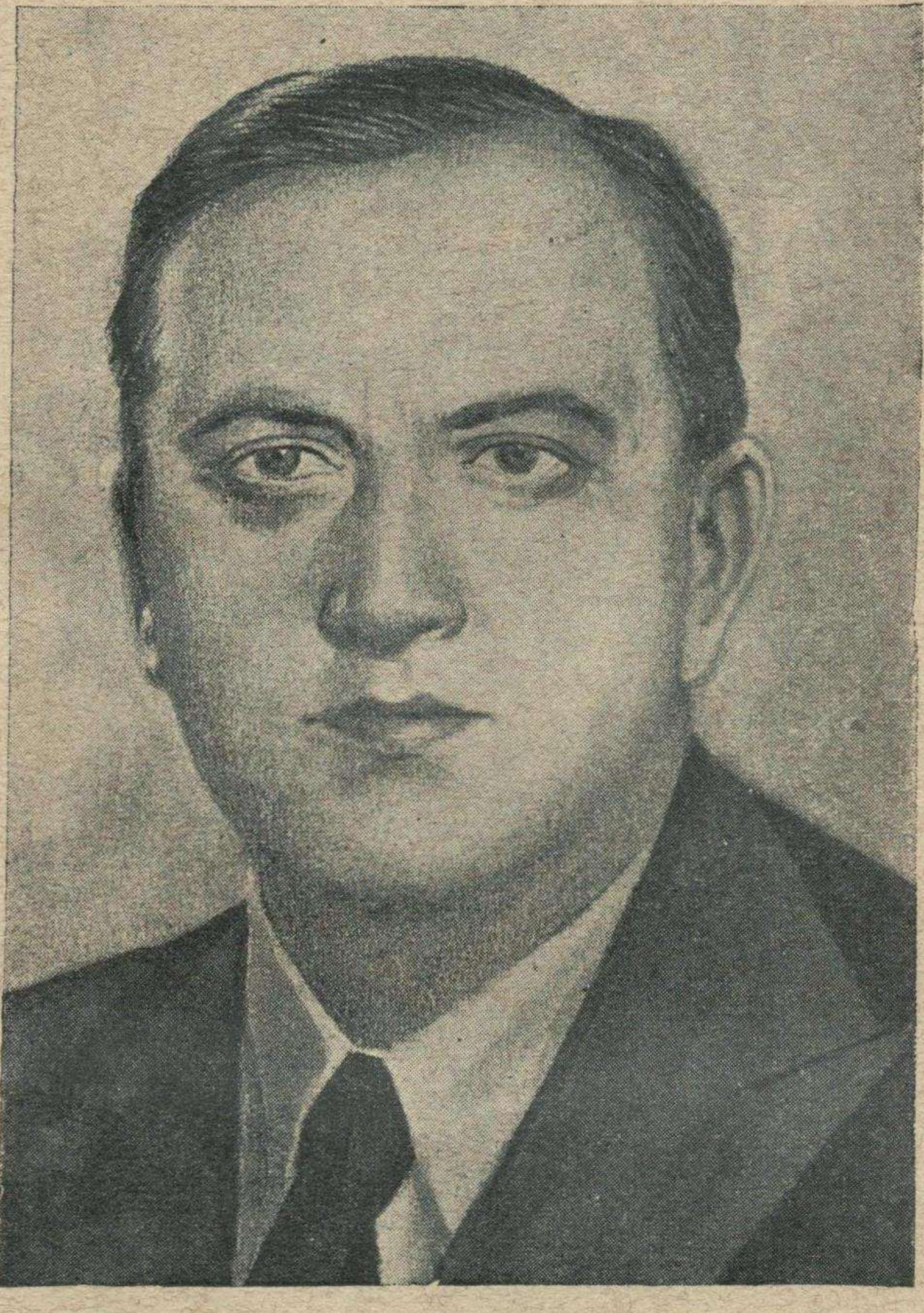
ТОМ V

СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

ВЫПУСК ПЕРВЫЙ

ИЗДАНИЕ ЛЬВОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА — 1947

Друкується за розпорядженням ректора університету професора І. І. Бєлякевича



СТЕФАН БАНАХ

(1892—1945)

Наукові записки Львівського Державного Університету імені Ів. Франка
Том V Серія фізико-математична, вип. 1 1947

СТЕФАН БАНАХ

(30. III 1892 — 31. VIII 1945 р.)

31 серпня 1945 р. помер один з видатніших польських математиків, який майже чверть століття працював у Львівському університеті — Стефан Банах.

Банах народився 30 березня 1892 р. в Кракові. В 4-ій Краківській гімназії дістав він середню освіту й відразу ж після закінчення, в 1910 р., вступив у Львівський політехнічний інститут, де вчився до 1914 року. Засоби до існування в той час йому давали приватні лекції. Війна 1914 р. примусила його знову повернутися до Кракова.

Ще в студентські роки Банах зацікавився математикою. Однак остаточно визначити свої зацікавлення йому вдалося тільки в Кракові під безсумнівним впливом професора Штейнхауза, одного з найвидатніших польських математиків. Проблематика, якою цікавився в той час Штейнхауз, — вивчення властивостей рядів ортогональних функцій — захоплювала також Банаха. Внаслідок цього 1918 р. в пресі з'явилося перше дослідження[1], виконане Банахом разом з Штейнхаузом. З цього часу абстрактна математика назавжди зробилася основною ділянкою наукових інтересів Банаха.

В 1920 р. Банах дістав у Львівському університеті ступінь доктора і тоді ж почав викладати у Львівському політехнічному інституті, займаючи посаду асистента кафедри теоретичної механіки.

В 1922 р. він був запрошений у Львівський університет як професор математики, а ще через два роки його наукові успіхи і наукова індивідуальність стали настільки очевидними, що Польська Академія наук обрала його своїм членом-кореспондентом. Навколо Банаха швидко починає концентруватися здібна наукова молодь і послідовно утворюється Львівська математична школа, яка згодом стала широко відомою.

[1] Sur la convergence en moyenne des séries de Fourier Bull, de l'Acad. des Sc., Cracovie., p. 87., 1918.

Наукові зацікавлення Банаха спочатку, як ми тільки що сказали, були присвячені теорії функцій дійсного змінного. Згодом, будучи вже зрілим вченим, він неодноразово повертався до питань теорії ортогональних функцій і теорії міри. В одній з перших робіт[1] йому вдалося побудувати приклад функції, розклад якої в ряд за системою ортогональних функцій збігається до функції, що відрізняється від вихідної. В одній з інших робіт[2] йому вдалося повністю вирішити фундаментальну проблему теорії міри на прямій і в площині, вказавши існування такої невід'ємної аддитивної функції множини, яка інваріантна відносно рухів і дорівнює одиниці для інтервалу довжини одиниця у випадку прямої або квадрату площі одиниця у випадку площини.

Однак не теорія функцій принесла Банаху славу всесвітньо відомого вченого, що зробив істотний вплив на розвиток науки. Центр уваги Банаха, як самостійного вченого, був сконцентрований на розвиткові нової математичної науки — теорії функціональних просторів та операцій в них. Перша його робота[3] в цій ділянці відноситься до 1922 р. і саме в ній вперше була намічена теорія лінійних просторів і лінійних операцій у них.

Кінець 20-х років для Банаха був не тільки періодом великих творчих успіхів, але також і серйозних організаційних досягнень. В першу чергу я маю на увазі організацію журнала «Studia Mathematica», що дав можливість Львівській математичній школі організовано виступити з пропагандою розроблюваного в ній напряму математики. Банах і Штейнхауз були організаторами і незамінними редакторами цього журналу, який швидко став широко відомим. В першому томі «Studia Mathematica» Банах надрукував дві статті[4], в яких, зокрема, була доведена фундаментальна теорема про продовження лінійних функціоналів.

В 1931 р. за видатні наукові успіхи, що високо піднесли науковий авторитет Львова, Банах дістав премію міста.

На 1931 р. припадає поява першого польського видання книги Банаха «Теорія лінійних операцій». За рік ця книга була видана на французькій мові в польській серії математичних монографій. Книга завоювала широку популярність: в багатьох журнальних статтях з'явилися посилки на неї, кожний

[1] An example of an orthogonal development whose sum is everywhere different from the developped function. Proc. of. London Math. Soc. II сер., стр. 95 (1922).

[2] Sur le probléme de la mesure. Fund. math. IV. стр. 7, 1923.

[3] Sur les opérations dans les ensembles abstrait et leur applications aux équations intégrales. Fund. math. t. III., p. p. 131—181, 1922.

[4] Sur les fonctionelles linéaires, I et II.

математик, який бажав не відстати від сучасної науки, ходом подій був примушений знайомитись з цією книгою.

Великий вплив досліджень Банаха, зокрема тільки що згаданої книги, на радянських математиків.

Дослідження члена-кореспондента Академії наук УРСР, професора М. Г. Крейна та його школи в значній мірі спираються на результати Банаха. Книга «Теорія лінійних операцій» включена до аспірантських учбових планів Московського, Ленінградського, Київського та інших університетів, а також математичних інститутів Академії наук УРСР і СРСР. На цій книзі виховувалися наукові смаки багатьох радянських математиків, що стали тепер видатними вченими (професорів І. М. Гельфанда, Д. А. Райкова, С. М. Нікольського, М. Г. Крейна та інші).

В передмові до своєї книги Банах обіцяв продовження, присвячене теорії нелінійних операцій. Видимо, за останні роки ця теорія була в центрі його наукових інтересів. Однак його публікації містять лише результати вступного характеру.

Багато праці було покладено Банахом на створення підручників для середньої школи і для вищих учбових закладів. Його підручники алгебри, арифметики для різних класів гімназії користувалися в Польщі великим успіхом.

Безперервна робота у Львівському університеті та політехнічному інституті привела Банаха до видання його лекцій з диференціального та інтегрального числення, а також до написання 2-х томного підручника теоретичної механіки, виданого польською мовою в серії «Математичні монографії».

Появі в світ книги по теорії функції дійсного змінного перешкодила війна. Книга була вже набрана цілком, були одержані гранки частини її листів; рукопис, матриці — все залишилося в Варшаві і, очевидно, загинуло там в роки війни. В рукописах, які мені довелося, за проханням дружини Банаха, переглянути після його смерті, я знайшов тільки невелику кількість окремих листків гранок цієї книги.

В 1939 р., напередодні війни, Польська Академія наук присудила Банахові за видатні наукові успіхи вищу премію. В зв'язку з війною він цієї премії не одержав.

Для повної характеристики діяльності Банаха в передвоєнний період його життя треба відмітити багаторічну його участь в роботі польського математичного товариства на посту віце-президента, далі — його участь як члена бюро Львівського філіалу математичного товариства, члена редакційної комісії прекрасної математичної серії «Monografie Matematyczne» та, як вже було згадано, організатора і редактора «Studia Matemathica».

Професор Банах був переконаним демократом. Він радісно зустрів прихід до Львова Червоної Армії в 1939 р. і негайно взявся за налагодження наукової та учбової роботи по математиці в університеті.

Його керівна роль у Львові виявилась і в тому, що львівські математики встановили самий тісний контакт з вченими інших частин СРСР.

В 1939—1940—1941 р. р. професор Банах приїжджав з доповідями до Москви, Києва, Тбілісі і зав'язав не тільки наукові, але і дружні зв'язки з видатними радянськими математиками.

В 1940 р. трудящі Львова, шануючи професора Банаха не тільки як видатного вченого, але також як вченого-демократа і суспільного діяча, обрали його депутатом Міської Ради. В Міській Раді він керував культурно-освітньою роботою.

На початку 1940 р. математичний інститут Академії наук УРСР запросив Банаха як старшого наукового співробітника. В 1941 р. він був затверджений членом редакції керівного радянського математичного журналу «Математический сборник».

Війна 1941 р. застала Банаха зненацька: не маючи можливості евакуювати родину, він був примушений залишитися у Львові. Його стан, як вченого, відомого своїми радянськими симпатіями, був в період окупації особливо тяжким.

Роки німецької окупації відірвали його від колективу радянських математиків і цілком знищили можливості для наукової праці. З умовами існування в період окупації краще всього познайомитись з листа, який перед від'їздом до Польщі був посланий дружиною Банаха радянським математикам.

«. . . Наступні три з лишком роки мені тяжко згадувати. Всі ми ходили під страхом щохвилинної смерті. Багато колег мого чоловіка, професорів університету та політехнікуму, розстріляні, замордовані, повішені в страшні дні німецької окупації. Непривітний погляд, інтелігентне обличчя — все це було достатнім поводом для того, щоб потрапити до гестапо, а звідти вже не було повернення. Мій чоловік переховувався, пізніше, щоб існувати, він поступив до протитифозного інституту Вейгла кормити вошей. Кожного дня, в призначену годину, він з'являвся до приміщення фізико-математичного факультету, але не для того, щоб викладати свої знання студентам або оповідати своїм колегам про зроблені ним відкриття, а для того, щоб відкормлювати вошей, заражених тифом. Відкормлювати їх для виготовлення тифозної вакцини.

В ці дні єдиною мрією мого чоловіка було повернення Червоної Армії. Він вірив у її повернення, він її чекав. Цей день настав ,але німецька окупація не пройшла даремно: тільки рік після звільнення Львова прожив мій чоловік. За цей час він знову став професором, знову повернувся до справи, якій присвятив життя...»

Звільнення Львова від німецьких окупантів і наступне відновлення Львівського університету вимагало від Банаха як декана фізико-математичного факультету великого напруження сил. В березні 1945 р. Банах приймав як делегат участь на Всеслов'янському антифашистському конгресі в Софії і виступив з гарячими промовами на захист цивілізації та культури.

На початку 1945 р. Банах був гостем московських та київських математиків. Він говорив про свої наукові та педагогічні плани. Цим планам не судилося збутися — 31 серпня 1945 р. він помер.

3 вересня відбувся похорон Банаха. Тисячі людей супроводжували його труну на Личаківське кладовище. Вінки від учбових закладів, колег і студентів, а також надгробові промови були лише зовнішньою формою для виразу тої великої поваги, якою користувався покійний і як вчений, і як громадянин.

В пам'ять про надзвичайного вченого Львівська Міська Рада одній з вулиць Львова надала ім'я Банаха.

Б. В. Гнєденко.

Наукові записки Львівського Державного Університету імені Ів. Франка
Том V Серія фізико-математична, вип. 1 1947

І. Г. СОКОЛОВ
доцент, кандидат фізико-математичних наук

ПРО НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ, ЩО ЗАДОВОЛЬНЯЮТЬ УМОВІ ЛІПШИЦА ПОЛІНОМАМИ БЕРНШТЕЙНА

(кафедра математичного аналізу)

Нехай $H^{(\alpha)}K$ є класом функцій, що задовольняють на відрізку $[0;1]$ умові Ліпшица порядку α $(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$ з даною константою K. Для кожної функції $f(x)$ цього класу побудуємо її поліном Бернштейна:

$$B_n[f;x] = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \tag{1}$$

і розглянемо вираз:

$$E_n[H^{(\alpha)}K;x] = \sup_{f \in H^{(\alpha)}K} |f(x) - B_n[f;x]|, \tag{2}$$

де верхня межа розповсюджується на всі функції, що входять до $H^{(\alpha)}K$. *М. Кас* (1), користуючись теорією незалежних функцій довів слідуючу теорему:

Якщо позначити

$$g_n(f) = \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x) - B_n(f;x)|,$$

то для $f \in H^{(\alpha)}K$ маємо:

$$g_n(f) = 0\left(n^{\frac{-\alpha}{2}}\right),$$

і існує така функція $\varphi(t)$, що входить до $H^{(\alpha)}K$, для якої

$$g_n(f) \neq 0\left(n^{\frac{-\alpha}{2}}\right).$$

Тут ми даємо елементарне доведення більш точного результату, а саме:

$$E_n[H^{(\alpha)}K;x] = K\sum_{k=0}^{n}\left|x - \frac{k}{n}\right|^{\alpha}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \tag{3}$$

$$[0 \leqslant x \leqslant 1]$$

і асимптотичної рівності

$$E_n[H^{(\alpha)}K\,;x] = \frac{c(x)}{n^{\frac{\alpha}{2}}} + o\left(n^{-\frac{\alpha}{2}}\right), \tag{4}$$

де $\quad c(x) = K\dfrac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}}[x(1-x)]^{\frac{\alpha}{2}} \qquad [0 \leqslant x \leqslant 1].$

Доведення формули (3).

Нехай $f(t) \in H^{(\alpha)}K$. Тоді функція $\varphi_x(t) = f(t) - f(x)$ очевидно належить до класу $H_0^{(\alpha)}K$, що задовольняє умові Ліпшица порядку α з тою ж константою K і анулюється в точці x. Відзначивши, що $B_n[f\,;x]$ при фіксованому x є лінійним функціоналом, який задовольняє умові:

$$B_n[1\,;x] = 1,$$

легко дістаємо:

$$f(x) - B_n[f;x] = \varphi_x(x) - B_n[\varphi_x\,;x], \tag{5}$$

звідки виникає, що

$$E_n[H^{(\alpha)}K\,;x] = E_n[H_0^{(\alpha)}K\,;x]. \tag{6}$$

З другого боку, для всякої функції $\varphi_x(t) \in H_0^{(\alpha)}K$ маємо:

$$\left|\varphi_x(x) - B_n[\varphi_x\,;x]\right| = \left|B_n[\varphi_x\,;x]\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n}\left|\varphi_x\left(\frac{k}{n}\right) - \right.$$

$$\left. -\varphi_x(x)\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \leqslant K\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{k}{n} - x\right|^{\alpha}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}, \tag{7}$$

а для функції $\varphi_x(t) = K|t-x|^{\alpha}$, що належить до класу $H_0^{\alpha}K$, рівність, очевидно, досягається. Тим самим, в силу (6) доведена справедливість формули (3).

Для того, щоб дістати асимптотичну рівність (4), доведемо лему.

Лема. Нехай послідовність функцій розподілу: $\{F_n(t)\}$ $(n = 1, 2\ldots)$ (тобто неспадаючих функцій $F_n(t)$ таких, що $F_n(-\infty) = 0$; $F_n(+\infty) = 1$) задовольняє слідуючим умовам:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(t) = F(t), \qquad -\infty \leqslant t \leqslant +\infty;$

в) для деякої неперервної, додатньої для достатньо великих значень t функції $f(t)$ існують інтеграли

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dF_n(t),$$

рівномірно збіжні відносно n і інтеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dF(t),$$

для яких має місце гранична рівність:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dF_n(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dF(t).$$

c) Тоді, якщо неперервна функція $\varphi(t)$ задовольняє умові

$$\overline{\lim_{t\to\pm\infty}}\ \frac{|\varphi(t)|}{f(t)}<\infty,$$

то $$\lim\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\,dF_n(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\,dF(t).$$

Доведення леми. На підставі так званої другої теореми Helly ми для довільного $N>o$ маємо, в силу умови a),

$$\lim\int_{-N}^{N}\varphi(t)\,dF_n(t)=\int_{-N}^{N}\varphi(t)\,dF(t). \tag{8}$$

Нехай тепер є задане довільне ε. В силу умов в) і c) можемо вибрати N настільки великим, щоб одночасно виконувалися нерівності:

$$\int_{(t)\geqslant N} f(t)\,dF_n(t)<\frac{\varepsilon}{3c};\quad \int_{(t)\geqslant N} f(t)\,dF(t)\leqslant\frac{\varepsilon}{3c}$$

і нерівність $\dfrac{|\varphi(t)|}{f(t)}<c$ для $(t)\geqslant N$, (де $c>o$ є деякою константою).

Тоді для всіх достатньо великих n будемо мати:

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\,dF_n(t)-\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\,dF(t)\right|\leqslant\left|\int_{-N}^{N}\varphi(t)\,dF_n(t)-\right.$$

$$\left.-\int_{-N}^{N}\varphi(t)\,dF(t)\right|+c\int_{(t)\geqslant N}\varphi(t)\,dF_n(t)+c\int_{(t)\geqslant N}\varphi(t)\,dF(t)\leqslant\varepsilon,$$

в силу умови (8), що і потрібно було довести.

Припустимо тепер:

$$F_n(t)=0 \qquad \left[t<-\frac{nx}{\sqrt{2nx(1-x)}}\right],$$

$$F_n(t)=\sum_{k=0}^{\left[nx+t\sqrt{2nx(1-x)}\right]}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}, \quad \left[-\frac{nx}{\sqrt{2nx(1-x)}}\leqslant t\leqslant\frac{(1-x)n}{\sqrt{2nx(1-x)}}\right],$$

$$F_n(t)=1 \qquad \left[t>\frac{(1-x)n}{\sqrt{2nx(1-x)}}\right]. \tag{9}$$

В силу добре відомої теореми Лапласа $F_n(t)$ задовольняє для всіх t граничної рівності

$$\lim_{n\to\infty}F_n(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{t}e^{-u^2}\,du. \tag{10}$$

Формула (3) перепишеться у вигляді:

$$E_n[H^{(\alpha)}K;x]=K\left[\frac{2x(1-x)}{n}\right]^{\frac{\alpha}{2}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|t|^\alpha\,dF_n(t). \tag{11}$$

В силу рівності, яку легко перевірити,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}t^2\,dF_n(t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}t^2\,dF(t) \tag{12}$$

і рівномірної відносно n збіжності інтегралів

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}t^2\,dF_n(t),$$

ми, покладаючи

$$|t|^\alpha=\varphi(t) \quad [0\leqslant\alpha\leqslant1]; \quad t^2=f(t)$$

з (10) і (12), на підставі нашої леми дістаємо:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|t|^\alpha\,dF_n(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|t|^\alpha e^{-t^2}\,dt+o(1)$$

і, помічаючи, що

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |t|^{\alpha} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right),$$

дістаємо в силу (11) формулу (4) для всіх x $(0 < x < 1)$. Справедливість формули (4) для $x=0$; $x=1$ очевидна, тому що для довільної функції $f(0) - B_n[f;0] = f(1) - B_n[f;1] = 0$. Результати, які ми дістали вище, можуть бути узагальнені на клас функцій K_ω, де K_ω є класом функцій $f(t)$, модуль неперервності яких на відрізку $[0;1]$

$$\varphi(h) = \max_{|t_1 - t_2| \leqslant h} |f(t_1) - f(t_2)| \qquad [0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant 1]$$

не перевищує даної функції $\omega(h)$

$$\varphi(h) \leqslant \omega(h),$$

де $\omega(h)$ — неспадаюча, неперервна, опукла до верху функція, визначена для всіх $h > 0$ і така, що задовольняє умові $\omega(0) = 0$.

Можна показати, трохи ускладнюючи наші міркування, наступні рівності:

$$E_n[K_\omega;\ x] = \sum_{k=0}^{n} \omega\left(\left|\frac{k}{n} - x\right|\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

і асимптотично

$$E_n[K_\omega;\ x] = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega\left[|t| \sqrt{\frac{2x(1-x)}{n}}\right] e^{-t^2} dt \,\{1 + o(1)\}.$$

Цей результат, який я сподіваюся опублікувати в найближчий час, узагальнює результати М. Кас і Popoviсa (2).

ЛІТЕРАТУРА

1. M. Kac. Studia Mathematica, t. VII.
2. M. Kac. Studia Mathematica, t. VIII.

И. Г. СОКОЛОВ. ОБ АПРОКСИМАЦИИ ПОЛИНОМАМИ С. Н. БЕРНШТЕЙНА ФУНКЦИЙ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ УСЛОВИЮ ЛИПШИЦА.

Резюме

Автор доказывает следующую формулу

$$E_n(x) = \sup_{f \in H^{(\alpha)}K} \left| f(x) - B_n(f, x) \right| \approx \frac{K\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}} \left[x(1-x) \right]^{\frac{\alpha}{2}}_{(0 \leqslant x \leqslant 1)},$$

где: 1) $B_n(f; x)$ обозначает полином Бернштейна для $f(x)$;

2) $H^\alpha(K)$ обозначает класс функций, которые удовлетворяют условию Липшица порядка α с константой K на интервале [0, 1].

Доказывается также формула

$$E_n(x) = K \sum_{k=0}^{n} \left| x - \frac{k}{n} \right|^{\alpha} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad [0 \leqslant x \leqslant 1].$$

Наукові записки Львівського Державного Університету імені Ів. Франка
Том V Серія фізико-математична, вип. 1 1947

І. Г. СОКОЛОВ
доцент, кандидат фізико-математичних наук

ПРО КОЕФІЦІЄНТИ ФУР'Є ДЛЯ ДЕЯКИХ КЛАСІВ НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ

(кафедра математичного аналізу)

Позначимо через $KW^{(r)}$ клас всіх функцій з періодом 2π, що мають абсолютно неперервну похідну $r-1$-го порядку і похідну r-го порядку.

$$f^{(r)}(x) = \varphi(x), \tag{1}$$

що задовольняє (там, де вона існує) нерівність:

$$|\varphi(x)| \leqslant K. \tag{2}$$

Доповнимо це определіння для $r=0$, а саме: нехай $KW^{(o)}$ — клас вимірних функцій з періодом 2π, обмежених по абсолютній величині константою K.

Ми будемо говорити, що функція $f(x)$, визначена на деякому проміжку, задовольняє умові Ліпшица порядку α з константою K, якщо для довільних двох значень x_1 і x_2, що належать до цього проміжку, має місце нерівність

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant K\,|x_1 - x_2|^{\alpha}. \tag{3}$$

Сукупність всіх періодичних функцій з періодом 2π, що задовольняють умові Ліпшица порядку α $(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$ з константою K, назвемо класом $KH^{(\alpha)}$.

Визначимо клас $KW^{(r)}H^{(\alpha)}$ $(r \geqslant 0;\, 0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$, як клас функцій, що мають похідні r-го порядку, які належать до класу $KH^{(\alpha)}$.

Для $r=0$ ми будемо вважати, що

$$KW^{0}K^{(\alpha)} = KH^{(\alpha)} \quad (0 \leqslant \alpha \leqslant 1). \tag{4}$$

Зауважимо, що на основі відомих властивостей функцій, які задовольняють умові Ліпшица,

$$KW^{(r)} = KW^{(r-1)}H^{(1)}. \tag{5}$$

Нехай тепер нам дана сумована на проміжку $[0,2\pi]$ функція $f(x)$ з періодом 2π.

Позначимо через

$$a_n(f)=a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx;\quad b_n(f)=b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx \qquad (6)$$

її коефіцієнти Фур'є.

Якщо $f \subset KW^{(r)}, r \geqslant 1$, то, як відомо, її коефіцієнти Фур'є мають порядок $0(n^{-r})$.

В тому випадку, коли $f \subset KW^{(r)} H^{(\alpha)}$ $(r \geqslant 0;\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$, порядок цих коефіцієнтів буде $0\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right)$ (див. 1, ст. 45).

Hardy (2) привів приклад функції $f(x)$ класу $KH^{(\alpha)}$, коефіцієнти Фур'є якої мають порядок $0(n^{-\alpha})$, але не $o(n^{-\alpha})$. Таким чином, $f(x)$ належить до $KH^{(\alpha)}$ і точний порядок її коефіцієнтів Фур'є буде $0(n^{-\alpha})$.

Нехай тепер нам дано клас функцій S. Позначимо верхні грані:

$$A_n(S)=\sup_{f\subset s} a_n(f);\quad B_n(S)=\sup_{f\subset s} b_n(f)$$

величин коефіцієнтів Фур'є, розповсюджених на клас функцій S.

Ми доведемо, перш за все, що

$$A_n(S)=B_n(S) \qquad (8)$$

для довільного класу S функцій з періодом 2π, якщо цей клас включає разом з функцією $f(x)$ також функцію $f\left(x+\frac{\pi}{2n}\right)$ і слідуючі формули:

$$A_n[KW^{(r)}]=\frac{4K}{\pi n^r} \qquad [r\geqslant 0], \qquad (9)$$

причому цей результат залишається вірним, коли замість класу $KW^{(r)}$ візьмемо клас $KW^{(r)}C$, де під класом $KW^{(r)}C$ будемо розуміти клас функцій з періодом 2π, що мають неперервну похідну r -го порядку, обмежену по абсолютній величині константою K

$$A_n[KW^{(r)}H^{(\alpha)}]=\frac{K2^{\alpha+1}}{\pi}\frac{1}{n^{r+\alpha}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} u^{(\alpha)}\sin u\,du+0\left(\frac{1}{n^{r+\alpha+1}}\right) \qquad (10)$$

$$(r\geqslant 0);\ (0\leqslant \alpha \leqslant 1).$$

Відмітимо для дальшого очевидні рівності:

$$A_n[KW^{(r)}] = KA_n[W^{(r)}], \qquad [r \geqslant 0];$$
$$A_n[KW^{(r)}H^{(\alpha)}] = KA_n[W^{(r)}H^{(\alpha)}], \qquad [r \geqslant 0;\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1], \tag{11}$$

що дозволяє нам надалі розглядати замість класів $KW^{(r)}$ і $KW^{(r)}H^{(\alpha)}$ класи $W^{(r)}$ і $W^{(r)}H^{(\alpha)}$.

При доведенні формули (10) ми застосували метод, вживаний С. М. Нікольським при розв'язанні аналогічних проблем [(3); (4)].

Доведення формул (8) і (9).

Формула (8) випливає з очевидної рівності

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f\left(x+\frac{\pi}{2n}\right)\cos nx\,dx = a_n\left[f\left(x+\frac{\pi}{2n}\right)\right].$$

Далі, якщо $f(x)$ належить до одного з класів $W^{(r)}$ або $W^{(r)}H^{(\alpha)}$, то шляхом інтегрування по частинам легко дістаємо:

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{(-1)^r}{\pi n^r}\int_0^{2\pi} f^{(r)}\sin\left[nt+\frac{r\pi}{2}\right]dt.$$

З цієї формули ми бачимо, що

$$A_n[W^{(r)}] = \frac{A_n[W^0]}{n^r};$$
$$A_n[W^{(r)}H^{(\alpha)}] = \frac{A_n[H^{(\alpha)}]}{n^r}. \tag{13}$$

Нехай тепер $f \in W^{(0)}$. Тоді

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |\sin nx|\,dx = \frac{4}{\pi}. \tag{14}$$

З другого боку, для функції $\varphi_n(x) = \operatorname{sign}\sin nx$, що належить, очевидно, до класу $W^{(0)}$, рівність досягається. Тим самим в силу формули (11) доведена справедливість формули (9) для $r = 0$.

Ця формула залишається справедливою, якщо замість класу $W^{(0)}$ ми розглянемо клас C. Дійсно, нерівність (14) залишається в силі для функцій цього класу і, хоча екстремальна функція $\varphi_n(x)$ розривна в скінченому числі точок, згладжуючи злегка цю функцію в точках розриву, ми можемо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайти таку функцію $\varphi_n(x) \in C$, для якої

$$a_n[\varphi_n] \geqslant \frac{4}{\pi} - \varepsilon.$$

Тим самим доказана вірність формули (13) і для класу C.
Прийнявши, нарешті, до уваги формулу (13), дістанемо формулу (9) для будь-якого $r \geqslant 0$.

Доведення формули (10).

Перш за все зауважимо, що замість класу $H^{(\alpha)}$ ми можемо розглянути клас $H_0^{(\alpha)}$ функцій з періодом 2π, що задовольняють умові Ліпшица порядку α і перетворюються в нуль в точках 0 і 2π.

Дійсно, якщо $f(x) \in H^{(\alpha)}$, то функція $\varphi(x)$

$$\varphi(x) = f(x) - f(0)$$

очевидно належить до $H_0^{(\alpha)}$ і має ті ж коефіцієнти Фур'є, що і функція $f(x)$.

Нехай $\varphi(x) \in H_0^{(\alpha)}$. Тоді

$$\int_0^{\frac{\pi}{2n}} \varphi(x) \sin nx dx = \int_0^{\frac{\pi}{2n}} [\varphi(x) - \varphi(0)] \sin nx dx = 0 (n^{-(\alpha+1)}),$$

$$\int_{2\pi - \frac{\pi}{2n}}^{2\pi} \varphi(x) \sin nx dx = \int_{2\pi - \frac{\pi}{2n}}^{2\pi} [\varphi(x) - \varphi(2\pi)] \sin nx dx = 0 (n^{-(\alpha+1)}).$$

А тому

$$b_n[\varphi] = \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{4n-1}{2n}\pi} \varphi(x) \sin nx dx + 0[n^{-(\alpha+1)}]. \tag{15}$$

Далі, в силу того, що $\varphi(x) \in H_0^{(\alpha)}$, дістанемо:

$$\frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{4n-1}{2n}\pi} \varphi(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{2n-1} \int_{\frac{2k-1}{2n}\pi}^{\frac{2k+1}{2n}\pi} \varphi(x) \sin nx dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^k \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \left[\varphi\left(\frac{k\pi}{n} + x\right) - \varphi\left(\frac{k\pi}{n} - x\right) \right] \sin nx dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{2n-1} \int_0^{\frac{\pi}{2n}} (2u)^\alpha \sin nu du = \frac{(2n-1) 2^\alpha}{\pi n^{\alpha+1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} u^\alpha \sin u du. \tag{16}$$

Таким чином ми дістаємо з (15) і (16)

$$A_n[H^\alpha] \leqslant \frac{2^{\alpha+1}}{\pi n^\alpha} \int_0^{\frac{\pi}{2}} u^\alpha \sin u du + 0\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right). \qquad (17)$$

З другого боку, нехай функція $\varphi_n(x)$ визначається слідуючими рівностями:

$$\begin{aligned} &\varphi_n(x) = 2^{\alpha-1} x^\alpha \qquad \left[0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2n}\right], \\ &\varphi_n(x) = (-1)^{k-1} 2^{\alpha-1}\left[\frac{k\pi}{n} - x\right]^\alpha; \left[\frac{2k-1}{2n}\pi \leqslant x \leqslant \frac{k\pi}{n}\right], \\ &\varphi_n(x) = (-1)^k 2^{\alpha-1}\left[x - \frac{k\pi}{n}\right]^\alpha; \left[\frac{k\pi}{n} \leqslant x \leqslant \frac{2k+1}{2n}\pi\right], \\ &\qquad (k = 1; 2 \ldots, 2n-1), \\ &\varphi_n(x) = -2^{\alpha-1}[2\pi - x]^\alpha; \left[\frac{4n-1}{2n}\pi \leqslant x \leqslant 2\pi\right]. \end{aligned} \qquad (18)$$

Функція $\varphi_n(x)$ задовольняє умові Ліпшица порядку α з константою 1 на кожному з проміжків:

$$\left[0; \frac{\pi}{2n}\right]; \left[\frac{2k-1}{2n}\pi; \frac{2k+1}{2n}\pi\right], (k=1,2, \ldots, 2n-1); \left[\frac{4n-1}{2n}\pi; 2\pi\right].$$

Тому що на границях цих проміжків $\varphi_n(x)$ досягає екстремумів, то, як відомо, $\varphi_n(x)$ задовольняє умові Ліпшица порядку α з константою одиниця на всьому проміжку $[0,2\pi]$.

Таким чином функція $\varphi_n(x) \subset H_0^\alpha$ (див. 3).

Для цієї функції ми маємо:

$$b_n[\varphi_n] = \frac{2^{\alpha-1}}{\pi}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2n}} x^\alpha \sin nx dx - \int_{\frac{4n-1}{2n}\pi}^{2\pi} [2\pi - x]^\alpha \sin nx dx + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{2n-1} 2\int_0^{\frac{\pi}{2n}} x^\alpha \sin nx dx\right\} = \frac{2^{\alpha+1}}{\pi n^\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{2}} u^\alpha \sin u du. \qquad (19)$$

З формули (19) дістанемо:

$$A_n[H^{(\alpha)}] \geqslant \frac{2^{\alpha+1}}{\pi n^\alpha}\int_0^{\frac{\pi}{2}} u^\alpha \sin u du. \qquad (20)$$

Формули (17) і (20) дають нам формулу (10) для $r=0$. Формулу (10) дістанемо на основі (11) і (13) [для $r>0$; $K \neq 1$].

ЛІТЕРАТУРА

1. Зигмунд. Тригонометрические ряды, ОНТИ, 1939.
2. Hardy. The allied series of a Fourier series. Proceedings of the London Math. Society 24, 1925.
3. Никольский С. М. Приближение периодических функций тригонометрическими полиномами. Труды Матем. Института им. Стеклова, 1945.
4. Колмогоров А. Н. Zur Grossenordung des Restgliedes Fourierscher Reihen Differenzierbarer Funktionen. Annals of Mathematics V 36 № 2, 1935.

И. Г. СОКОЛОВ. О КОЭФФИЦИЕНТАХ ФУРЬЕ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ.

Резюме.

Обозначим через $KW^{(r)}$ класс периодических функций периода 2π, обладающих производной порядка r и удовлетворяющих нëравенству

$$|\overset{(r)}{f}(x)| \leqslant K.$$

Обозначим затем через $KW^{(r)}H^\alpha$ класс периодических функций периода 2π, производная $f^{(r)}(x)$ которых удовлетворяет условию Липшица порядка $\alpha (\leqslant 1)$ с константой K.

Пусть

$$A_n(s) = \sup_{f \in S} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx.$$

Автор доказывает, что

$$A_n[KW^{(r)}] = \frac{4k}{\pi} \frac{1}{n^r}$$

$$A_n[KW^{(r)}H^\alpha] = \frac{K2^{\alpha+1}}{\pi n^{r+\alpha}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} u^\alpha \sin u du + 0\left(\frac{1}{n^{r+\alpha+1}}\right).$$

Наукові записки Львівського Державного Університету імені Ів. Франка
Том V Серія фізико-математична, вип. 1 1947

М. О. ЗАРИЦЬКИЙ
професор

ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ ПОНЯТТЯ ПОХІДНОЇ МНОЖИНИ В АБСТРАКТНИХ ПРОСТОРАХ

(кафедра загальної математики)

Творець теорії множин G. Cantor розглядав геометричні твори як довільні точкові множини евклідового простору. Щойно M. Fréchet (1906) зауважив, що для досліду основних властивостей точкових множин не потрібні спеціальні властивості евклідового continuum.

Fréchet і інші математики ще до сьогоднішнього дня кладуть в основу своїх дослідів деякі загальні властивості якогось одного основного поняття теорії точкових множин (оточення, похідна, замкнення і т.д.) і виводять з них інші властивості розглянутих „абстрактних" множин. Таким способом повстали теорії багатьох, загальніших від евклідового, просторів. Залежно від того, яке топологічне поняття приймаємо за основне поняття і які його властивості приймаємо за аксіоми, одержуємо різні „топологічні" простори.

Деякі математики (Fréchet, Riesz, Sierpiński і інші) досліджували вже також поняття похідної множини, як базу теорії точкових множин. Однак нема досі в літературі систематичної і послідовної побудови теорії точкових множин на основі властивостей похідної множини. В більшій праці, яка готується до друку, будується повна теорія абстрактного простору, основним поняттям якого є поняття похідної множини з певними загальними його властивостями як незалежними аксіомами.

Поки що публікую деякі початкові, відокремлені фрагменти цієї монографічної праці.

I. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ І ПОЗНАЧЕННЯ

1. Знаком C позначаю досліджувану абстрактну множину, а буквами A, B, A_1, A_2 і т.д. підмножини множини C. Знаком A^c позначаю доповнення множини A до множини C, тобто: $A^c = C - A$.

Припустимо, що кожній підмножині $A \subset C$ припорядкована однозначно певна підмножина A^d, яка є також частиною множини C ($A^d \subset C$). Тоді множину C називатимемо, за Александровим, загальнотопологічним простором. Множину A^d називаємо похідною множини A.

Писатимемо $A \subset B$ або $A \rightarrow B$, якщо множина A є частиною множини B. Якщо A не є частиною множини B, писатимемо $A \not\subset B$, або $A \rightarrow B$.

2. В загальнотопологічному просторі приймаємо такі означення:*

Множину A називатимемо

1) замкненою, якщо $A^d \subset A$;
2) в собі щільною, якщо $A \subset A^d$;
3) досконалою, якщо $A^d = A$;
4) відкритою, якщо $A \subset A^{cdc}$;
5) ізольованою, якщо $A^d \subset A^c$;
6) всюди щільною, якщо $A^d = C$;
7) ніде нещільною, якщо $A^{dcd} = C$;
8) межовою, якщо $A \subset A^{cd}$.

3. З наведених означень випливають деякі теореми, які можна довести, користуючись тільки законами алгебри Буля. Ці теореми вірні в кожному загальнотопологічному просторі. Наведемо деякі з них:

T_1. Доповнення замкненої множини є відкритою множиною і, навпаки, доповнення відкритої множини є замкненою множиною.

T_2. Для того, щоб множина була досконала, треба і досить, щоб вона була замкнена і в собі щільна.

T_3. В жодному загальнотопологічному просторі не існує непуста множина одночасно:

а) в собі щільна і ізольована,
б) всюди щільна і ізольована,
в) межова і відкрита.

T_4. Жодна властива частина загальнотопологічного простору не може бути одночасно замкненою і всюди щільною множиною.

T_5. Кожна всюди щільна множина є в собі щільна.

T_6. Кожний загальнотопологічний простір є замкненою множиною.

T_7. Для того, щоб загальнотопологічний простір був у собі щільний, треба і досить, щоб він був всюди щільний.

---

* Знаком 0 позначаємо пусту множину. Приймаємо ще короткі позначення ітерованих операцій A^c і A^d: $A^{cd} = (A^c)^d$, $A^{dd} = (A^d)^d$, $A^{dcd} = \{(A^d)^c\}^d$ і т. д.

T_8. Кожний в собі щільний загальнотопологічний простір є досконалою множиною,

T_9. В кожному відкритому загальнотопологічному просторі пуста множина є ізольованою множиною.

T_{10}. Для того, щоб всюди щільний загальнотопологічний простір був ніде нещільною множиною, треба і досить, щоб пуста множина була всюди щільною множиною.

T_{11}. Для того, щоб загальнотопологічний простір був межовою множиною, треба і досить, щоб пуста множина була всюди щільною множиною.

T_{12}. В кожному загальнотопологічному просторі пуста множина є в собі щільна, відкрита, межова і ізольована.

T_{13}. В просторі, в якому кожна множина є всюди щільна, кожна множина є в собі щільна, ніде нещільна і межова, тільки весь простір є замкнений і досконалий, тільки пуста множина є відкрита і ізольована.

T_{14}. В просторі, в якому кожна множина є досконала, кожна множина є замкнена, в собі щільна і відкрита, тільки пуста множина є ізольована, ніде нещільна і межова, а тільки весь простір є всюди щільний.

T_{15}. Для того, щоб загальнотопологічний простір був межовий, треба і досить, щоб пуста множина була всюди щільна.

II. СИСТЕМА АКСІОМ

1. В загальнотопологічному просторі кожній множині припорядкована однозначно похідна A^d, причому це припорядкування може бути зовсім довільне. Припустимо тепер, що похідна A^d повинна бути визначена так, щоб вона задовольняла такі умови:

I_d якщо $A \subset B$, то $A^d \subset B^d$,

II_d $(A + B)^d \subset A^d + B^d$,

III_d $C^d = C$,

IV_d $A^{dd} \subset A^d$,

V_d $O^d = O$,

VI_d якщо $A^d \subset A \subset A^{cdc}$, то $A = O$, або $A = C$.

Простір, в якому похідна задовольняє ці умови, називатимемо простором (d).

Умови I_d — VI_d називатимемо аксіомами простору (d).

Для доведення незалежності аксіом розглянемо простір, що має три довільні елементи a, b, c, тобто $C = \{a, b, c\}$.

Для кожної підмножини * цього простору визначимо шістьма різними способами похідну, як це бачимо у відповідних стовбцях такої таблиці:

	I_d	II_d	III_d	IV_d	V_d	VI_d
O^d	O	O	O	O	C	O
a^d	C	a	a	b	C	a
b^d	C	b	a	C	C	b
c^d	C	c	a	C	C	c
$(a, b)^d$	(a, b)	C	a	C	C	(a, b)
$(b, c)^d$	C	C	a	C	C	(b, c)
$(c, a)^d$	C	C	a	C	C	(c, a)
C^d	C	C	a	C	C	C

В кожному з стовбців цієї таблиці наведені такі означення похідної, які задовольняють всі аксіоми, крім однієї, відміченої зверху відповідного стовбця.

2. Щоб довести, що наведені аксіоми несуперечні, покладемо в тому самому просторі $C = \{a, b, c\} : O^d = O$, а $A^d = C$ для кожної іншої множини $A \subset C$.

Не важко перевірити, що визначена таким способом похідна задовольняє всі аксіоми $I_d - VI_d$.

3. В просторі $C\{a, b\}$, що скдадається тільки з двох елементів, з аксіом III_d і V_d випливає аксіома I_d. Справді, якщо $O^d = O$ і $C^d = C$, то як-небудь ми означили б a^d і b^d, матимемо для кожної пари A, B підмножин такого простору: якщо $A \subset B$, то $A^d \subset B^d$.

4. В нашій системі аксіом немає мови про елементи простору, отже й не видно в ній реляції $a \subset A$, яка говорить, що „точка a є елементом множини A“.

Властивості похідної множини виражені тут за допомогою самих тільки символів алгебри Boole-a, що спрощує значно і означення інших основних понять топології і доведення теорем, що випливають з наших аксіом.

5. В нашій системі аксіом нема такої умови, що похідна однієї точки є пустою множиною. З цього виходить, що досліджуваний нами простір є інший, ніж так званий „доступний“ простір Fréchet.

* Для позначення такої підмножини, що складається з одного тільки елементу, писатимемо a^d замість $(a)^d$.

III. ДЕЯКІ ВИСНОВКИ З АКСІОМ $I_d - IV_d$

1. З самих тільки аксіом $I_d - IV_d$ можна вивести за допомогою теорем алгебри Boole-а такі властивості поняття похідної множини

$1_d: (A+B)^d = A^d + B^d$,

$2_d: (AB)^d \subset A^d B^d$,

$3_d: A^d - B^d \subset (A-B)^d$,

$4_d: A^{cdc} \subset A^d$,

$5_d: A^{dcdcdcd} = A^{dcd}$,

6_d: якщо $A \subset B$, то $A^{cdc} \subset B^{cdc}$,

$7_d: A^{dcdd} = A^{dcd}$,

$8_d: A^{ddcd} = A^{dcd}$.

2. Раніш, ніж перейти до обговорення цих теорем, наведемо означення (за допомогою похідної) деяких основних понять теорії точкових множин.

Зімкненням множини A називаємо множину

$$A^r = A + A^d.$$

Нутром множини A називаємо множину:

$$A^i = AA^{cdc}.$$

Множиною зовнішніх точок множини A називаємо множину:

$$A^e = A^c A^{dc}.$$

Межою множини A називаємо множину:

$$A^f = AA^{cd} + A^c A^d.$$

Берегом множини A називаємо множину:

$$A^b = AA^{cd}.$$

3. Відомі формули $1_d - 3_d$ не вимагають ніякого обговорення. Формула 4_d говорить більше, ніж відома формула $A^i \subset A$. Формула 4_d говорить, що не тільки спільна частина множин A і A^{cdc} є підмножиною похідної A^d, але й ціла множина A^{cdc} є частиною цієї похідної. Не важко знайти приклад такої множини A, для якої $AA^{cdc} \neq A^{cdc}$. Нехай простором C буде проста, множиною A проста без точки $x = O$ і означимо похідну як множину точок скупчення даної множини. Тоді $AA^{cdc} =$ просторові C без точки $x = O$, а $A^{cdc} =$ просторові. Позначимо тепер буквою ϱ скінченний поступ знаків d і c, в якому на непарних місцях стоїть буква d, а на парних місцях буква c (наприклад dcd, $dcdcd$ і т.д.). Тоді множина A^ϱ являє собою множину, що її одержуємо внаслідок скінченної ітерації упохіднювання і доповнення

множини A. Тоді формула 5_d вирішує таке питання: чи для двох різних $\varrho_1 \neq \varrho_2$ є завжди $A^{\varrho_1} \neq A^{\varrho_2}$?

З цієї формули виходить, що для довільної множини A семикратна ітерація дає ту саму множину, що трикратна ітерація операторів d і c.

З цього виходить, що в загальному випадку є тільки шість різних множин типу A^{ϱ}: A^{d}, A^{dc}, A^{dcd}, A^{dcdc}, A^{dcdcd} і A^{dcdcdc}. Теорема 6_d узагальнює відому теорему, за якою з умови $A \subset B$ випливає інклюзія $A^{d} \subset B^{d}$.

Теорема 7_d говорить, що для довільного A множина A^{dcd} є досконала. Множини A^{d}, A^{dd}, A^{ddd} і т.д. є, в загальному випадку, відмінні одна від одної. Але, якщо між двома першими операторами d міститься оператор c, то дальше застосування операції d до множини A^{dcd} не дає нових множин.

Теорема 8_d говорить, що оператор dcd, застосований до довільної множини A, дає те саме, що цей оператор, застосований до похідної A^{d}.

4. Позначимо тепер буквою σ довільний скінченний поступ операторів d і c, причому цей поступ може починатися буквою d або c і букви d можуть наступати одна безпосередньо по одній в довільній скінченній кількості. Множину A^{σ} називатимемо множиною типу A^{σ}. Вирішимо тепер такі дві проблеми:

а) визначити всі можливі множини типу A^{σ}, б) визначити всі можливі інклюзії $A^{\sigma_1} \subset A^{\sigma_2}$ між різними множинами типу A^{σ}.

Вирішення обох цих задач дадуть нам такі дві таблиці (де n є довільне натуральне число):

$$T_{d,1}{}^{*}\quad \begin{tikzcd}[column sep=small] & & & & A^{cdcd} \arrow[dr] & & & & & \\ A^{cdc} \arrow[r] & A^{cddc} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & A^{cd^nc} \arrow[r] & A^{cdcdcdc} \arrow[u] \arrow[d] & A^{dcdcd} \arrow[r] & A^{d^n} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & A^{dd} \arrow[r] & A^{d} \\ & & & & A^{dcdc} \arrow[ur] & & & & & \end{tikzcd}$$

$$T_{d,2}\quad \begin{tikzcd}[column sep=small] & & & & A^{dcd} \arrow[dr] & & & & & \\ A^{dc} \arrow[r] & A^{ddc} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & A^{d^nc} \arrow[r] & A^{dcdcdc} \arrow[u] \arrow[d] & A^{cdcdcd} \arrow[r] & A^{cd^n} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & A^{cdd} \arrow[r] & A^{cd} \\ & & & & A^{cdcdc} \arrow[ur] & & & & & \end{tikzcd}$$

Спираючись на аксіоми $I_d - IV_d$ і виведені з них теореми $1_d - 8_d$, можна довести, що (в загальному випадку): *

a) Всі наведені в обох таблицях множини типу A^{σ} є відмінні одна від одної.

---

* Знак $A \rightarrow B$ позначає те саме, що $A \subset B$. Пишемо A^{d^2} замість A^{dd}, A^{d^3} замість A^{ddd} і т.д.

β) Вірні всі інклюзії між множинами A^σ, що їх бачимо в таблицях.

γ) Не існують інші інклюзії між множинами, що містяться в таблицях, крім тих інклюзій, що їх бачимо в таблицях.

δ) Не існують жодні інші множини типу A^σ крім тих, що їх бачимо в обох таблицях, тобто кожна множина типу A^σ (при довільному A і при довільному σ) є тотожна одній з тих множин, що містяться в таблицях ($T_{d,1}$ і $T_{d,2}$).

IV. ЗВ'ЯЗОК МІЖ ПОХІДНОЮ МНОЖИНИ І ЇЇ ЗАМКНЕННЯМ

1. К. Куратовський * вивів основні властивості замкнення множини з такої системи аксіом:

$$
\begin{array}{ll}
I_r & (A+B)^r = A^r + B^r, \\
II_r & A \subset A^r, \\
III_r & O^r = O, \\
IV_r & A^{rr} = A^r.
\end{array}
$$

Можна довести, що система аксіом $I_r - IV_r$ випливає, з аксіом I_d, II_d, IV_d і V_d.

2. Спираючись на аксіоми $I_r - IV_r$, К. Куратовський побудував такі дві таблиці інклюзій між множинами, що їх можна одержати за допомогою ітерації операції A^r і A^c виконуваних на довільній множині A:

$T_{r,1}$

$$
\begin{tikzcd}
 & & A^{crcr} \arrow[dr] & & \\
A^{crc} \arrow[r] \arrow[ddrr] & A^{crcrcrc} \arrow[ur] \arrow[dr] & & A^{rcrcr} \arrow[r] & A^{r} \\
 & & A^{rcrc} \arrow[ur] & & \\
 & & A \arrow[uurr] & &
\end{tikzcd}
$$

$T_{r,2}$

$$
\begin{tikzcd}
 & & A^{rcr} \arrow[dr] & & \\
A^{rc} \arrow[r] \arrow[ddrr] & A^{rcrcrc} \arrow[ur] \arrow[dr] & & A^{crcrcr} \arrow[r] & A^{cr} \\
 & & A^{crcrc} \arrow[ur] & & \\
 & & A^{c} \arrow[uurr] & &
\end{tikzcd}
$$

---

* Sur l'opération A de Analysis Situs, Fundamenta mathematicae, T. III p. 182—199. Аналогічні властивості інших понять топології можна знайти в моїх працях: 1) M. Zarycki, Quelques notions fondamentales de l'Analysis Situs au point de vue de l'Algèbre de la Logique, Fundam. Mathem. IX, pp. 3—15; 2) M. Zarycki, Allgemeine Eigenschaften der Cantorschen Kohärenzen, Transactions of Americ. Mathem. Society, XXX, p. 498; 3) M. Zarycki, Über den Kern einer Menge, Jahresberichte der deutschen Mathem.-vereinigung, XXXIX, s. 154.

3. Можна вивести такі формули, що виражають зв'язок між множинами таблиць $T_{d,1}$ і $T_{d,2}$ і відповідними множинами таблиць $T_{r,1}$ і $T_{r,2}$:

9_d : $A^{crc} \subset A^{cdc}$,
10_d : $A^{d} \subset A^{r}$,
11_d : $A^{rc} \subset A^{dc}$,
12_d : $A^{cd} \subset A^{cr}$,
13_d : $A^{rcr} = A^{dcd}$,
14_d : $A^{crcr} = A^{cdcd}$,
15_d : $A^{crcrc} = A^{cdcdc}$,
16_d : $A^{rcrc} = A^{dcdc}$,
17_d : $A^{rcrcrc} = A^{dcdcdc}$,
18_d : $A^{crcrcrc} = A^{cdcdcdc}$,
19_d : $A^{crcrcr} = A^{cdcdcd}$,
20_d : $A^{rcrcr} = A^{dcdcd}$.

4. Бачимо, що деякі множини таблиць $T_{d,1}$ і $T_{d,2}$ є тотожні відповідним множинам таблиць К. Куратовського. Факт, що в таблицях К. Куратовського є тільки скінчена кількість різних множин, а таблиці $T_{d,1}$ і $T_{d,2}$ містять у собі безліч різних множин, є наслідком того, що $A^{rr} = A^{r}$, а A^{dd} є, в загальному випадку, відмінне від A^{d}.

V. ДЕЯКІ ВИСНОВКИ З АКСІОМИ VI_d

Можна довести, що з аксіоми VI_d випливає зв'язність простору C.*

З аксіом III_d і V_d виходить, що пуста множина і цілий простір є одночасно відкритими і замкненими множинами.

З аксіоми VI_d виходить, що жодна інша підмножина простору не може бути одночасно замкнена і відкрита, бо для $O \neq A \neq C$ умова $A^{d} \subset A \subset A^{cdc}$ неузгоджена з аксіомою VI_d.

VI. ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ МНОЖИНИ A^{dcd}

1. В доведеннях розглянутих досі теорем важливу роль відіграє множина A^{dcd}, яку позначимо коротко знаком A^{m}. Можна довести такі властивості цієї множини:

1_m : якщо $A \subset B$, то $B^{m} \subset A^{m}$,
2_m : $A^{mmm} = A^{mcm} = A^{m}$,
3_m : $O^{m} = C$,
4_m : $C^{m} = O$,
5_m : $(AB)^{mm} \subset A^{mm} B^{mm}$,
6_m : $A^{mm} + B^{mm} \subset (A+B)^{mm}$,
7_m : $A^{mc} \subset A^{mm}$,
8_m : $(A + B)^{m} \subset A^{m}B^{m}$,

* Множину A називаємо зв'язною, якщо її не можна розкласти на суму таких двох непустих множин M і N, щоб було: $MN + MN^{d} + NM^{d} = O$.

$$
\begin{aligned}
&9_m: && A^m + B^m \subset A^m B^m,\\
&10_m: && A^{cm} \subset A^{mm},\\
&11_m: \text{ якщо } && A \subset B, \text{ то } A^{mm} \subset B^{mm},\\
&12_m: && A^m \subset A^{cmm},\\
&13_m: && A^m + A^{mm} = C.
\end{aligned}
$$

2. Можна довести, що для жодної множини A не може бути $A^m = A$.

Можна довести, що A^m є похідною множини зовнішніх точок множини A. Для того, щоб множина A була всюди щільна, треба і досить, щоб задовольнялась одна з таких умов: 1) $A^m = O$, 2) $A^m \subset A$, 3) $A^{mm} = C$.

Множина AA^m є завжди ніде нещільна.

Різниця $A - A^{mm}$ є також завжди ніде нещільна.

Можна нарешті довести, що достатньою і необхідною умовою для того, щоб множина A була ніде нещільна, є кожна з таких формул: 1) $A^m = C$, 2) $A^{mm} = O$, 3) $A \subset A^m$, 4) $A \subset A^{mmc}$, 5) $A^{mm} \subset A^m$, 6) $A^d \subset A^m$, 7) $A^{dd} \subset A^m$.

3. Для множини A^m можна вивести такі таблиці інклюзій

$$
T_{m,1} \qquad
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & A^m \arrow[dr] & \\
A^{mmc} \arrow[ur] \arrow[dr] & & A^{cmm} \\
 & A^{mc} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

$$
T_{m,} \qquad
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & A^{cm} \arrow[dr] & \\
A^{cmmc} \arrow[ur] \arrow[dr] & & A^{mm} \\
 & A^{mc} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

VII. ПРО ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ НЕПЕРЕРВНИХ І ГОМЕОМОРФНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ

1. Нехай кожній точці a простору буде припорядкована однозначно якась точка простору, яку позначимо знаком a^φ. Обернену операцію позначимо знаком $a^{\varphi^{-1}}$. Тоді функція φ перетворює множину A на множину A^φ. Функцію φ називатимемо взаємооднозначною, якщо для кожної множини A маємо $A^{\varphi\varphi^{-1}} = A$.

Функцію φ називаємо неперервною в просторі C, якщо для кожного $A \subset C$:

$$
(1) \quad A^{d\varphi} \subset A^\varphi + A^{\varphi d}.
$$

2. Можна довести, що в евклідових просторах функція є неперервна тоді і тільки тоді, коли

$$(2)\quad A^{d\varphi} + A^{d\varphi d} \subset A^{\varphi} + A^{\varphi d}.$$

Маємо тут друге означення неперервності.

Формули (1) і (2) дають в евклідових просторах два еквівалентні означення поняття неперервності функції. Однак в загальнотопологічному просторі ці два означення не є еквівалентні.

Можна довести, що для їх еквівалентності необхідно і досить, щоб поняття похідної множини задовольняло аксіоми I_d, II_d і IV_d.

3. Функцію називатимемо взаємооднозначною і взаємонеперервною, якщо: $A^{d\varphi} \subset A^{\varphi} + A^{\varphi d}$ і $A^{d\varphi^{-1}} \subset A^{\varphi^{-1}} + A^{\varphi^{-1}d}$ (при першому означенні неперервності), або:

$$A^{d\varphi} + A^{d\varphi d} \subset A^{\varphi} + A^{\varphi d} \text{ і } A^{d\varphi^{-1}} + A^{d\varphi^{-1}d} \subset A^{\varphi^{-1}} + A^{\varphi 1 d}$$

(при другому означенні неперервності).

Можна довести, що це означення є в обох випадках еквівалентне таким двом умовам:

$$A^{d\varphi} \subset A^{\varphi d} \text{ і } A^{d\varphi^{-1}} \subset A^{\varphi^{-1}d}.$$

Функцію φ називаємо гомеоморфізмом, якщо:

$$A^{d\varphi} = A^{\varphi d}.$$

Вияснимо на кількох прикладах роль аксіом I_d — VI_d в теорії неперервних функцій. Розгляньмо такі прості класичні теореми:

T_1. Неперервна функція від неперервної функції є неперервна.

T_2. Тотожне перетворення є неперервне.

T_3. Взаємооднозначні і взаємонеперервні функції творять групу.

T_4. Гомеоморфізми творять групу.

T_5. Гомеоморфізм є рівноважний взаємній однозначності і взаємній неперервності.

T_6. Стала функцій є неперервна.

Ці відомі теореми класичного аналізу не мусять, очевидно, бути вірні в загальніших просторах. Наступні зауваження дадуть нам відповідь на питання, які загальні аксіоми необхідні для доведення цих теорем, яка спеціалізація загальнотопологічного простору потрібна для того, щоб ці теореми були вірні.

Для доведення першої теореми необхідні аксіоми I_d і II_d. Для доведення другої теореми достатня аксіома IV_d при другому означенні неперервності, и при перщому означенні неперервності ця теорема вірна в загальнотопологічному просторі.

Для доведення третьої теореми необхідні аксіоми I_d, II_d і IV_d.

Четверта теорема є вірна в кожному загальнотопологічному просторі.

П'ята теорема вірна в загальнотопологічному просторі при першому означенні неперервності, а при другому означенні неперервності потрібні аксіоми I_d, II_d і IV_d.

Шоста теорема є вірна в кожному загальнотопологічному просторі при обох означеннях неперервності.

М. О. ЗАРИЦКИЙ. О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ПРОИЗВОДНОГО МНОЖЕСТВА В АБСТРАКТНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ.

Резюме:

Пусть C — топологическое пространство, в котором производное множество множества $A \subset C$ удовлетворяет следующим аксиомам:

I : $A \subset B$ влечёт $A^d \subset B^d$,
II : $(A+B)^d \subset A^d + B^d$,
III : $C^d = C$,
IV : $A^{dd} \subset A^d$,
V : $O^d = O$,
VI : $A^d \subset A \subset A^{cdc}$ влечёт $A = O$ или $A = C$.

Через A^c обозначено множество $C - A$.

Можно доказать, что аксиомы I—VI взаимно независимы.

Из перечисленных аксиом можно вывести следующие формулы: 1) $(A+B)^d = A^d + B^d$, 2) $(AB)^d = A^d B^d$, 3) $A^d - B^d \subset (A-B)^d$, 4) $A^{cdc} \subset A^d$, 5) $A^{dcdcdcd} = A^{dcd}$, 6) $A \subset B$ влечёт $A^{cdc} \subset B^{cdc}$ 7) $A^{dcdd} = A^{dcd} = A^{ddcd}$.

Можно вывести многие другие свойства производного множества.

Обозначив через A^r замыкание A, $A^r = A + A^d$, можно вывести из аксиом I—V тождество $A^{rcr} = A^{dcd}$.

Я укажу ещё на следующую теорему: каждое из соотношений 1) $A^{dcd} = C$, 2) $A^{dcdcd} = O$, 3) $A \subset A^{dcd}$, 4) $A \subset A^{dcdcdc}$, 5) $A^{dcdcd} \subset A^{dcd}$, 6) $A^d \subset A^{dcd}$ и 7) $A^{d^n} \subset A^{dcd}$ (где A^{d^n} означает n-ую производную множества A) является необходимым и достаточным условием того, чтобы множество A было неплотным.

Пуст φ есть однозначная функция, преобразующая каждую точку C в точку C и A^φ — множество образов точек A. В эвклидовом про-

странстве каждая из формул 1) $A^{d\varphi} \subset A\varphi + A\varphi^{d}$ и 2) $A^{d\varphi} + A^{d\varphi d} \subset A\varphi + A\varphi^{d}$ является необходимым и достаточным условием того, чтобы функция φ была непрерывной. Эти два определения будут эквивалентны в пространствах, в которых производное множество удовлетворяет аксиомам I, II и IV. Имеют место также три аналогичные условия для того, чтобы функция φ взаимно однозначна ($A\varphi\varphi^{-1} = A$) и взаимно непрерывна:

1) $A^{d\varphi} \subset A\varphi + A\varphi^{d}$ и $A^{d\varphi^{-1}} \subset A\varphi^{-1} + A\varphi^{-1d}$,

2) $A^{d\varphi} + A^{d\varphi d} \subset A\varphi + A\varphi^{d}$ и $A^{d\varphi^{-1}} \subset A^{d\varphi^{-1}d} \subset A\varphi^{-1} + A\varphi^{-1d}$,

3) $A^{d\varphi} \subset A\varphi^{d}$ и $A^{d\varphi^{-1}} \subset A\varphi^{-1d}$.

Если $A^{d\varphi} = A\varphi^{d}$, то имеет место гомеоморфизм.

Можно доказать, что непрерывная функция от непрерывной функции является функцией непрерывной в пространствах, в которых выполняются аксиомы I и II.

Тождественное преобразование непрерывно по первому определению в общих топологических пространствах и по второму определению непрерывно в пространствах, удовлетворяющих аксиомам I, II и IV. Гомеоморфизмы образуют группу; функция, равная постоянной, непрерывна в общих топологических пространствах. По первому определению непрерывности гомеоморфизм эквивалентен взаимной непрерывности и взаимной однозначности в любых топологических пространствах, но по второму определению непрерывности они эквивалентны только в пространствах, в которых производные множества подчинены аксиомам I, II и IV.

Наукові записки Львівського Державного Університету імені Ів. Франка
Том V Серія фізико-математична, вип. 1 1947

А. С. КОВАНЬКО

ПРО КВАДРУВАЛЬНІСТЬ ДЕЯКИХ ОКРЕМИХ ВИДІВ ПОВЕРХОНЬ В СЕНСІ ЛЕБЕГА

Питання про квадрувальність поверхонь в розумінні Лебега в окремих випадках було розв'язане деякими математиками. Так, поверхні виду $z = f(x, y)$ були вивчені L. Tonelli (Rend Acad naz. Linzeia, Vol III, Fasc 7, 1926). Ми також зупинимося на деяких видах поверхонь, а саме ми розглянемо поверхні: конічну і циліндричну, поверхню, утворену обертанням і сковзанням кривої, і окремий вид поверхні переносу.

§ 1. ОПРЕДІЛЕННЯ І ВСТУПНІ ЛЕМИ

Опреділення I. Площею даної поверхні S в розумінні Лебега зветься точна нижня межа нижніх границь послідовностей площ поліедрів наближення даної поверхні.

Опреділення II. Просторова крива Γ зветься квадрувальною, якщо її можна заключити в таку просторову область V, що проекція цієї області на довільну площину має яку завгодно малу площу.

Лема I. Якщо простірна однозв'язна область V заключає в собі деяку множину E, то проекція V на довільну площину має міру більшу або рівну зовнішній мірі проекції на ту ж площину.

Лема II. Якщо Ω однозв'язна область деякої поверхні, без подвійних точок обмежена замкненим контуром C, квадрувальним, то міра проекції Ω на довільну площину більша або рівна мірі проекції області, утвореної проекцією C на ту ж площину.

Лема III. Якщо однозв'язна область Ω деякої поверхні, обмежена квадрувальною кривою C (без подвійних точок), квадрувальна в розумінні Лебега, то площа Ω більша або рівна мірі проекції Ω на довільну площину.

З огляду на виключну простоту лем I й II ми не зупиняємось на їх доведенні. Для леми III ми обмежимось вказівкою, що вона дістається як крайній випадок окремого випадку — поліедра, де вона очевидна.

§ 2. КОНІЧНА ПОВЕРХНЯ

Нехай нам дана конічна поверхня, визначена рівнянням:

$$(S)\quad \left.\begin{aligned} x &= \varphi(u)\cdot v, \\ y &= \psi(u)\cdot v, \\ z &= \chi(u)\cdot v, \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &(\alpha \leqslant u \leqslant \beta), \\ &(0 \leqslant v \leqslant 1). \end{aligned}$$

$\varphi(u)$, $\psi(u)$, $\chi(u)$ — неперервні функції $\neq 0$.

Крім того, спрямована крива $\Gamma(v=1)$ або, що те ж саме:

$$x=\varphi(u),\ y=\psi(u),\ z=\chi(u)\ldots\ldots(\Gamma)$$

припускається квадрувальною без подвійних точок. Припустимо, крім того, що $\varphi(u)>0$, $\psi(u)>0$, $\chi(u)>0$.

Останнє обмеження неістотне і воно лише спрощує наші виклади. В силу неперервності φ, ψ і χ очевидно, що можна указати для них нижню межу $m>0$, тобто

$$\varphi \geqslant m,\ \psi \geqslant m,\ \chi \geqslant m.$$

Теорема I. Необхідна і достатня умова квадрувальності поверхні S, за Лебегом, полягає в тому, що $\dfrac{\varphi(u)}{\chi(u)}$, $\dfrac{\psi(u)}{\chi(u)}\left(\text{а значить і } \dfrac{\varphi(u)}{\psi(u)}\right)$ являються функціями обмеженої варіації.

Доведення.

I. Умова теореми необхідна: справді, нехай S квадрувальна за Лебегом і нехай (S) означає її міру (площу). Задамо число $\varepsilon>0$ як завгодно мале і проведемо на поверхні S лінію Γ_ε.

$$\begin{aligned} x&=\varphi(u)\cdot(1-\varepsilon), \\ y&=\psi(u)\cdot(1-\varepsilon), \\ z&=\chi(u)\cdot(1-\varepsilon). \end{aligned}$$

Задамо достатньо мале число $\delta>0$, степінь малості якого буде вказано нижче. Розіб'ємо інтервал (α, β) на частини значеннями $u_0=\alpha$, u_1, u_2 .... u_{n-1}, $u_n=\beta$ так, щоб $u_k-u_{k-1}<\delta$ ($k=1, 2, 3 \ldots\ldots n$).

Розглянемо трикутник з вершинами: $[0, 0, 0]$,

$$[(1-\varepsilon)\,\varphi(u_{k-1}),\ (1-\varepsilon)\,\psi(u_{k-1}),\ (1-\varepsilon)\,\chi(u_{k-1})],$$

$$[(1-\varepsilon)\,\varphi(u_k),\ (1-\varepsilon)\,\psi(u_k),\ (1-\varepsilon)\,\chi(u_k)].$$

Позначимо цей трикутник коротко через $\bar{S}_k(\varepsilon)$, а його площу через $|\bar{S}_k(\varepsilon)|$.

Твірні конуса $u=u_k$ $(k=1, 2\ldots, n)$ розбивають конус на n частин $S_1\ S_2\ldots S_n$. Виберемо тепер δ таким малим, щоб проекція S_k на площину xoy покрила б проекцію $\bar{S}_k(\varepsilon)$ на цю ж площину, що можливо, поскільки жодна з твірних конуса не паралельна осям координат.

Тоді очевидно, що $|np_{xoy} S_k| \geqslant |np_{xoy} \bar{S}_k(\varepsilon)|$. (1)

Але за лемою III $|S_k| \geqslant |np_{xoy} S_k|$. (2)

На підставі (1) і (2) виводимо, що

$$|S_k| \geqslant |np_{xoy} \bar{S}_k(\varepsilon)|. \tag{3}$$

$$\text{Але } |np_{xoy} \bar{S}_k(\varepsilon)| = \frac{1}{2}(1-\varepsilon)^2 . |\varphi(u_k)\psi(u_{k-1}) - \varphi(u_{k-1})\psi(u_k)|. \tag{4}$$

Тоді на підставі (3) і (4) ми виводимо, що

$$|S_k| \geqslant \frac{1}{2}(1-\varepsilon)^2 |\varphi(u_k)\psi(u_{k-1}) - \varphi(u_{k-1})\psi(u_k)|. \tag{5}$$

Сумуючи (5) для $(k=1, 2\ldots, n)$, дістанемо

$$|S| \geqslant \frac{1}{2}(1-\varepsilon)^2 \sum_{k=1}^{k=n} |\varphi(u_k)\psi(u_{k-1}) - \varphi(u_{k-1})\psi(u_k)| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2}(1-\varepsilon)^2 \frac{1}{m^2} \sum_1^n \left| \frac{\varphi(u_k)}{\psi(u_k)} - \frac{\varphi(u_{k-1})}{\psi(u_{k-1})} \right|. \tag{6}$$

Звідси виводимо, що

$$\sum_1^n \left| \frac{\varphi(u_k)}{\psi(u_k)} - \frac{\varphi(u_{k-1})}{\psi(u_{k-1})} \right| \leqslant \frac{2(S)}{(1-\varepsilon)^2 m^2}. \tag{7}$$

Звідси випливає, що оскільки вибір значень $u_1\ u_2\ldots u_n$ довільний (або $u_k - u_{k-1} < \delta$), то значить функція $\frac{\varphi(u)}{\psi(u)}$ є функцією обмеженої варіації.

II. Умова теореми достатня.

Нехай $\frac{\varphi(u)}{\psi(u)}$, $\frac{\psi(u)}{\chi(u)}$ и $\frac{\chi(u)}{\varphi(u)}$ — функції обмеженої варіації.

Нехай M — верхня межа для функцій $\varphi(u)$, $\psi(u)$, $\chi(u)$.

Візьмемо трикутники $S_k(\varepsilon)$ $(k=1, 2\ldots n)$ і позначимо

$$\varphi(u_k) = x_k,\ \psi(u_k) = y_k,\ \chi(u_k) = z_k.$$

Маємо $\quad | \overline{S}_k(0) | = \frac{1}{2} \sqrt{(y_k z_{k-1} - y_{k-1} z_k)^2 + (z_k x_{k-1} - z_{k-1} x_k)^2 +}$

$$+ (x_k y_{k-1} - x_{k-1} y_k)^2 \leqslant \frac{1}{2} \left| y_k z_{k-1} - y_{k-1} z_k \right| + \frac{1}{2} \left| z_k x_{k-1} - z_{k-1} x_k \right| +$$

$$+ \frac{1}{2} \left| x_k y_{k-1} - x_{k-1} y_k \right| \leqslant \frac{1}{2} y_k y_{k-1} \left| \frac{z_k}{y_k} - \frac{z_{k-1}}{y_{k-1}} \right| +$$

$$+ \frac{1}{2} z_k z_{k-1} \left| \frac{x_k}{z_k} - \frac{x_{k-1}}{z_{k-1}} \right| + \frac{1}{2} x_k x_{k-1} \left| \frac{y_k}{x_k} - \frac{y_{k-1}}{x_{k-1}} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M^2}{2} \left\{ \left| \frac{z_k}{y_k} - \frac{z_{k-1}}{y_{k-1}} \right| + \left| \frac{x_k}{z_k} - \frac{x_{k-1}}{z_{k-1}} \right| + \left| \frac{y_k}{x_k} - \frac{y_{k-1}}{x_{k-1}} \right| \right\}. \tag{8}$$

Сумуємо (8) для ($k = 1, 2 \ldots, n$), дістанемо

$$\sum_1^n \left| \overline{S}_k(0) \right| \leqslant \frac{M^2}{2} \left\{ \sum_1^n \left| \frac{z_k}{y_k} - \frac{z_{k-1}}{y_{k-1}} \right| + \sum_1^n \left| \frac{x_k}{z_k} - \frac{x_{k-1}}{z_{k-1}} \right| + \right.$$

$$\left. + \sum_1^n \left| \frac{y_k}{x_k} - \frac{y_{k-1}}{x_{k-1}} \right| \right\}. \tag{9}$$

Звідси бачимо, що поліедри, утворені з трикутників $\overline{S}_k(0)$, залишаються на площі обмеженими при довільному виборі точок ділення $u = u_k$ ($k = 1, 2 \ldots, n$), поскільки права частина (9) залишається обмеженою, і назвемо цей поліедр „веєром".

Якщо ми дамо послідовність значень $\delta_1 > \delta_2 > \delta_3 \ldots \ldots \to 0$, то дістанемо послідовність „веєрів", яка апроксимує поверхню, а тому згідно з означенням і нижній край площ цих є величина $\geqslant (S)$, але тому, що цей нижній край (lim), що випливає з (9), буде обмежений, то значить і (S) обмежено. Значить, поверхня (S) квадрувальна в сенсі Лебега. Доведену теорему можна сформувати інакше, а саме:

Теорема II. Необхідна і достатня умова квадрувальності поверхні (S) полягає в тому, що будь-який плоский переріз (S), який не проходить через вершину, дає криву, що може бути спрямлена.

Доведення: Переріжемо поверхню (S) площиною

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{10}$$

Вставляючи в (10) замість x, y і z їх значення з рівняння поверхні (S), дістанемо:

$$A\varphi(u)\, v + B\Psi(u)\, v + C\chi(u)\, v + D = 0,$$

звідки

$$v = -\frac{D}{A\varphi(u) + B\psi(u) + C\chi(u)}.$$

Значить, рівняння лінії перерізу будуть

$$\left.\begin{aligned} x &= -\frac{D\varphi(u)}{A\varphi(u)+B\psi(u)+C\chi(u)}, \\ y &= -\frac{D\psi(u)}{A\varphi(u)+B\psi(u)+C\chi(u)}, \\ z &= -\frac{D\chi(u)}{A\varphi(u)+B\psi(u)+C\chi(u)}. \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Якщо (3) квадрувальна, то на підставі теореми I відношення $\frac{\varphi(u)}{\chi(u)}$, $\frac{\psi(u)}{\chi(u)}$, $\frac{\chi(u)}{\varphi(u)}$ — функції обмеженої варіації. Звідки випливає, що і вирази (II) також функції обмеженої варіації, а тоді виходить, що крива Γ буде випрямленою.

Припустимо навпаки, що (Γ) може бути випрямлена. Тоді вирази (II) будуть функціями обмеженої варіації, а тому і їх відношення також (оскільки вони не обертаються в 0). А це будуть якраз $\frac{\varphi}{\psi}$, $\frac{\psi}{\chi}$ і $\frac{\chi}{\varphi}$. Значить, на підставі теореми I поверхня S квадрувальна.

§ 3. ОБЧИСЛЕННЯ ПЛОЩІ КОНІЧНОЇ ПОВЕРХНІ

Візьмемо знову поверхню S (§ 2) і поставимо питання про обчислення її площі в випадку, коли вона квадрувальна. Ми доведемо таку теорему:

Теорема III. Площа поверхні S дорівнює границі площі її „веера“ наближення, коли $n \to \infty$ і $\delta \to 0$ (див. § 2).

Доведення: Зберігаємо значення і побудови теореми I. Згідно з означенням I витікає: δ можна вважати настільки малим, що $\left|\sum_1^n \overline{S}_k(0)\right| \geqslant |S| - \varepsilon'$, де ε' наперед задане яке завгодно мале число.

Вважаємо δ настільки малим, щоб проекції S_k на відповідні площини трикутників $\overline{S}_k(\varepsilon)$ покривали цілком ці трикутники.

Тоді за лемою III

$$|S_k| \geqslant |\bar{S}_k(\varepsilon)| = (1-\varepsilon)^2 \bar{S}_k(0). \tag{13}$$

Сумуючи (13) для ($k=1, 2, 3 \ldots, n$), дістанемо:

$$|S| \geqslant (1-\varepsilon)^2 \left| \sum_1^n S_k(0) \right|,$$

звідки

$$\left| \sum_1^n S_k(0) \right| \leqslant \frac{(S)}{1-\varepsilon}. \tag{14}$$

Порівнюючи (12) і (14), знаходимо:

$$|S| - \varepsilon' \leqslant \left| \sum_1^n \bar{S}_k(0) \right| \leqslant \frac{(S)}{(1-\varepsilon)^2}, \tag{15}$$

звідки

$$|S| - \varepsilon' \leqslant \lim_{\substack{n \to \infty \\ \delta \to 0}} \left| \sum_1^n \bar{S}(0) \right| \leqslant \frac{|S|}{(1-\varepsilon)^2}. \tag{16}$$

Але тому, що ε і ε' довільно малі, ми робимо висновок, що

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ \delta \to 0}} \left| \sum_1^n \bar{S}_k(0) \right| = |S|, \tag{17}$$

що й треба було довести.

Після цього ми можемо приступити до обчислення границі площі „веера".

Для цього ми доведемо слідуючу лему:

Нехай $\Phi(\lambda, \mu)$ означає частину поверхні S, замкнену між твірними $u=\lambda$ і $u=\mu$.

Нехай $F_\varrho(\lambda, \mu)$ означає площу трикутника з вершинами

$$(0, 0, 0), \; [(1-\varrho)\varphi(\lambda), (1-\varrho)\psi(\lambda), (1-\varrho)\chi(\lambda)],$$
$$[(1-\varrho)\varphi(\mu), (1-\varrho)\psi(\mu), (1-\varrho)\chi(\mu)].$$

Якщо $\varrho=0$, ми будемо писати просто $F(\lambda, \mu)$.

Нехай $\lambda = u - \delta_1$ і $\mu = u + \delta_2$.

Тоді очевидно, що

$$\lim_{\substack{\delta_1 \to 0 \\ \delta_2 \to 0}} \frac{\Phi(u-\delta_1, u+\delta_2)}{\delta_1 + \delta_2} = \Phi'_u(\alpha, u) \tag{18}$$

там, де $\Phi'_u(\alpha, u)$ існує.

Лема IV. $\Phi'_u(\alpha, u)$ існує для майже всіх значень u і збігається з $\lim\limits_{\substack{\delta_1 \to 0 \\ \delta_2 \to 0}} \frac{F(u-\delta_1, u+\delta_2)}{\delta_1+\delta_2}$, який існує також майже всюди на $(\alpha \leqslant u \leqslant \beta)$.

Доведення. Перш за все доведемо існування границі

$$\lim_{\substack{\delta_1 \to 0 \\ \delta_2 \to 0}} \frac{F(u-\delta_1, u+\delta_2)}{\delta_1+\delta_2}.$$

Для скорочення запису повернемось до попередніх означень і припустимо: $\Theta(\mu) - \Theta(\lambda) = \Delta\Theta$.

Дістанемо тоді

$$F(\lambda, \mu) = \frac{1}{2}\sqrt{[\psi(\mu)\chi(\lambda) - \psi(\lambda)\chi(\mu)]^2 + [\chi(\mu)\varphi(\lambda) - \chi(\lambda)\varphi(\mu)]^2 + + [\varphi(\mu)\psi(\lambda) - \varphi(\lambda)\psi(\mu)]^2}. \tag{19}$$

Перетворимо кожну квадратову дужку

$$[\psi(\mu)\chi(\lambda) - \varphi(\lambda)\chi(\mu)]^2 = \chi^2(\lambda)\chi^2(\mu)\left[\frac{\psi(\mu)}{\chi(\mu)} - \frac{\psi(\lambda)}{\chi(\lambda)}\right]^2 =$$

$$= \chi^2(\lambda)\chi^2(\mu)\left[\Delta\left(\frac{\psi}{\chi}\right)\right]^2.$$

Його можна перетворити й так:

$$\psi^2(\lambda)\varphi^2(\mu)\left[\Delta\left(\frac{\chi}{\psi}\right)\right]^2.$$

Аналогічно перетворюємо останні дві дужки і тоді вся підкоренева кількість прийме такий вигляд:

$$\frac{1}{2}\varphi^2(\lambda)\varphi^2(\mu)\left\{\left[\Delta\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)\right]^2 + \left[\Delta\left(\frac{\chi}{\varphi}\right)\right]^2\right\} + \frac{1}{2}\psi^2(\lambda)\psi^2(\mu)\left\{\left[\Delta\left(\frac{\chi}{\psi}\right)\right]^2 + \right.$$

$$\left. + \left[\Delta\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)\right]^2\right\} + \frac{1}{2}\chi^2(\lambda)\chi^2(\mu)\left\{\left[\Delta\left(\frac{\varphi}{\chi}\right)\right]^2 + \left[\Delta\left(\frac{\psi}{\chi}\right)\right]^2\right\}.$$

Беручи корінь і розділяючи на $\mu - \lambda$, а потім, переходячи до границі при $\lambda \to u$ і $\mu \to u$, або, що те ж саме, при $\delta_1 \to 0$ і $\delta_2 \to 0$, дістанемо:

$$\lim_{\substack{\delta_1 \to 0 \\ \delta_2 \to 0}} \frac{F(u-\delta_1,\ u+\delta_2)}{\delta_1+\delta_2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{\varphi^4\left\{\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)'^2+\left(\frac{\chi}{\varphi}\right)'^2\right\}+ \psi^4\left\{\left(\frac{\chi}{\psi}\right)'^2+\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)'^2\right\}+\chi^4\left\{\left(\frac{\varphi}{\chi}\right)'^2+\left(\frac{\psi}{\chi}\right)'^2\right\}}. \tag{20}$$

І це буде мати місце для майже кожного значення u, поскільки відношення $\frac{\psi}{\varphi}$, $\frac{\chi}{\varphi}, \ldots, \frac{\psi}{\chi}$ функції обмеженої варіації, а тому мають майже всюди похідні. Існування границі доведене. Позначимо його корінь через $l(u)$. Переходимо до дальшого.

Нехай E_N — множина значень u на (α, β), які мають ту властивість, що, коли замкнемо якусь точку E_N у відрізок (λ, μ) такий, що $\mu-\lambda<\frac{\beta-\alpha}{N}$, то

$$\left|\frac{\Phi(\lambda,\mu)-F(\lambda,\mu)}{\mu-\lambda}\right|>\frac{1}{N}. \tag{21}$$

Візьмемо множину $E=\sum_1^\infty E_N$. (22)

Це очевидно множина точок, де $\Phi'_u(\alpha, u) \neq l(u)$.

Розіб'ємо (α, β) на інтервали (u_{k-1}, u_k) $(k=1, 2 \ldots. n)$ так, що довжина кожного $<\frac{1}{N}$ і крім того ще такими малими, щоб за вищевзятими позначеннями ми мали б (в силу леми III):

$$F_\varrho(u_{k-1}, u_k) \leqslant \Phi(u_{k-1}, u_k), \tag{23}$$

де ϱ — наперед фіксоване яке завгодно мале число (>0), а також, щоб

$$-\frac{\varepsilon}{N}<\Phi(\alpha,\beta)-\sum_1^n F(u_{k-1}, u_k)<+\frac{\varepsilon}{N}. \tag{24}$$

Множачи останню нерівність на $(1-\varrho)^2$, ми дістанемо

$$-\frac{\varepsilon}{N}(1-\varrho)^2<\Phi(\alpha,\beta)(1-\varrho)^2-\sum_1^n F_\varrho(u_{k-1}, u_k)<+\frac{\varepsilon}{N}(1-\varrho)^2,$$

звідки
$$-\frac{\varepsilon}{N}(1-\varrho)^2 < \Phi(\alpha,\beta) - \sum_1^n F_\varrho(u_{k-1}, u_k) + $$
$$+ (\varrho^2 - 2\varrho)\,\Phi(\alpha,\beta) < +\frac{\varepsilon}{N}(1-\varrho)^2,$$

або інакше

$$-\frac{\varepsilon}{N}(1-\varrho)^2 + \varrho(2-\varrho)\;\Phi(\alpha,\beta) < \Phi(\alpha,\beta) - \sum_1^n F_\varrho(u_{k-1},\,u_k) <$$
$$< +\frac{\varepsilon}{N}(1-\varrho)^2 + \varrho(2-\varrho)\;\Phi(\alpha,\,\beta). \tag{25}$$

В силу (23) видно, що середній член останнього співвідношення — величина невід'ємна, а тому ми можемо залишати тільки середній і правий члени, переписавши (25) в такому вигляді:

$$\sum_1^n [\,\Phi(u_{k-1}, u_k) - F_\varrho(u_{k-1}, u_k)\,] < \frac{\varepsilon}{N}(1-\varrho)^2 + \varrho(2-\varrho)\Phi(\alpha,\beta). \tag{26}$$

Залишимо тільки ті члени, які відносяться до інтервалів $(u_{k-1},\, u_k)$, що покривають точки множини E_N.

Відповідну суму позначимо через $\sum\limits_{(E_N)}$.

Ми дістанемо, очевидно, в силу (21) і вибору інтервалів $(u_{k-1},\, u_k)$, також беручи до уваги (26), що

$$|E_N| \leqslant \sum_{(E_N)} (u_k - u_{k-1}) < \sum_{(E_N)} \left|\,\Phi(u_{k-1},\, u_k) - F(u_{k-1},\, u_k)\,\right| \leqslant$$
$$\leqslant N\sum_1^n \left|\,\Phi(u_{k-1}, u_k) - F(u_{k-1},\, u_k)\right| \leqslant \frac{N}{(1-\varrho)^2}\left\{\sum_1^n \left|\,\Phi(u_{k-1},\, u_k) -\right.\right.$$
$$\left.\left. - F_\varrho(u_{k-1},\, u_k)\,\right| + \varrho(2-\varrho)\Phi(\alpha,\beta)\right\} \leqslant \frac{N}{(1-\varrho)^2}\left\{\frac{\varepsilon}{N}(1-\varrho)^2 + \right.$$
$$\left. + 2\varrho(2-\varrho)\,\Phi(\alpha,\beta)\right\} = \varepsilon + \frac{2\varrho(2-\varrho)}{(1-\varrho)^2}\,N\Phi(\alpha,\,\beta).$$

Число ϱ було вибране нами наперед і незалежно від числа N. Тому вираз $\frac{2\varrho(2-\varrho)}{(1-\varrho)^2}N\cdot\Phi(\alpha,\beta)$ довільно малий разом з ϱ.

Звідси випливає висновок, що $|E_N|=0$, значить

$$|E|=\sum_1^\infty |E_N|=0.$$

Поза E ми маємо

$$\Phi'_u(\alpha,\ u)=l(u), \tag{27}$$

що й треба було довести.

В силу загальних властивостей функцій обмеженої варіації і того факту, що $\Phi(\alpha,\ u)$ не спадаюча функція u, виникає очевидно, що $\Phi(\alpha,\beta)\geqslant\int_\alpha^\beta l(u)du$. Рівність очевидно можлива, якщо $\Phi(\alpha,u)$ — абсолютно неперервна функція u.

Теорема IV. Якщо відношення $\frac{\varphi}{\chi}$ і $\frac{\psi}{\chi}$ абсолютно неперервні функції u, то $\Phi(\alpha,\beta)=\int_\alpha^\beta l(u)du$ і навпаки.

Для цього очевидно досить довести, що $\Phi(\alpha,\ u)$ абсолютно неперервна функція u. Зберігаючи попередні позначення, ми маємо:

$$\left.\begin{array}{l}\left|\Delta\left(\frac{\chi}{\varphi}\right)\right|\\ \left|\Delta\left(\frac{\varphi}{\chi}\right)\right|\\ \left|\Delta\left(\frac{\psi}{\chi}\right)\right|\end{array}\right\}\leqslant\frac{2\sqrt{2}}{m^2}\cdot F(\lambda,\ \mu) \tag{28}$$

і $$F(\lambda,\mu)\leqslant\frac{M^2}{2\sqrt{2}}\left\{\left|\Delta\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)\right|+\left|\Delta\left(\frac{\chi}{\varphi}\right)\right|+\left|\Delta\left(\frac{\chi}{\psi}\right)\right|+\right.$$
$$\left.+\left|\Delta\left(\frac{\chi}{\psi}\right)\right|+\left|\Delta\left(\frac{\varphi}{\chi}\right)\right|+\left|\Delta\left(\frac{\psi}{\chi}\right)\right|\right\}. \tag{29}$$

Сумуючи (28) і (29) по системі інтервалів, $(\lambda,\ \mu)$, загальна довжина яких достатньо мала, можемо добитись того (тому що $\frac{\varphi}{\chi}$ і $\frac{\psi}{\chi}$, а значить і інші відношення функцій абсолютно неперервні функції u), що $\sum_{(\lambda\mu)} F(\lambda,\ \mu)$ буде величиною якою завгодно малою, як видно з (29).

Обернене виходить з (28), але $\sum_{(\lambda\mu)} F(\lambda,\ \mu)$ яке завгодно мале відрізняється від $\sum_{(\lambda\mu)}{}'\Phi(\lambda,\ \mu)$, якщо крім всього інтервали (λ, μ) будуть обрані якими завгодно малими. Значить і $\sum\limits_{(\lambda\mu)} \Phi(\lambda, \mu)$ — величина яка завгодно мала разом з $\sum\limits_{(\lambda\mu)} \left| \Delta\left(\frac{\varphi}{\chi}\right) \right|$, $\sum\limits_{(\lambda\mu)} \left| \Delta\left(\frac{\psi}{\chi}\right) \right|$.

Це означає, що $\Phi(\alpha, u)$ є функція абсолютно неперервна, що й треба було довести.

Якщо ми не припускаємо абсолютної неперервності відношень функцій φ, ψ і χ, то ми можемо говорити про площу поверхні, яка виражається інтегралом (границею суми) типу Стільтьеса, який ми запишемо так:

$$S(\alpha, \beta) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi^4\left\{\left[d\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)\right]^2 + \left[d\left(\frac{\chi}{\varphi}\right)\right]^2\right\} + \psi^4\left\{\left[d\left(\frac{\chi}{\psi}\right)\right]^2 + \left[d\left(\frac{\varphi}{\psi}\right)\right]^2\right\} + \chi^4\left\{\left[d\left(\frac{\varphi}{\chi}\right)\right]^2 + \left[d\left(\frac{\psi}{\chi}\right)\right]^2\right\}}. \tag{30}$$

§ 4. ЦИЛІНДРИЧНА ПОВЕРХНЯ І ОБЧИСЛЕННЯ ЇЇ ПЛОЩІ

Нехай дана циліндрична поверхня

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(u), \\ y &= \psi(u), \\ z &= v \cdot \chi(u), \end{aligned}\right\} (s) \qquad \begin{aligned} &(\alpha \leqslant u \leqslant \beta), \\ &(0 \leqslant v \leqslant 1), \\ &\varphi, \psi \text{ і } \chi \text{ — неперервні } (\chi > 0). \end{aligned}$$

Крива (Γ): $x = \varphi(u)$, $y = \psi(u)$, $z = \chi(u)$ не має подвійних точок.

Побудуємо слідуючу криву Γ_ε:

$$x = \varphi(u), \quad y = \psi(u), \quad z = (1-\varepsilon)\chi(u).$$

Розіб'ємо інтервал $(\alpha \leqslant u \leqslant \beta)$ на n частин значеннями $u_0 = \alpha$, u_1, u_2, ..., u_{n-1}, $u_n = \beta$. Ці інтервали ділення виберемо так, щоб ламана, утворена послідовними сполученнями точок $[\varphi(u_k), \psi(u_k), (1-\varepsilon)\cdot\chi(u_k)]$, $(k = 1, 2, 3 \ldots n)$, мала проекціями на площини xoz і yoz лінії, що цілком покриваються відповідними проекціями S на ті ж площини.

Припустимо $x_k = \varphi(u_k)$, $y_k = \psi(u_k)$, $z_k = \chi(u_k)$.

Побудуємо трапеції, вершинами яких будуть:

$$M_{k-1}(x_{k-1}, y_{k-1}, 0), \quad M_k(x_k, y_k, 0), \quad N_{k-1}(x_{k-1}, y_{k-1}, z_{k-1}),$$
$$N_k(x_k, y_k, z_k) \qquad (k = 1, 2 \ldots n)$$

і інші трапеції з вершинами:

M_{k-1}, N_k, P_{k-1} $(x_{k-1}, y_{k-1}, z_{k-1}(1-\varepsilon))$, P_k $(x_k, y_k, z_k(1-\varepsilon))$.

Площі їхніх проекцій на yoz відповідно дорівнюють

$$\frac{(z_{k-1}+z_k)\,|y_k-y_{k-1}|}{2};\ \frac{(1-\varepsilon)\,(z_{k-1}+z_k)\,|y_k-y_{k-1}|}{2}.$$

Твірні $u=u_k$ $(k=1,2,3\ldots,n)$ розбивають S на n частин.

Позначимо через S_k k^w частину.

Тому, що проекція S_k на площину yoz повністю покриває проекцію трапеції $M_{k-1}\,M_k\,P_{k-1}\,P_k$, то за лемою III

$$|S_k| \geqslant \frac{(1-\varepsilon)}{2}(z_{k-1}+z_k)\ |y_k-y_{k-1}|,$$

звідки $$|y_k-y_{k-1}| \leqslant \frac{2}{1-\varepsilon}\cdot\frac{|S_k|}{z_{k-1}+z_k}.$$

Оскільки $x>0$, то x має нижню межу $m>0$, а тому з останнього співвідношення витікає, що:

$$|y_k-y_{k-1}| \leqslant \frac{|S_k|}{(1-\varepsilon)\,m} \qquad (k=1,\,2\ldots.n). \tag{31}$$

Сумуючи (31) по індексу k, дістанемо:

$$\sum_{k=1}^{n}|y_k-y_{k-1}| \leqslant \frac{|S|}{(1-\varepsilon)\,m}$$

або $$\sum_{1}^{n}|\psi(u_k)-\psi(u_{k-1})| \leqslant \frac{|S|}{(1-\varepsilon)\cdot m}. \tag{32}$$

Звідси видно, що $\psi(u)$ є функцією обмеженої варіації.

Розглянемо поверхню, утворену трапеціями $M_{k-1}\,M_k\,P_{k-1}\,P_k$, а потім трапеціями $M_{k-1}\,M_k\,N_{k-1}\,N_k$.

Позначимо трапеції $M_{k-1}\,M_k\,P_{k-1}\,P_k$ через $\overline{S}_k(\varepsilon)$, тоді трапеція $M_{k-1}\,M_k\,N_{k-1}\,N_k$ буде позначатися через $\overline{S}_k(0)$, (бо для неї $\varepsilon=0$). Задамо довільно мале число $\varepsilon'>0$.

За означенням I очевидно, що при n досить великому і інтервалах $(u_{k-1},\,u_k)$ достатньо малих

$$\left|\sum_{1}^{n}\overline{S}_k(0)\right| \geqslant |S|-\varepsilon. \tag{33}$$

З другого боку, за лемою III виникає, що

$$|S_k| \geqslant |\overline{S}_k(\varepsilon)| = (1-\varepsilon)^2\,|\overline{S}_k(0)|. \tag{34}$$

Сумуючи (34) за індексом k ($k=1, 2, 3 \ldots . n$), дістанемо:

$$|S| \geqslant (1-\varepsilon)^2 \cdot \left| \sum_1^n \overline{S}_k(0) \right|, \tag{35}$$

звідки

$$\left| \sum_1^n \overline{S}_k(0) \right| \leqslant \frac{|S|}{(1-\varepsilon)^2}. \tag{36}$$

Порівнюючи (33) і (36), ми бачимо, в зв'язку з довільністю ε, що $\sum\limits_1^n \overline{S}_k(0)$ служить поліедром наближення для S в сенсі Лебега (див. опреділення 1).

Тепер легко бачити, що умови, щоб $\varphi(u)$ і $\psi(u)$ були функціями обмеженої варіації, являються достатніми для квадрувальності поверхні S. Дійсно, $\left|\sum\limits_1^n \overline{S}_k(0)\right|$ залишається величиною обмеженою, тому що

$$|\overline{S}_k(0)| = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2} \cdot \frac{z_{k-1} + z_k}{2}, \tag{37}$$

звідки видно

$$|\overline{S}_k(0)| \leqslant M\{|x_k - x_{k-1}| + |y_k - y_{k-1}|\}, \tag{38}$$

де M є максимум $x(u)$.

Сумуючи (38), дістанемо:

$$\left|\sum_1^n \overline{S}_k(0)\right| \leqslant M\left\{\sum_1^n |\varphi(u_k) - \varphi(u_{k-1})| + \sum_1^n |\psi(u_k) - \psi(u_{k-1})|\right\}, \tag{39}$$

звідки і виникає наше твердження. З формул (37) випливає, що для $|S|$ ми маємо формулу в вигляді інтеграла типу Стільтьєса

$$|S| = \int_\alpha^\beta \chi(u) \sqrt{[d\varphi(u)]^2 + [d\psi(u)]^2}. \tag{40}$$

Зокрема, якщо $\varphi(u)$ і $\psi(u)$ абсолютно неперервні, можна легко показати, що

$$|S| = \int_\alpha^\beta \chi(u) \sqrt{[\varphi'(u)]^2 + [\psi'(u)]^2}\, du. \tag{41}$$

Таким чином доведена слідуюча теорема:

Теорема V. Необхідна і достатня умова, щоб циліндрична поверхня S була квадрувальною, полягає в тому, що функції $\varphi(u)$ і $\psi(u)$ обмеженої варіації, або, що те саме, плоский поперечний переріз циліндричної поверхні є випрямлена крива. В випадку квадрувальності площа S виражається формулою (40) або в окремому випадку формулою (41).

§ 5. ПОВЕРХНЯ, УТВОРЕНА ОБЕРТАННЯМ КРИВОЇ ЗІ СКОВЗАННЯМ

Розглянемо поверхню, виражену рівнянням:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(u)\,\mathrm{Cos}\,v, \\ y &= \varphi(u)\,\mathrm{Sin}\,v, \\ z &= \psi(u) + f(v), \end{aligned}\right\} (S) \quad \begin{aligned} &(\alpha \leqslant u \leqslant \beta)\ f(v) \text{ — немаліюча функція,} \\ &(o \leqslant v \leqslant \pi)\ \varphi(u) \text{ і } \chi(u) \text{ — неперервні.} \end{aligned}$$

$\varphi(u) > o$ і крива (Γ) $x = \varphi(u)$ $y = o$ $z = \chi(u)$ не має подвійних точок.

Теорема VI. Необхідна і достатня умова квадрувальності поверхні (S) полягає в тому, щоб крива (Γ) була випрямлена.

Доведення.

1) Умови теореми необхідні.

Розіб'ємо інтервал (α, β) на частини значеннями $u_0 = \alpha$, $u_1, u_2, \ldots u_{n-1}$, $u_n = \beta$. Криві $u = u_k$ $(k = 1, 2 \ldots n)$ розіб'ють поверхню на n пасів, які позначимо через $S_1, S_2 \ldots S_n$.

Так що $S = \sum_{k=1}^{r=n} S_k$, звідки $|S| = \sum_{k=1}^{n} |S_k|$

$|S|$ має скінчену величину, а значить і кожна з S_k також.

Спроектуємо S_k на площину xoy. Це буде півкільце між колами радіусів $\varphi(u_{k-1})$ і $\varphi(u_k)$, тому площа проекції не менша, як $\frac{\pi}{2} \left| \varphi^2(u_k) - \varphi^2(u_{k-1}) \right|$. А тоді за лемою II ми маємо

$$|S_k| \geqslant \frac{\pi}{2} \left| \varphi^2(u_k) - \varphi^2(u_{k-1}) \right|. \tag{42}$$

Сумуючи (42) за k, дістанемо:

$$|S| \geqslant \frac{\pi}{2} \sum_{1}^{n} \left| \varphi^2(u_k) - \varphi^2(u_{k-1}) \right| = \frac{\pi}{2} \sum_{1}^{n} \left| \varphi(u_k) - \varphi(u_{k-1}) \right| \cdot$$

$$\cdot \left| \varphi(u_k) + \varphi(_{k-1}) \right| \geqslant \frac{\pi}{2} \cdot 2m \sum_{1}^{n} \left| \varphi(u_k) - \varphi(u_{k-1}) \right|,$$ де m позначає нижню межу $\varphi(u)$.

Тоді $$\sum_1^n \left| \varphi(u_k) - \varphi(u_{k-1}) \right| \leqslant \frac{1}{m\pi} |S|. \tag{43}$$

З (43) видно, що $\varphi(u)$ є функцією обмеженої варіації.

Спроектуємо тепер S_k на площину xoz. В проекції ми дістанемо пас, обмежений такими кривими Γ_1 і Γ_2:

$$\Gamma_1 \begin{cases} x = \varphi(u_{k-1}) \operatorname{Cos} v, \\ z = \psi(u_{k-1}) + f(v); \end{cases} \qquad \Gamma_2 \begin{cases} x = \varphi(u_k) \operatorname{Cos} v, \\ z = \psi(u_k) + f(v); \end{cases}$$

(ці криві очевидно не перетинаються) і прямими $v = o$, $v = \pi$ (в площині xoz). Площа вказаного пасу має такий вираз:

$$\left| \int_o^\pi [\psi(u_k) + f(v)]\, d(\varphi(u_k) \cdot \operatorname{Cos} v) - \int_o^\pi [\psi(u_{k-1}) + \right.$$

$$+ f(v)]\, d(\varphi(u_{k-1}) \cdot \operatorname{Cos} v) \Big| = \Big| [\psi(u_k)\varphi(u_k) -$$

$$- \psi(u_{k-1})\, \varphi(u_{k-1})] \int_o^\pi \operatorname{Sin} v\, dv +$$

$$+ [\varphi(u_k) - \varphi(u_{k-1})] \int_o^\pi f(v) \cdot \operatorname{Sin} v\, dv \Big| = \Big| [2\psi(u_k) + A]\, \varphi(u_k) -$$

$$- [2\varphi(u_{k-1}) + A]\, \varphi(u_{k-1}) \Big|,$$

де $$A = \int_o^\pi f(v) \operatorname{Sin} v\, dv.$$

За лемою III ми робимо висновок, що

$$|S_k| \geqslant \left| [2\psi(u_k) + A]\, \varphi(u_k) - [2\psi(u_{k-1}) + A]\, \varphi(u_{k-1}) \right|. \tag{44}$$

Сумуючи (44) за k, дістанемо:

$$|S| \geqslant \sum_{k=1}^n \left| [2\psi(u_k) + A]\, \varphi(u_k) - [2\psi(u_{k-1}) + A]\, \varphi(u_{k-1}) \right|. \tag{45}$$

Звідси випливає, що $[2\psi(u) + A]\,\varphi(u)$ є функцією обмеженої варіації. І тому, що $\varphi(u) \geqslant m$, то $2\psi(u) + A$, а значить $\psi(u)$ є також функціями обмеженої варіації.

Значить Г випрямлена. Необхідність умов доведена.

2) Умови теореми достатні.

Нехай Г випрямлена. Тоді $\varphi(u)$ і $\psi(u)$ функції обмеженої варіації. Тоді, як відомо, можна зробити таке гомеоморфне перетворення параметру u в новий, що функції $\varphi(u)$ і $\psi(u)$

будуть задовольняти умові Ліпшица. А тоді наша поверхня буде ректифікованою, а значить квадрувальною і її площа буде дана класичною формулою в вигляді подвійного інтеграла. Відмітимо, що можна було б йти прямим шляхом побудови поліедру наближення без застосування загальної теорії поверхонь. Зокрема, якщо $f(v)=o$, ми маємо поверхню обертання і відомий результат I. Favard'a.

§ 6. ПОВЕРХНЯ ТРАНСЛЯЦІЇ (ОКРЕМИЙ ВИД)

Розглянемо поверхню, дану рівняннями

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(u), \\ y &= \psi(u), \\ z &= f_1(u) + f_2(v) \end{aligned}\right\} \quad (S) \qquad \left\{\begin{aligned} \alpha \leqslant u \leqslant \beta \\ a \leqslant v \leqslant b \end{aligned}\right\},$$

де $\varphi(u)$, $\psi(v)$, $f_1(u)$, $f_2(v)$ — неперервні функції відповідних змінн..х.

Теорема VII. Необхідна і достатня умова квадрувальності поверхні (S) в сенсі Лебега полягає в тому, що функції $\varphi(u)$, $\psi(v)$, $f_1(u)$, $f_2(v)$ будуть функціями обмеженої варіації відповідних змінних.

Доведення.

1) Умови теореми необхідні.

Розіб'ємо інтервали (α, β) і (a, b) на частини значеннями $u_0=\alpha,\ u_1,\ u_2, \ldots, u_{n-1},\quad u_n=\beta,\ v_0=a,\ v_1,\ v_2 \ldots, v_{n-1},\ \ v_n=b$.

Значення $u=u_k$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ розбивають поверхню на ряд пасів, проекції яких на площину xoy будуть обмежені прямими, паралельними осі oy. Позначимо ці паси через $S_1, \ldots S_n$.

Проекція S_k на площину xoy буде не менша, ніж

$$|\varphi(u_k)-\varphi(u_{k-1})| \cdot (b-a).$$

Звідси за лемою III ми дістанемо, що

$$|S_k| \geqslant |\varphi(u_k)-\varphi(u_{k-1})| \cdot (b-a). \tag{46}$$

Сумуючи (46) за k, дістанемо

$$|S| \geqslant \sum_{k=1}^{n} |\varphi(u_k)-\varphi(u_{k-1})| \cdot (b-a). \tag{47}$$

Звідси видно, що $\varphi(u)$ є функцією обмеженої варіації. Так само, міняючи ролі вісей xo і yo, ми дістанемо, що $\psi(v)$

є функція обмеженої варіації. Проекція S_k на площину yoz буде очевидно не менша, ніж

$$(b-a)\cdot\left|\left[f_1(u_k)+f_2(v)\right]-\left[f_1(u_{k-1})+f_2(v)\right]\right| = \\ = \left|f_1(u_k)-f_1(u_{k-1})\right|\cdot(b-a).$$

Звідси за лемою III ми маємо, що

$$|S_k| \geqslant |f_1(u_k)-f_1(u_{k-1})|\cdot(b-a). \tag{48}$$

Сумуючи (48), дістанемо

$$|S| \geqslant (b-a)\sum_{k=1}^{n}|f_1(u_k)-f_1(u_{k-1})|. \tag{49}$$

Тому ми робимо висновок, що $f_1(u)$ є функцією обмеженої варіації. Змінюючи ролі вісей ox і oy, ми так само доведемо, що $f_2(v)$ є функцією обмеженої варіації. Необхідність умови доведена.

2) Умови теореми достатні.

Нехай $f_1(u)$, $f_2(v)$, $\varphi(u)$ і $\psi(v)$ будуть функціями обмеженої варіації. Звідси випливає, як і в прикладі § 5, що поверхня ректифікована, а значить квадрувальна, що й треба було довести.

Розглянемо 4 точки

$$(u_{k-1},\ v_{e-1}),\quad (u_{k-1},\ v_e),\quad (u_k,\ v_{e-1}),\quad (u_k,\ v_e)$$

на поверхні (S). Легко перевірити, що вони лежать в одній площині і творять паралелограм.

З другого боку, лінії $u=u_{k-1}$, $u=u_k$, $v=v_{e-1}$, $v=v_e$ утворюють на поверхні S криволінійний чотирикутник, що має ту властивість, що його проекція на площину паралелограма не менша площі паралелограма. Даючи k значення $1, 2, 3, \ldots, n$ і $e-1, 2, 3, \ldots m$, ми з одержаних паралелограмів утворюємо поліедр, вписаний в нашу поверхню. В силу тільки що сказаного ми повинні вивести, що площа (S) нашої поверхні не менша площі цього поліедра, які б малі не були його боки. Значить, цей поліедр можна розглядати, як поліедр наближення для даної поверхні, який дає площу поверхні за Лебегом. Елементарний паралелограм має проекції на площі координат, площі яких дорівнюють відповідно:

$$|\varphi(u_k)-\varphi(u_{k-1})|\cdot|\psi(v_e)-\psi(v_{e-1})|,\ f_2(v_e)-f_2(v_{e-1})|\cdot|\varphi(u_k)-\varphi(u_{k-1})|$$

$$|f_1(u_k)-f_1(u_{k-1})|\cdot|\psi(v_e)-\psi(v_{e-1})|.$$

Беручи суму квадратів цих трьох величин, витягаючи корінь квадратовий і сумуючи за всіма індексами k і l, ми дістанемо площу поліедра наближення.

Переходячи до границі, ми виразимо поверхні в формі подвійного інтегралу типу Стільтьеса:

$$|S| = \int_{\alpha}^{\beta}\int_{a}^{b} \sqrt{[d\varphi(u)]^2 \cdot [d\Psi(v)]^2 + [df_2(v)]^2 \cdot [d\varphi(u)]^2 + + [df_1(u)]^2 \cdot [d\Psi(v)]^2}. \tag{50}$$

Зокрема, якщо $\varphi(u)$, $\Psi(v)$, $f_1(u)$, $f_2(v)$ задовольняють умові Ліпшица або навіть тільки абсолютно неперервні[1]), то ми дістаємо класичний інтеграл

$$|S| = \int_{\alpha}^{\beta}\int_{a}^{b} \sqrt{[\varphi'(u)]^2 \cdot [\psi'(v)]^2 + [f'_2(v)]^2 \cdot [\varphi'(u)]^2 + + [f'_1(u)]^2 \cdot [\psi'(v)]^2}\, dudv. \tag{51}$$

ЛІТЕРАТУРА

1. А. С. Ковань ко. Об одном прямом методе исследования некоторых квадрируемых поверхностей. Известия НИИММ, Томск, государственный университет.

2. I. Favard. Exemples de surfaces quarrables. Annali della Scuolo Norm. sup. di Pisa (sc. Tosiche Metlem), Ser. II, Vol. IV, 1935 — XIII.

А. С. КОВАНЬКО. О КВАДРИРУЕМОСТИ НЕКОТОРЫХ ЧАСТНЫХ ВИДОВ ПОВЕРХНОСТЕЙ В СМЫСЛЕ ЛЕБЕГА

Резюме

1) Коническая поверхность

$$\left.\begin{aligned} x &= v\varphi(u),\\ y &= v\psi(u),\\ z &= v\varkappa(u), \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &(\alpha \leqslant u \leqslant \beta)\\ &(0 \leqslant v \leqslant 1), \end{aligned} \tag{1}$$

где $\varphi(u)$, $\psi(u)$, $\varkappa(u)$ — непрерывные, отличные от нуля функции.

Необходимое и достаточное условие квадрируемости в смысле Лебега поверхности (1) состоит в том, чтобы отношения $\frac{\varphi(u)}{\varkappa(u)}$ и $\frac{\psi(u)}{\varkappa(u)}$ были функциями ограниченной вариации.

2) Цилиндрическая поверхность

$$\left.\begin{array}{l} x=\varphi(u), \\ y=\psi(u), \\ z=v\varkappa(u), \end{array}\right\} \begin{array}{l} \alpha\leqslant u\leqslant\beta) \\ (0\leqslant v\leqslant 1) \end{array}, \tag{2}$$

где $\varphi(u)$, $\psi(u)$, $\varkappa(u)$ — непрерывные функции.

Необходимое и достаточное условие квадрируемости поверхности (2) состоит в том, чтобы функции $\varphi(u)$ и $\psi(u)$ были ограниченной вариации.

3) Поверхность

$$\left.\begin{array}{l} x=\varphi(u)\cos v, \\ y=\psi(u)\sin v, \\ z=\psi(u)+f(v), \end{array}\right\} \begin{array}{l} (\alpha\leqslant u\leqslant\beta) \\ (0\leqslant v\leqslant\pi) \end{array}, \tag{3}$$

$\varphi(u)$ и $\psi(u)$ — непрерывные функции, $f(v)$ — функция невозрастающая. Условие необходимое и достаточное для квадрируемости поверхности (3) состоит в т м, чтобы $\varphi(u)$ и $\psi(u)$ были функциями ограниченной вариации.

4) Поверхность переноса

$$\left.\begin{array}{l} x=\varphi(u), \\ y \quad \psi(v), \\ z=f_1(u)+f_2(v) \end{array}\right\} \begin{array}{l} (\alpha\leqslant u\leqslant\beta), \\ (a\leqslant v\leqslant b) \end{array} \tag{4}$$

$\varphi(u)$, $\psi(v)$, $f_1(u)$, $f_2(v)$ — непрерывные функции.

Необходимое и достаточное условие квадрируемости поверхности (4) состоит в том, что $\varphi(u)$, $\psi(v)$, $f_1(u)$, $f_2(v)$ являются функциями ограниченной вариации.

Наукові записки Львівського Державного Університету імені Ів. Франка
Том V Серія фізико-математична, вип. 1 1947

А. С. КОВАНЬКО

ПРО КОМПАКТНІСТЬ СИСТЕМ УЗАГАЛЬНЕНИХ МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ ВЕЙЛЯ

ПЕРЕДМОВА

Проблема компактності майже періодичних функцій Степанова і Безиковича була вирішена нами в сенсі необхідних і достатніх умов (C. R. Ac. Sc. URSS V. XXVI № 3, XXXII № 2).

В цій статті ми ставимо аналогічне питання для майже періодичних функцій Вейля.

§ 1. ПОЗНАЧЕННЯ І ФОРМУЛИ

A) Введемо слідуючу метрику в просторі функцій, визначених на інтервалі $(-\infty < x < +\infty)$ і сумованих в степені $\omega > 1$. Віддаль між $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ визначається так:

$$D_{w_\omega}^{E}(\varphi, \psi) = \lim_{T\to\infty}\left[\sup\left\{\frac{1}{2T}\int_{E(-T,+T)}|\varphi-\psi|^{\omega}dx\right\}^{\frac{1}{\omega}}\right].$$

Якщо $E = (-\infty, +\infty)$, то ми напишемо $D_{w_\omega}^{E} = D_{w_\omega}$.

B) Припустимо $\delta_w E = \lim\limits_{T\to\infty}\left[\sup\limits_{-\alpha<a<+\infty}\frac{|E(a-T, a+T)|}{2T}\right]^*$.

C) Нехай $E_A(\subset E)$ позначає множину точок, де $|\varphi-\psi| \geqslant A$; $\varphi(x)$ і $\Psi(x)$ — вимірні функції на $(-\infty, +\infty)$.

Ми введемо таку віддаль між $\varphi(x)$ і $\Psi(x)$:

$$\mathfrak{r}_w^{E}(\varphi, \psi) = \inf_{0\leqslant A<+\infty}[A + \delta_w E_A].$$

$^*|E(\alpha, \beta)|$ позначає міру E в середині (α, β).

Якщо $E=(-\infty, +\infty)$, то пишемо просто $\mathfrak{d}_w{}^E = \mathfrak{d}_w$.

Легко перевірити, що обидві метрики $D_w{}^E$ і $\mathfrak{d}_w{}^E$ задовольняють правилу трикутника. На виведенні цієї властивості ми не зупинимось.

D) Нехай $[f(x)]_N = f(x)$, якщо $|f| < N$ і $[f]_N = \frac{f}{|f|}\cdot N$, якщо $|f| \geqslant N$. Легко перевірити ще такі співвідношення, які ми приводимо без доведення:

$$D_{w_\omega}^E([\varphi]_N, [\psi]_N) \leqslant D_{w_\omega}^E(\varphi, \psi); \tag{I}$$

$$\mathfrak{d}_w{}^E([\varphi]_N, [\psi]_N) \leqslant \mathfrak{d}_w{}^E(\varphi, \psi); \tag{II}$$

$$\mathfrak{d}_{w_\omega}^E(\varphi, \psi) \leqslant \left\{ \frac{D_{w_\omega}^E(\varphi, \psi)}{a} \right\}^\omega + a; \tag{III}$$

($a > o$ довільно)

$$D_{w_\omega}^E(\varphi, \psi) \leqslant \{\sup|\varphi - \psi|\} \cdot \{\mathfrak{d}_w{}^E(\varphi, \psi)\}^{\frac{1}{\omega}}; \tag{IV}$$

якщо $\sup|\varphi - \psi| \geqslant 1$

$$D_{w_\omega}([\varphi]_N, [\psi]_N) \leqslant 2N\{\delta_w E\}^{\frac{1}{\omega}}; \tag{V}$$

$$D_{w_\omega}^{E_1+E_2}(\varphi, \psi) \leqslant D_{w_\omega}^{E_1}(\varphi, \psi) + D_{w_\omega}^{E_2}(\varphi, \psi); \tag{VI}$$

$$\mathfrak{d}_w{}^{E_1+E_2}(\varphi, \psi) \leqslant \mathfrak{d}_w{}^{E_1}(\varphi, \psi) + \mathfrak{d}_w{}^{E_2}(\varphi, \psi). \tag{VII}$$

§ 2. ОПРЕДІЛЕННЯ І ВСТУПНІ ТЕОРЕМИ

Определення I. Множина $E \subset (-\infty, +\infty)$ зветься відносно щільною, якщо існує число $l > o$ таке, що довільний інтервал довжини l містить точки множини E.

Определення II (1,6). Функція $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ зветься $\begin{matrix} \text{a) } w_\omega \\ \sim \\ \text{b) } w \end{matrix}$ майже періодичною $\left(\begin{matrix} \text{a) } w_\omega \text{ м. п.} \\ \sim \\ \text{b) } w \text{ м. п.} \end{matrix}\right)$, якщо, яким би малим не було $\varepsilon > o$, існує відносно щільна множина чисел $[\tau]$ (майже періоди)

така, що $\left\{ \begin{array}{l} \text{a) } D_{w_\omega}(f(x+\tau), f(x)) < \varepsilon, \\ \text{b) } \mathfrak{d}_w(f(x+\tau), f(x)) < \varepsilon. \end{array} \right.$

Властивість I (1). $\left.\begin{matrix}\text{a)}\\ \text{b)}\end{matrix}\right\}$ яким би не було число $\varepsilon > o$, існує число $\eta > o$ таке, що

$$\left.\begin{array}{l} \text{a) } D_{w_\omega}(f(x+h),\ f(x)) < \varepsilon \\ \text{b) } \mathfrak{d}_w(f(x+h),\ f(x)) < \varepsilon \end{array}\right\} \text{ для } |h| < \eta.$$

Властивість II. $\left.\begin{array}{c}\text{a)}\\ \text{b)}\end{array}\right\}$ яке б не було $\varepsilon > o$,

$$\left.\begin{array}{l} \text{a) існує число } \sigma > o \text{ таке, що } D^E_{w_\omega}(f, o) < \varepsilon \\ \text{b) існує число } N_0 > o \text{ таке, що } \mathfrak{d}_w(f, [f]_N) < \varepsilon \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{для } \delta_w E < \varepsilon, \\ \text{для } N > N_0. \end{array}$$

Властивість III. $\left.\begin{array}{c}\text{а}\\ \text{б}\end{array}\right\}$ кожна скінчена послідовність $f_1(x) \ldots . f_n(x)$ функцій $\begin{pmatrix}\text{а) } w_\omega \text{ м. п.} \\ \sim \\ \text{б) } w \text{ м. п.}\end{pmatrix}$ має спільну множину майже періодів.

Властивість IV. $\left.\begin{array}{c}\text{a)}\\ \text{b)}\end{array}\right\}$ яке б не було $\varepsilon > o$ і функція $f(x)$ $\begin{pmatrix}\text{а) } w_\omega \text{ м. п.} \\ \sim \\ \text{б) } w \text{ м. п.}\end{pmatrix}$, можна знайти таку майже періодичну функцію $\varphi(x)$ H. Bohr'a, що

$$\text{a) } D_{w_\omega}(f(x),\ \varphi(x)) < \varepsilon,$$
$$\text{b) } \mathfrak{d}\ (f(x),\ \varphi(x)) < \varepsilon.$$

Властивість V. Яке б не було $\varepsilon > o$ і система $\mathfrak{M}(f)$ (скінченна або нескінченна) функцій w_1 м. п., що має загальну відносно щільну множину майже періодів $\{\tau\}$, існує функція $K(x)$ (ядро), що приймає тільки значення O або C, що

1) $\lim\limits_{T\to\infty} \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_a^{a+T} K(t)\,dt = 1$ (рівномірно в „a“).

2) Існує послідовність чисел (>0) $T_1 < T_2 < \ldots . \to \infty$, що

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T_n}^{+T_n} f(x+t)\cdot K(t)\,dt \tag{1}$$

існує для всіх значень x.

$$3)\quad |\varphi(x+a) - \varphi(x)| \leqslant C\cdot D_{w_1}(f(x+a),\ f(x)) \tag{2}$$

$$|f(x)| \leqslant C\cdot D_{w_1}(f,\ o), \tag{3}$$

звідки випливає, що $\varphi(x)$ майже періодична в сенсі H. Bohr'a

$$4)\quad D_{w_1}(f(x),\ \varphi(x)) < \varepsilon. \tag{4}$$

Властивість VI. Якщо послідовність функції $\begin{matrix} a \\ \\ b \end{matrix}\left\{\begin{matrix} w_\omega \text{ м. п.} \\ \sim \\ w \text{ м. п.} \end{matrix}\right\}$ збігається в сенсі метрики $\left\{\begin{matrix} a)\ D_{w_\omega} \\ \\ b)\ \mathfrak{d}_w \end{matrix}\right.$, то гранична функція є також функція $\left.\begin{matrix} w_\omega \text{ м. п.} \\ \sim \\ w \text{ м. п.} \end{matrix}\right\}$

Опреділення III (1, 2). $f(x)$ зветься B_ω майже періодичною, якщо існує послідовність функцій $f_1(x), f_2(x) \ldots f_n(x) \ldots$ майже періодичних в сенсі H. Bohr'a, що

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}|f-f_n|^\omega dx\right\}=0.$$

Примітка (2). Можна побудувати таку B_ω м. п. функцію $f(x)$, що не існує жодної функції $\varphi(x)$, w_ω м. п., що

$$\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{2T}\int_{+T}^{+T}|f-\varphi|^\omega dx=0.$$

Теорема I (3) (Hausdorff). Необхідна і достатня умова компактності системи точок $\{x\}$ в повному просторі полягає в тому, що, яке б не було мале $\varepsilon > o$, існує скінченна система $x_1 \cdot x_2 \ldots x_n$ така, що віддаль довільної точки x системи $\{x\}$ від одної з точок x_k є $< \varepsilon$.

Теорема II (4) (Freschet). Необхідна і достатня умова компактності системи точок $\{x\}$ в повному просторі полягає в тому, що, яке б не було мале $\varepsilon > o$, можна побудувати компактну систему $\{y\}$ таку, що кожному x можна побудувати таке $\{y\}$, що віддаль між ними $< \varepsilon$.

Теорема III (4) (Люстерник). Необхідна і достатня умова компактності системи функції $f(x)$ майже періодичних в розумінні H. Bohr'a полягає в слідуючому:

1) всі функції системи обмежені в їх сукупності;

2) яке б мале не було $\varepsilon > o$, існує таке $\delta > 0$, що $|f(x+h) - f(x)| < \varepsilon$ для $|h| < \delta$ для всіх функцій системи;

3) яке б мале не було $\varepsilon > o$, існує відносно щільна множина майже періодів (τ), спільних всім функціям системи, таких, що $|f(x+\tau) - f(x)| < \varepsilon$.

§ 3. ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ ПРОСТОРІВ, ВИЗНАЧЕНИХ МЕТРИКАМИ D_{w_ω} и $\mathfrak{d}_w$

Теорема А. Простори, визначені метриками D_{w_ω} и $\mathfrak{d}_w$, неповні.

Доведення. Нехай $f_n(x)$ — послідовність майже періодичних функцій в сенсі Bohr'a, яка збігається за опреділенням III § 2 до деякої функції $f(x) \dots B_\omega$ м. п., причому ця остання істотно відмінна від якоїсь функції w_ω м. п. (див. примітку до III § 2).

На підставі нерівності Мінковського пишемо:

$$\left\{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}|f_{n+p}-f_n|^\omega dx\right\}^{\frac{1}{\omega}} \leqslant \left\{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}|f_{n+p}-f|^\omega dx\right\}^{\frac{1}{\omega}} + \left\{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}|f_n-f|^\omega dx\right\}^{\frac{1}{\omega}}.$$

Якщо $n \to \infty$ довільне натуральне число, то

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\overline{\lim_{T\to\infty}}\left[\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}|f_{n+p}-f_n|^\omega dx\right]\right\}=0, \tag{1}$$

але в силу відомих властивостей м. п. функцій H. Bohr'a ми маємо, що

$$\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}|f_{n+p}-f_n|^\omega dx = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}|f_{n+p}-f_n|^\omega dx =$$

$$=\lim_{T\to\infty}\left[\sup_{-\infty<a<+\infty}\frac{1}{2T}\int_{a-T}^{a+T}|f_{n+p}-f_n|^\omega dx\right]=\left[D_{w_\omega}(f_{n+p}, f_n)\right]^\omega. \tag{2}$$

Тому пишемо $\lim\limits_{n\to\infty} D_{w_\omega}(f_{n+p}, f_n)=0.$ (3)

Це означає, що послідовність $f_n(x)$ є фундаментальна в сенсі метрики D_{w_ω}. Але вона не має граничної функції в сенсі тої ж метрики.

Припустимо навпаки, що $\varphi(x)$ є граничною функцією цієї послідовності, тобто, що

$$\lim_{n\to\infty} D_{w_\omega}(\varphi, f_n)=0, \tag{4}$$

але тому, що

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}|f_n-\varphi|^\omega dx \leqslant \sup_{(-\infty<a<+\infty)}\frac{1}{2T}\int_{a-T}^{a+T}|\varphi-f_n|^\omega dx,$$

то

$$\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{2T}\int^{+T}|f_n-\varphi|^{\omega}dx=[D_{w_\omega}(f,\varphi)]^{\omega}. \tag{5}$$

Звідки в силу (4) виводимо, що

$$\lim_{n\to\infty}\left[\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}|f_n-\varphi|^{\omega}dx\right]=0. \tag{6}$$

Але

$$\left\{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}|f-\varphi|^{\omega}dx\right\}^{\frac{1}{\omega}}\leqslant\left\{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}|f_n-\varphi|^{\omega}dx\right\}^{\frac{1}{\omega}}+$$

$$+\left\{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}|f-f_n|^{\omega}dx\right\}^{\frac{1}{\omega}}. \tag{7}$$

По опреділенню $f(x)$ маємо:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}|f-f_n|^{\omega}dx\right]=0. \tag{8}$$

Беручи до уваги (6) і (8), ми маємо з нерівності (7), що

$$\overline{\lim_{T\to\infty}}\frac{1}{2T}\int_{+T}^{+T}|f-\varphi|^{\omega}dx=0. \tag{9}$$

Але ця остання нерівність поскільки ми припустили, що $f(x)$ істотно відмінна від якої б то не було функції w_ω м. п. (див. прим. до III § 2), неможлива.

Звідки аналогічно можна практикувати випадок для метрики D_w. Теорема A доведена.

Доведена теорема показує, що для рішення питання про компактність системи w_ω м. п. або $\widetilde{w}$ м. п. в відповідних метриках необхідно неповні простори (з метриками D_{w_ω} і D_w) доповнити — „ідеальними" граничними елементами.

Нехай $x_1\ x_2\ x_3\ldots$ фундаментальна послідовність, що не має граничної точки. Введемо „ідеальну" граничну точку .. $x^{()}$.

Для якоїсь іншої послідовності $y_1\ y_2\ldots$ ми маємо іншу ідеальну граничну точку $y^{()}$. Віддаль $|x^{()}-y^{()}|$ між цими точками ми визначаємо як границю віддалі між x_m і y_n, коли $m\to\infty$ і $n\to\infty$.

Таким чином наш простір стає повним і знову метричним. Ми утотожнюємо таким способом поняття „фундаментальна“ з поняттям „збіжної послідовності“.

§ 4. ПРО КОМПАКТНІСТЬ СИСТЕМ W_1 М. П. ФУНКЦІЙ

Лема. Система $\mathfrak{M}(f)$ функцій w_1 м. п. є компактна в сенсі метрики D_{w_1}, якщо виконуються такі умови (достатні):

1) Існує таке постійне число $M > o$, що $D_{w_1}(f, o) \leqslant M$ для всіх функцій системи $\mathfrak{M}(f)$.

2). Яке б мале не було $\varepsilon > o$, існує число $\eta > o$ таке, що $D_{w_1}(f(x+h), f(x)) < \varepsilon$ при $|h| < \eta$ для всіх функцій системи.

3). Яке б мале не було $\varepsilon > o$, існує відносно щільна множина майже періодів „τ“. спільних всім функціям системи таких що $D_{w_1}(f(x+\tau), f(x)) < \varepsilon$ для всіх функцій системи.

Доведення. Нехай $\varepsilon > o$ довільне. В силу властивості V (§ .) можемо побудувати для кожної функції $f(x)$ нашої системи майже періодичну функцію $\varphi(x)$ H. Bohr'a, як це зазначено в цій властивості.

Розглянемо множину $\mathfrak{M}'(\varphi(x))$ всіх цих функцій $\varphi(x)$. В силу § 2 і умови 1) цієї леми ми маємо:

$$|\varphi(x)| \leqslant C \cdot M. \tag{1}$$

В силу (2) § 3 і умови (2) цієї леми маємо:

$$|\varphi(x+h) - \varphi(x)| < C \cdot \varepsilon \tag{2}$$

при $|h| < \eta$.

Нарешті, в силу того ж (1) § 2 і умови нашої леми маємо:

$$|\varphi(x+\tau) - \varphi(x)| < C\varepsilon \tag{3}$$

[τ майже період для $f(x)$].

Але умови (1), (2) і (3) в силу теореми III являються умовами компактності системи $\mathfrak{M}'(\varphi(x))$ в сенсі рівномірної збіжності, значить тим більш в сенсі метрики D_{w_1}. В силу (4) (§ 2) і теореми II (§ 2) ми повинні вивести, що система $\mathfrak{M}(f)$ також компактна в сенсі метрики D_{w_1}, що й треба було довести.

§ 5. КОМПАКТНІСТЬ СИСТЕМИ w_ω М. П. ФУНКЦІЙ

Теорема B. Необхідна і достатня умова компактності системи $\mathfrak{M}(f)$ функцій w_ω м. п. в сенсі метрики D_{w_ω} полягає у виконанні наступних умов: яке б мале не було $\varepsilon > o$,

1) існує таке $\sigma > o$, що $D^E_{w_\omega}(f, o) < \varepsilon$ при $\delta_w{}^E < \sigma$;

2) існує таке $\eta > o$, що $D_{w_\omega}(f(x+h),\ f(x)) < \varepsilon$ при $|h| < \eta$;

3) існує відносно щільна множина майже періодів $\{\tau\}$, спільних всім функціям системи, що $D_{w_\omega}(f(x+\tau),\ f(x)) < \varepsilon$.

Доведення: 1. Умови (1), (2), (3) теореми необхідні.

Нехай $\mathfrak{M}(f)$ компактне, тоді в силу теореми I, яке б мале не було $\varepsilon > o$, існує скінчена система функцій $f_1(x) \ldots f_n(x)$ така, що для кожної функції системи $\mathfrak{M}(f)$ можна підібрати функцію $f_k(x)$, що

$$D_{w_\omega}(f(x),\ f_k(x)) < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1}$$

Але в силу властивості II a) § 2 кожній функції $f_k(x)$ можна підібрати таке число $\sigma_k > o$, що

$$D_{w_\omega}(f_k,\ o) < \frac{\varepsilon}{3} \tag{2}$$

при $\delta_w E < \sigma_k$.

Нехай $\sigma = \min(\sigma_1 \ldots . \sigma_n)$.

Тоді, покладаючи $\delta_w E < \sigma$, ми маємо в силу (1) і (2), що

$$D^E_{w_\omega}(f, o) \leqslant D^E_{w_\omega}(f, f_k) + D^E_{w_\omega}(f_k, o) \leqslant$$
$$\leqslant D_{w_\omega}(f, f_k) + D_{w_\omega}(f_k, o) < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{3}.$$

Отже, для кожної функції $f(x)$ нашої системи $\mathfrak{M}(f)$ ми маємо нерівність:

$$D^E_{w_\omega}(f, o) < \varepsilon \tag{3}$$

при $\delta_w E < \sigma$ тобто ми маємо умову (1) нашої теореми. В силу властивості 1a) § 2 можна для кожної функції $f_k(x)$ підібрати таке число $\eta_k > o$, що

$$D_{w_\omega}(f_k(x+h),\ f_k(x)) < \frac{\varepsilon}{3} \tag{4}$$

якщо $|h| < \eta_k$.

Нехай $\eta = \min[\eta_1 \ldots \eta_n]$. Напишемо (1) в такому вигляді:

$$D_{w_\omega}(f(x+h),\quad f_k(x+h)) < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{5}$$

Тоді ми маємо в силу (1), (4) і (5), що

$$D_{w_\omega}(f(x+h), f(x)) \leqslant D_{w_\omega}(f(x+h),\ f_k(x+h)) +$$
$$+ D_{w_\omega}(f_k(x+h),\ f_k(x)) + D_{w_\omega}(f_k(x),\ f(x)) < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

якщо тільки $|h| < \eta$, таким чином ми маємо для кожної функції $f(x) \subset \mathfrak{M}(f)$, що

$$D_{w_\omega}(f(x+h),\ f(x)) < \varepsilon, \tag{6}$$

якщо $|h| < \eta$.

Але це якраз умова 2) нашої теореми. Маємо, нарешті, в силу властивості III a) § 2, що функції $f_1(x) \ldots . f_n(x)$ мають спільну систему майже періодів $\{\tau\}$ таких, що

$$D_{w_\omega}(f_k(x+\tau),\ f_k(x) < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{7}$$

Запишемо (1) у вигляді:

$$D_{w_\omega}(f_k(x+\tau),\ f(x+\tau)) < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{8}$$

Тоді в силу (1), (7) і (8) ми маємо нерівність:

$$D_{w_\omega}(f(x+\tau),\ f(x)) \leqslant D_{w_\omega}(f(x+\tau),\ f_k(x+\tau)) +$$

$$+ D_{w_\omega}(f_k(x+\tau),\ f_k(x)) + D_{w_\omega}(f(x),\ f_k(x)) < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Отже, існує така відносно щільна множина майже періодів $\{\tau\}$, що

$$D_{w_\omega}(f(x+\tau),\ f(x)) < \varepsilon \tag{9}$$

для всіх функцій системи $\mathfrak{M}(f)$. Але це є умова 3) нашої теореми. Таким чином необхідність умов 1), 2) і 3) доведена.

II. Умови 1), 2), 3) достатні.

Обмежимо всі функції системи $\mathfrak{M}(f)$ числом $N > 1$, тобто розглянемо систему $\mathfrak{M}([f]_N)$. Легко бачити, що всі функції цієї нової системи будуть w_ω м. п., а саме система буде компактна в сенсі метрики D_{w_1}. Це випливає з співвідношень I, II, III, IV, V, VI (§ 1). Для довільних чисел a і b ми маємо:

$$D_{w_1}([f(x+b)]_N,\ [f(x)]_N) \leqslant 2N \cdot D_N([f(x+b)]_N,\ [f(x)]_N) \leqslant$$

$$\leqslant 2N \left[a + \left\{ \frac{D_{w_\omega}([f(x+b)]_N, [f(x)]_N)}{a} \right\}^\omega \right].$$

Отже,

$$D_{w_1}([f(x+b)]_N,\ [f(x)]_N) \leqslant 2N \left\{ a + \left[\frac{D_{w_\omega}(f(x+b), f(x))}{a} \right]^\omega \right\}, \tag{10}$$

звідки відразу видно, що якщо $f(x)$ є функцією w_ω м. п., то $[f(x)]_N$ є функцією w_1 м. п.

Припустимо, що $a=\left(\frac{\varepsilon}{4N}\right)^{\frac{1}{\omega}}$ і $b=h$ і нехай $\varepsilon<1$, тоді згідно з умовою 2) цієї теореми ми можемо вибрати $\eta>o$ таке, що $D_{w_\omega}(f(x+h),\ f(x))<\left(\frac{\varepsilon^2}{16N^2}\right)^{\frac{1}{\omega}}$ при $|h|<\eta$. Ми маємо тоді в силу (10) $\left(\text{бо}\ \frac{\varepsilon}{4N}<1\right)$, що

$$D_{w_1}([f(x+h)]_N,\ [f(x)]_N)<\varepsilon. \tag{11}$$

Але це умова 2) леми (§ 4) для системи $\mathfrak{M}([f])_N)$.

За умовою 3) цієї теореми маємо відносно густу множину майже-періодів $\{\tau\}$ таких, що $D_{w_\omega}(f(x+\tau), f(x))<\left(\frac{\varepsilon^2}{16N^2}\right)^{\frac{1}{\omega}}$, припускаючи в рівності (10) $a=\frac{\varepsilon}{4N}$ і $b=\tau$, дістаемо на основі останньої нерівності, що

$$D_{w_1}([f(x+\tau)]_N,\ [f(x)]_N)<\varepsilon. \tag{12}$$

Але це умова 3) леми (§ 4).

Умова 1) леми (§ 4) також виконана, бо $|[f]_N|\leqslant N$, звідки

$$D_{w_1}([f]_N,\ o)\leqslant N. \tag{13}$$

На підставі вказаної леми ми виводимо, що $\mathfrak{M}([f]_N)$ компактне в сенсі метрики D_{w_1}; тому в силу теореми 1 (§ 2) маємо для кожного $\varepsilon>o$ скінчену систему функцій $[f_1]_N \ldots [f_n]_N$ нашої системи $\mathfrak{M}([f]_N)$ таких, що для кожної функції $[f]_N$ знайдеться своя функція $[f_k]_N$ така, що

$$D_{w_1}([f]_N,\ [f_k]_N)<\frac{\varepsilon^{2\omega}}{(16N^2)^\omega}. \tag{14}$$

Маємо в силу співвідношень III і IV (§ 1)

$$D_{w_\omega}([f]_N,\ [f_k]_N)\leqslant 2N\{D_w([f]_N,\ [f_k]_N)\}^{\frac{1}{\omega}}\leqslant$$

$$\leqslant 2N\left\{a+\frac{D_{w_1}\{[f]_N,\ [f_k]_N\}}{a}\right\}^{\frac{1}{w}} \qquad (a>o \text{ довільне}).$$

Виберемо $a=\frac{\varepsilon^\omega}{4N^\omega}$, тоді ми дістанемо

$$D_{w_\omega}([f]_N,[f_k]_N)\leqslant 2N\left\{\frac{\varepsilon^\omega}{(4N)^w}+\frac{\varepsilon^\omega}{(4N)^w}\right\}^{\frac{1}{\omega}}\leqslant$$

$$\leqslant 2\varepsilon\left(\frac{1}{4^w}+\frac{1}{4^w}\right)^{\frac{1}{\omega}}=2^{-1+\frac{1}{\omega}}\cdot\varepsilon<\varepsilon.$$

Таким чином
$$D_{w_\omega}([f]_N, [f_k]_N) < \varepsilon. \tag{15}$$

Але тоді в силу теореми 1 (§ 2) ми повинні вивести, що система $\mathfrak{M}([f]_N)$ компактна в сенсі метрики D_{w_ω}.

Розіб'ємо $(-\infty, +\infty)$ на n множин $E_1\, E_2 \ldots . E_n$ так, щоб $\delta_\omega E_k < \sigma$, де σ взяте з умови 1) цієї теореми.* Тоді в силу цієї умови $D_{w_\omega}^{Ek}(f, o) < \varepsilon$. Але тоді в силу співвідношення VI (§ 1) ми маємо $D_{w_\omega}(f, o) \leqslant \sum_1^n D_{w_\omega}^{Ek}(f, o) < \varepsilon \cdot n = M$ (постійне).

Отже,
$$D_{w_\omega}(f, o) \leqslant M \tag{16}$$
для довільної функції системи $\mathfrak{M}(f)$, де M зафіксоване число.

Нехай E_N є множина точок, де $|f| \geqslant N$, тоді в силу співвідношень VI (§ 1) ми маємо:
$$D_{w_\omega}(f, o) \geqslant D_{w_\omega}^{E_N}(f, o) \geqslant N\,\{\delta_\omega E_N\}^{\frac{1}{\omega}}.$$

Значить, в силу (16) ми виводимо, що
$$\delta_w E_N \leqslant \left(\frac{M}{N}\right)^\omega. \tag{17}$$

Тому, що N може бути вибране довільно великим, ми умовимось вважати $N > \frac{M}{\sigma^{\frac{1}{\omega}}}$, тоді в силу (17) ми маємо, що
$$\delta_\omega E_N < \sigma. \tag{18}$$

Але тоді в силу умови 1) нашої теореми
$$D_{w_\omega}^{E_N}(f, o) < \varepsilon. \tag{19}$$

Поза множиною E_N ми маємо $f = [f]_N$, тому

$$D_{w_\omega}([f]_N, f) = D_{w_\omega}^{E_N}(f, [f]_N) \leqslant D_{w_\omega}^{E_N}(f, o) + D_{w_\omega}^{E_N}([f]_N, o) < 2\varepsilon.$$

Значить:
$$D_{w_\omega}([f]_N, f) < 2\varepsilon. \tag{20}$$

Але тому, що система $\mathfrak{M}([f]_N)$ компактна в сенсі метрики D_{w_ω}, то в силу (20) і теореми II (§ 2) ми повинні вивести, що і система $\mathfrak{M}(f)$ також компактна.

Таким чином наша теорема цілком доведена.

---

* Наприклад, $E_k = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \ldots$ де $\alpha_n = \left(n + \frac{k-1}{n} < x < n + \frac{k}{n}\right)$.

§ 6. ПРО КОМПАКТНІСТЬ СИСТЕМИ ФУНКЦІЙ $\widetilde{W}$ М. П.

Теорема С. Необхідна і достатня умова компактності системи $\mathfrak{M}(f)$ функцій $\widetilde{w}$ м. п. в сенсі метрики $\mathfrak{d}_w$ полягає у виконанні умов таких: яке б мале не було $\varepsilon > o$,

1) існує число $N_0 > o$ таке, що $\mathfrak{d}_w(f, [f]_N) < \varepsilon$ при $N > N_0$ для всіх функцій системи;

2) існує число $\eta > o$ таке, що $\mathfrak{d}_w(f(x+h), f(x)) < \varepsilon$ при $|h| < \eta$ для всіх функцій системи;

3) існує відносно щільна множина майже періодів $\{\tau\}$ спільних всім функціям системи $\mathfrak{M}(f)$, тобто $\mathfrak{d}_w(f(x+\tau), f(x)) < \varepsilon$.

Доведення:

1. Умови теореми необхідні. Доведення необхідності умов 2) і 3) є повним повторенням доведення відповідних умов 2) і 3) теореми (13) лише з заміною символа D_{w_ω} на $\mathfrak{d}_w$, тому ми на них не зупиняємось. Розглянемо необхідність умови 1).

Зберігаємо позначення теореми В. Замість нерівності (1) § 5 ми маємо тепер умову

$$\mathfrak{d}_w(f, f_k) < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1}$$

В силу властивості II b) (§ 2) можна підібрати для кожної функції $f_k(x)$ таке $N_k > o$, що

$$\mathfrak{d}_w([f_k]_N, f_k) < \frac{\varepsilon}{3} \tag{2}$$

при $N > N_k$. Нехай $N_0 = \max(N_1 \ldots . N_n)$. Візьмемо $N > N_0$, тоді в силу (1) і в силу співвідношення II (§ 1)

$$\mathfrak{d}_w([f]_N, [f_k]_N) < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3}$$

На підставі (1), (2), (3) ми заключаємо, що

$$\mathfrak{d}_N(f, [f]_N) \leqslant \mathfrak{d}_w(f, f_k) + \mathfrak{d}_w(f_k, [f_k]_N) + \mathfrak{d}_w([f_k]_N, [f]) < 3\,\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Остання нерівність і є якраз умова 1) теореми.

II. Умови теореми достатні. Обмежимо функції системи $\mathfrak{M}(f)$ числом $N > 1$ і розглянемо систему обмежених (зрізаних) функцій $\mathfrak{M}([f]_N)$.

Покажемо, що ця система компактна в сенсі метрики D_{w_1}. Для цього досить показати, що вона задовольняє умові леми § 4.

Умова 1) леми очевидно виконана, тому що $D_{w_1}([f]_N, o) \leqslant N$.

Розглянемо 2) і 3) тої ж леми. Вони очевидно виконані в силу слідуючих співвідношень. З II і III і IV (§ 1) ми маємо для довільного b, що

$$D_{w_1}([f(x+b)]_N, [f(x)]_N) \leqslant 2N\,\mathfrak{r}_w([f(x+b)]_N, [f(x)]_N) \leqslant$$

$$\leqslant 2N \cdot \mathfrak{r}_w((x+b), f(x)).$$

Значить

$$D_{w_1}([f(x+b)]_N, [f(x)]_N) \leqslant 2N \cdot \mathfrak{r}_w(f(x+b), f(x)). \tag{4}$$

Покладаючи в цій рівності послідовно $b=h$ і $b=\tau$, де сенс величин h і τ такий же, як в умовах 2) і 3) теореми C, і беручи до уваг ці умови, ми прийдемо відповідно до умов 2) і 3) леми. Значить система $\mathfrak{M}([f]_N)$ компактна в сенсі метрики D_{w_1}, а тому в силу теореми I (§ 2) для довільного $\varepsilon > o$ існує скінченна система функцій $[f_1]_N \ldots [f_n]_N$ в системі $\mathfrak{M}([f]_N)$, що для довільної функції f системи $\mathfrak{M}(f)$ знайдеться своя функція $[f_k]_N$ така, що

$$D_{w_1}([f]_N, [f_k]_N) < \frac{\varepsilon^2}{4}. \tag{5}$$

Але в силу III (§ 2) ми маємо:

$$\mathfrak{r}_w([f]_N, [f_k]_N) \leqslant \frac{D_{w_1}([f]_N, [f_k]_N)}{a} + a \tag{6}$$

при довільному $a > o$.

Припустимо $a = \frac{\varepsilon}{2}$; беручи до уваги (5), дістанемо:

$$\mathfrak{r}_w([f]_N, [f_k]_N) < \varepsilon. \tag{7}$$

Значить в силу теореми I (§ 2) система $\mathfrak{M}([f]_N)$ також компактна в сенсі метрики $\mathfrak{r}_w$ (при довільних $N > 1$).

Але тоді в силу умови 1) нашої теореми і в силу теореми II (§ 2) ми повинні зробити висновок, що система $\mathfrak{M}(f)$ також компактна в сенсі метрики $\mathfrak{r}_w$, що й треба було довести.

§ 7. ФУНКЦІЇ $\widetilde{W}$ І W_w — НОРМАЛЬНІ

Опреділення.

Ми кажемо, що функція $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$

$\left.\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right\} \begin{matrix} w_\omega \\ \sim \\ w \end{matrix}$ — нормальна, якщо система всіх зміщень $\{f(x+k)\}$ (k — довільне) компактна в сенсі метрики $\left.\begin{matrix} \text{а} \\ \text{в} \end{matrix}\right\} \begin{matrix} D_{w_\omega} \\ \mathfrak{d}_w \end{matrix}$.

Теорема D. Якщо $f(x)$ є функція $\left.\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right| \begin{matrix} w_\omega \text{ м. п.} \\ \sim \\ w \text{ м. п.} \end{matrix}$, то вона $\left.\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right\} \begin{matrix} w_\omega \\ \sim \\ w \end{matrix}$ — нормальна і навпаки.

Доведення: Нехай $f(x)$ є функція $\left.\begin{matrix} \mathrm{A} \\ \mathrm{B} \end{matrix}\right\} \begin{matrix} w_\omega \text{ м. п.} \\ \sim \\ w \text{ м. п.} \end{matrix}$, тоді система $\{f(x+k)\}$ задовольняє всім трьом умовам теореми $\left.\begin{matrix} \mathrm{A} \\ \mathrm{B} \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \mathrm{B} \\ \mathrm{C} \end{matrix}$. Значить, система $\{f(x+k)\}$ буде компактна в сенсі метрики $\left.\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right\} \begin{matrix} D_{w_\omega} \\ \mathfrak{d}_w \end{matrix}$.

Нехай, навпаки, система $\{f(x+k)\}$ компактна в сенсі метрики $\left.\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right\} \begin{matrix} D_{w_\omega} \\ \mathfrak{d}_w \end{matrix}$.

Тоді згідно з теоремою 1 (§ 2), яке б мале не було $\varepsilon > o$, існує скінчена система чисел: $k_1 < k_2 < \ldots . < k_n$, таких, що для кожного k можливо знайти таке k, що

$$\left.\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right\} \begin{matrix} D_{w_\omega}(f(x+k),\ f(x+k_i)) < \varepsilon \\ \mathfrak{d}_w(f(x+k),\ f(x+k_i)) < \varepsilon \end{matrix}, \tag{1}$$

або інакше:

$$\left.\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right\} \begin{matrix} D_{w_\omega}(f(x+k_i-k),\ f(x)) < \varepsilon \\ \mathfrak{d}_w(f(x+k_i-k),\ f(x)) < \varepsilon \end{matrix}. \tag{2}$$

Але $k_1 < k_2 < \ldots . k_n$, значить $k_1 - k < k_i - k < k_n - k$. (3)

З (2) і (3) ми можемо заключити, що $k_i - k$ є майже період і множина майже періодів відносно щільна.

Значить $f(x)$ є функція $\left.\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right| \begin{matrix} w_\omega \text{ м. п.} \\ \sim \\ w \text{ м. п.} \end{matrix}$, що й треба довести.

ЛІТЕРАТУРА

1. Besicovitch A. and Bohr H. Almost — periodicity and general trigonometric series. Acta Math. Vol. 57.

2. Besicovitch A. Sur quelques points de la théorie des fonctions presque periodiques. CR, t. 181, p. 391.

3. Hausdorff. Mengenlehre, 1927.

4. Люстерник. Основы функционального анализа. Успехи матем. наук, т. I, стр 98.

5. Bohr H. Fastperiodischen Functionen. Acta Math., t. 45, 1925.

6. Kovanko A. Sur l'approximation des fonctions presque — periodiques généralisées. Rec. Math. Moscou, t. 36, 1928.

А. С. КОВАНЬКО. О КОМПАКТНОСТИ СИСТЕМЫ ОБОБЩЕННЫХ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ В СМЫСЛЕ ВЕЙЛЯ ФУНКЦИЙ.

Резюме

Результаты настоящей статьи были под тем же названием опубликованы в „Докладах Академии наук СССР“, т. XLIII, № 7, 1944 г.

Наукові записки Львівського Державного Університету імені Ів. Франка
Том V Серія фізико-математична, вип. 1 1947

ЛЯНЦЕ В. Е.
студент III курсу

ДО ТЕОРІЇ МАЙЖЕ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ ДВОХ ДІЙСНИХ ЗМІННИХ

Проф. О. С. Кованько поставив ряд питань, які стосуються вивчення функцій двох змінних, майже періодичних по кожному змінному зокрема. На його думку, при відомих незначних обмеженнях, накладених на структуру множини майже періодів, такі функції можна наближати рівномірно на всій площині xOy „тригонометричними поліномами" виду:

$$\sum_k a_k e^{i(\alpha_k xy + \beta_k y + \gamma_k x)}.$$

Ми розглянемо один із простіших випадків.

Відомо, що множина E, розташована на прямій, зветься відносно щільною, якщо існує таке число $l > o$, що в кожному інтервалі довжини l знайдеться точка $x \subset E$. Тоді число l зветься масштабом відносної щільності множини E.

Розглянемо підмножину $\{D\}_{\beta\gamma}$ класу двояко майже періодичних функцій, таку, що для кожної функції $f \subset \{D\}_{\beta\gamma}$ і кожного числа $\varepsilon > o$ існує така відносно щільна множина чисел $\{\tau_\varepsilon\}$ (з масштабом відносної щільності l_ε), що для деяких дійсних постійних β і γ:

$$\left| f(x + \frac{\tau_\varepsilon}{y+\gamma}, y) - f(x, y) \right| < \varepsilon,$$

$$\left| f(x, y + \frac{\tau_\varepsilon}{x+\beta}) - f(x, y) \right| < \varepsilon, \tag{1}$$

при довільних значеннях x та y.

Як звичайно, будемо вважати, що $f \subset \{D\}_{\beta\gamma}$ комплексна функція дійсних змінних неперервна і визначена на всій площині xOy. Числа τ_ε, що стосуються до неї, будемо звати майже періодичними константами для даного ε.

Розглянемо ще клас $\{T\}_{\beta\gamma}$ „тригонометричних поліномів" виду:

$$T(x, y) = \sum_k a_k\, e^{\,i\lambda_k(xy + \beta y + \gamma x)},$$

де a_k — довільні комплексні, а λ_k — довільні дійсні числа.

Ми доведемо, що:

Теорема. Клас двояко майже періодичних функцій $\{D\}_{\beta\gamma}$ являється замиканням (в сенсі рівномірної збіжності на всій площині xOy) класу „тригонометричних поліномів" $\{T\}_{\beta\gamma}$:

$$\{D\}_{\beta\gamma} \equiv \overline{\{T\}}_{\beta\gamma}.$$

Для доведення досить обмежитися випадком, коли $\beta = \gamma = o$, так як випадок $\beta^2 + \gamma^2 > O$ зводиться до попереднього заміною змінних

$$x = x + \beta,\ y = y + \gamma.$$

Ми використаємо таке допоміжне положення:

Лема. Для кожної двояко майже періодичної функції $f \subset \{D\}_{0,0}$ існує така майже періодична функція Bohr'a $\varphi(t)$, що при довільних значеннях змінних x і y виконується співвідношення

$$f(x, y) = \varphi(xy).$$

Доведення леми. Нехай $f \subset \{D\}_{0,0}$. Задамо довільну пару точок (x_0, y_0), (ξ_0, η_0) таких, що:

$$x_0\, y_0 = \xi_0\, \eta_0 \tag{2}$$

і число $\varepsilon > o$. Позначимо

$$A = \frac{x_0\, y_0}{l_\varepsilon}, \tag{3}$$

де l_ε — масштаб відносної щільності множини майже періодичних констант $\{\tau_\varepsilon\}$ функції f.

Задамо далі послідовності цілих чисел $\{\mu_n\}$, $\{\nu_n\}$ таких, що:

$$|\mu_n|,\ |\nu_n| \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$$

$$y_0\left(1 + \frac{\nu_n}{\mu_n}\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} \eta_0 \tag{4}$$

Числу μ_n, (ν_n) поставимо у відповідність число α_n, (β_n) таке, що

$$o \leqslant \alpha_n \leqslant 1, \qquad (o \leqslant \beta_n \leqslant 1)$$

і

$$(\mu_n + \alpha_n)\, l_\varepsilon \subset \{\tau_\varepsilon\}, \qquad ((\nu_n + \beta_n)\, l_\varepsilon \subset \{\tau_\varepsilon\}).$$

Зауважимо, що в цьому випадку $(\mu_n + \nu_n + \alpha_n + \beta_n)\, l_\varepsilon$ є майже періодична константа функції f для 2ε.

Покладемо:

$$x_1 = x_0 + \frac{(\mu_n + \alpha_n)\, l_\varepsilon}{y_0}, \; y_1 = y_0$$

$$x_2 = x_1, \; y_2 = y_1 + \frac{(\nu_n + \beta_n)\, l_\varepsilon}{x_1} \tag{5}$$

$$x_n = x_2 - \frac{(\mu_n + \nu_n + \alpha_n + \beta_n)\, l_\varepsilon}{y_2}, \; y_n = y_2 .$$

В силу властивості (1), $(\beta = \gamma = o)$ маємо:

$$|f(x_n, y_n) - f(x_2, y_2)| < 2\varepsilon$$
$$|f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)| < \varepsilon$$
$$|f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$$

і значить:

$$|f(x_n, y_n) - f(x_0, y_0)| < 4\varepsilon. \tag{6}$$

Приймаючи до уваги (3), (5) і (2), знайдемо:

$$y_n = y_0 \, \frac{A + \mu_n + \nu_n + \alpha_n + \beta_n}{A + \mu_n + \alpha_n}$$

$$x^n y^n = \xi_0 \eta_0 .$$

В силу (4) та обмеженості чисел α_n, β_n

$$y_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \eta_0 ,$$

тому також

$$x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \xi_0,$$

а так як по означенню $f \subset \{D\}_{0,0}$ неперервна функція, то

$$f(x_n, y_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} f(\xi_0, \eta_0).$$

Порівнюючи останнє співвідношення з нерівністю (6), бачимо, що:

$$|f(x_0, y_0) - f(\xi_0, \eta_0)| < 4\varepsilon,$$

а внаслідок довільності числа ε

$$f(x_0, y_0) = f(\xi_0, \eta_0).$$

Проте (x_0, y_0), (ξ_0, η_0) довільна пара точок, для якої виконується рівність (2). Тому з останньої рівності випливає, що для довільних x та y,

$$\left.\begin{array}{ll} \text{якщо} & xy = const, \\ \text{то також} & f(x, y) = const. \end{array}\right\} \tag{7}$$

Нехай тепер:

$$\varphi(t) = f(t, 1). \tag{8}$$

Приймаючи до уваги (7) та (8), дістанемо

$$f(x, y) = f(xy, 1) = \varphi(xy).$$

Очевидно, функція $\varphi(t)$, визначена рівністю (8), є майже періодична функція Bohr'a, і таким чином лема доведена.

В и с н о в о к 1. Двоїчко періодичною (в вузькому розумінні) будемо звати кожну неперервну функцію $f(x, y)$, для якої існує „майже періодична константа" ω, така, що:

$$f(x, y) = f\left(x + \frac{\omega}{y+\gamma}, y\right) = f\left(x, y + \frac{\omega}{x+\beta}\right) \qquad \left(\text{клас} \left\{P\right\}^{\omega}_{\beta\gamma}\right)$$

при довільних значеннях змінних x, y.

З приведеного доведення леми виводимо, що для кожної функції $f \subset \left\{P\right\}^{\omega}_{\beta\gamma}$ існує така періодична функція $\varphi(t)$ з періодом ω, що

$$f(x, y) = \varphi(xy + \beta y + \gamma x).$$

Д о в е д е н н я т е о р е м и. Нехай

$$f(x, y),\ g(x, y) \subset \{D\}_{0, 0}$$

і $\varphi(t)$, $\psi(t)$ майже періодичні функції Bohr'a, що відповідають їм згідно леми.

Для кожного майже періода τ_ε, спільного функціям $\varphi(t)$ і $\psi(t)$, маємо:

$$\left|\left[f\left(x + \frac{\tau_\varepsilon}{y}, y\right) + g\left(x + \frac{\tau_\varepsilon}{y}, y\right]\right. - \left[f(x, y) + g(x, y)\right]\right| \leqslant$$

$$\leqslant |\varphi(xy + \tau_\varepsilon) - \varphi(xy)| + |\psi(xy + \tau_\varepsilon) - \psi(xy)| < 2\varepsilon.$$

Аналогічно дістанемо

$$\left|\left[f\left(x, y+\frac{\tau_\varepsilon}{x}\right)+g\left(x, y+\frac{\tau_\varepsilon}{x}\right)\right]-\left[f(x, y)+g(x, y)\right]\right|<2\varepsilon.$$

Значить,

$$[f+g]\subset\{D\}_{0,0}.$$

Очевидно для довільних a і $\lambda: ae^{i\lambda xy}\subset\{D\}_{0,0}$.
Тому:

$$\{T\}_{0,0}\subset\{D\}_{0,0}. \tag{9}$$

Нехай тепер послідовність функцій $\{f_n(x, y)\}$, $f_n\subset\{D\}_{0,0}$ збігається рівномірно на всій площині xOy до функції $f_0(x, y)$ і $\varphi_n(t)$ — відповідна f_n, згідно леми, майже періодична функція Bohr'a. При довільних x, y маємо:

$$|\varphi_p(xy)-\varphi_q(xy)|=|f_p(x, y)-f_q(x, y)|\underset{p, q\to\infty}{\rightrightarrows} 0.$$

Звідси виводимо, що

$$\varphi_0(t)=\lim_{n\to\infty}\varphi_n(t)$$

існує рівномірно в $t(-\infty<t<\infty)$ і значить $\varphi_0(t)$ є майже періодична функція Bohr'a. Переходячи до границі при $n\to\infty$ в рівності

$$f_n(x, y)=\varphi_n(xy),$$

дістанемо

$$f_0(x, y)=\varphi_0(xy).$$

Отже, $\{D\}_{0,0}$ замкнена множина:

$$\overline{\{D\}}_{0,0}\subset\{D\}_{0,0}. \tag{10}$$

Нехай, нарешті, $f\subset\{D\}_{0,0}$, $\varphi(t)$ — відповідна до f функція Bohr'a і $\{T_n(t)\}$ послідовність поліномів виду $\sum_\lambda a_\lambda e^{i\lambda t}$, що збігається рівномірно $(-\infty<t<\infty)$ до $\varphi(t)$ при $n\to\infty$. Тоді послідовність $\{T_n(xy)\}$ дає рівномірну на всій площині xOy апроксимацію функції $f(x, y)$. Тому маємо:

$$\{D\}_{0,0}\subset\{T\}_{0,0}. \tag{11}$$

Із сукупності співвідношень (9), (10), (11) безпосередньо випливає зазначена теорема.

Висновок 2. Клас двояко періодичних функцій $\{P\}^{3}_{\beta\gamma}$, тотожний з замиканням класу поліномів виду:

$$\sum_k a_k \, e^{\frac{2\pi i}{\omega} k (xy + \beta y + \gamma x)} \qquad (k \text{ — ціле число})$$

де замикання розуміється в сенсі рівномірної збіжності на всій площині xOy.

В. ЛЯНЦЕ. К ТЕОРИИ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ДВУХ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ.

Резюме

Автор изучает класс функций $f(x, y)$ таких, что, каково бы ни было $\varepsilon > o$, существует относительно плотное множество таких чисел τ_ε, что

$$|f(x + \frac{\tau_\varepsilon}{y+\gamma}, y) - f(x, y)| < \varepsilon,$$

$$|f\left(x, y + \frac{\tau_\varepsilon}{x+\beta}\right) - f(x, y)| < \varepsilon.$$

Доказывается, что этот класс функций является замыканием множества тригонометрических полиномов

$$T(x, y) = \sum_k a_k \, e^{i \lambda_k (xy + \beta y + \gamma x)}$$

(λ_k — действительны) в смысле равномерной сходимости.

Наукові записки Львівського Державного Університету імені Ів. Франка
Том V Серія фізико-математична, вип. 1 1947

М. ЗАРИЦЬКИЙ

ЗАУВАЖЕННЯ ДО ПРОБЛЕМИ НАБЛИЖЕНИХ ОБЧИСЛЕНЬ В ГРЕЦЬКІЙ МАТЕМАТИЦІ

1. Коли ми читаємо математичні книги давніх греків, нас вражає одне цікаве явище. З одного боку, відкриття в школі Піфагора існування несумірних величин та введена Евдоксом вимога логічної точності, що довели до таких вершин точності в з'ясуванні дефініції, умов теорем та доведень, які ще сьогодні спостерігаємо в творах Архімеда й Аполонія. З другого боку, знаходимо (перед Героном і Діофантом) хіба винятково, якісь числові результати, даремно шукаємо способів їх обчислення. Грецьким астрономам доводилось користуватися вавілонськими числовими таблицями* разом з їхньою шістдесятковою системою. Однак, вавілонські таблиці не могли бути єдиним джерелом грецьких числових результатів. Відомої Архімедової апроксимації $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$** не знав ніякий давніший математик. Коли ж грецькі математики не переказали нам у своїх творах, як вони обчислювали, наприклад, другі корені з натуральних чисел, то цікаво було б відшукати всі такі фрагменти в їх книгах, в яких можна б вивести практичний спосіб обчислення коренів. Зацікавлення такими питаннями стане для майбутніх істориків цінним матеріалом, який дасть їм змогу вказати на ті загальні теореми грецької „геометричної алгебри", з яких греки робили практичні висновки при відшукуванні числових результатів.

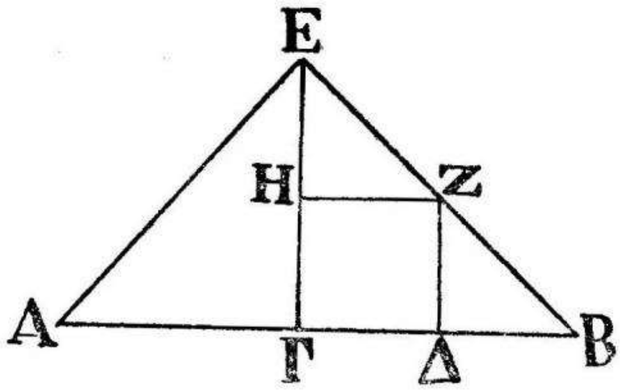
---

* Див. O. Neugebauer, Mathematische. Keilschrifttexte, Quellen und Studien zur Gesch. d. Mathem. Abt. A. Bd. 3. Berlin. Знаменитий виклад вавілонської математики маємо в книзі O. Neugebauer, Vorlesungen uber die Gesch. der antiken mathemat. Wissenschaften, 1 Bd. Vorgriechische Mathematik, Berlin, 1934.

** Archimedis Opera omnia, ed. J. L. Heiberg, vol. I. Lipsiae, „Κύκλου μέτρησις", стор. 24[illegible]. В III томі цього видання знаходимо Євтокієві (VI ст. н. е.) обчислення Архімедового наближення (Eutocii commentarius in dimensionem circuli, o. cit. vol. III, стор. 227—261).

2. Розглянемо дев'яту теорему другої книги Евклідових „Елементів". Ця теорема та її доведення являють собою типовий приклад „геометричної алгебри" стародавніх греків. Друга книга „Елементів" містить у собі численні застосування теореми Піфагора до доведення всяких алгебричних формул, поданих у геометричному вигляді.

Теорема 9. Якщо поділимо відрізок AB на дві рівні частини $A\Gamma$ і ΓB та на дві нерівні частини $A\Delta$ і ΔB (де Δ — довільна точка між Γ і B), то сума квадратів, побудованих на нерівних частинах, дорівнює подвійній сумі квадратів, з яких один побудований на половині $A\Gamma$, а другий на відрізку, що лежить між точками поділу Γ і Δ.



Отже, Евклід доводить, що:

$$A\Delta^2 + \Delta B^2 = 2\left(A\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2\right)$$

і для доведення креслить прямокутний і рівнораменний трикутник ABE, відрізки $E\Gamma \perp AB$, $\Delta Z \perp AB$, $ZH \perp E\Gamma$ та зводить A з Z.

Потім доводить з педантичною точністю, що трикутники $EA\Gamma$, $E\Gamma B$, EHZ і $Z\Delta B$ також прямокутні і рівнораменні. Нарешті з рівностей:

$$EA^2 = 2A\Gamma^2,\ EZ^2 = 2HZ^2 = 2\Gamma\Delta^2,$$

$$EA^2 + EZ^2 = 2\left(A\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2\right),$$

$$AZ^2 = AE^2 + EZ^2 = 2\left(A\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2\right),$$

$$AZ^2 = A\Delta^2 + \Delta Z^2,$$

$$A\Delta^2 + \Delta Z^2 + 2\left(A\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2\right) \text{ і } \Delta Z = \Delta B$$

одержує $A\Delta^2 + \Delta B^2 = 2\left(A\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2\right)$, що й треба довести.

3. Вже Г. Цейтен* зауважив, що наведена теорема може послужити для обчислення з довільним наближенням другого кореня з числа 2. Покажу, як можна Евклідову формулу змодифікувати, щоб з її алгебричної інтерпретації можна було вивести легкий спосіб обчислення другого кореня з довільного натурального числа.

Розглянемо форму:

$nx_1^2 - y_1^2$, де n — натуральне число та x_1 і y_1 будь-які натуральні числа.

Покладемо: $x_2 = x_1 + y_1$, $y_2 = nx_1 + y_1$.

З цього одержуємо:

$$nx_2^2 - y_2^2 = -(n-1)\left(nx_1^2 - y_1^2\right).$$

Приймаючи: $x_3 = x_2 + y_2$, $y_3 = nx_2 + y_2$ і т. д., одержуємо таку послідовність формул:

$$nx_2^2 - y_2^2 = -(n-1)\left(nx_1^2 - y_1^2\right),$$

$$nx_3^2 - y_3^2 = +(n-1)^2\left(nx_1^2 - y_1^2\right),$$

$$nx_4^2 - y_4^2 = -(n-1)^3\left(nx_1^2 - y_1^2\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$nx_i^2 - y_i^2 = (-1)^{i+1}(n-1)^{i-1}\left(nx_1^2 - y_1^2\right).$$

Приймемо: $nx_1^2 - y_1^2 = 1$**, як перше наближення.

Одержимо послідовність формул

$$nx_i^2 - y_i^2 = (-1)^{2+1}(n-1)^{i-1},$$

які можна написати в такому вигляді:

---

* H. G. Zeuthen. Histoire des Mathematiques dans l'antiquite et le moyen âge. Paris, 1902, стор. 47—48. Див. також: Gli elementi d'Euclide e la critica antica e moderna, editi da Federigo Enriques, Roma, 1925, стор. 1 5. Heath T. L., A history of greck mathematiks, Oxford, 1921, стор. 398. N. Chuquet, Le triparty en la sciense des nombres, 1484.

** Це відоме рівняння Пелля; ми бачимо, як близькі були грецькі математики до теорії неперервних дробів, до теорії зредукованих чисел та до інших понять теорії чисел. Див. праці Paul Tannery: Memoires scientifiques, 5 томів, 1912—1922.

$$\frac{y_1}{x_1}=\sqrt{n-\frac{1}{x_1^2}},$$

$$\frac{y_2}{x_2}=\sqrt{n+\frac{n-1}{x_2^2}},$$

$$\frac{y_3}{x_3}=\sqrt{n-\frac{(n-1)^2}{x_3^2}}, \qquad (\alpha)$$

$$\frac{y_i}{x_i}=\sqrt{n+(-1)^i\frac{(n-1)^{i-1}}{x_i^2}}.$$

Послідовність $\left\{\frac{(n-1)^i}{x_i^2}\right\}$ сходиться до нуля, отже формули (α) дають наближення другого кореня з числа n ($n \geqslant 2$), якщо замість x_1 і y_1 підставимо, наприклад, $x_1 = y_1 = 1$ або ще краще $x_1 = 1$, а y_1 нехай дорівнює найбільшому з натуральних чисел, квадрат яких не більший ніж n.

Розглянемо один приклад, щоб побачити, як обчислюються за формулами (α) другі корені з натуральних чисел.

Приймемо $n=10$. З формул $x_i = x_{i-1} + y_{i-1}$, $y_i = nx_{i-1} + y_{i-1}$, одержуємо таблицю ($x_1 = 1$, $y_1 = 3$):

x_i	1	4	17	70	293	2216
y_i	3	13	53	223	923	3856

Маємо збіжну до $\sqrt{10}$ послідовність дробів:

$$\frac{3}{1} \quad \frac{13}{4} \quad \frac{53}{17} \quad \frac{223}{70} \quad \frac{923}{293} \quad \frac{3856}{1216} \rightarrow \sqrt{10}$$

4. Приймаючи $x_1 = \Gamma\Delta$, $y_1 = \Delta B$ та $n = 2$, одержуємо окремий випадок наведених у попередньому уступі формул і обчислень, який являється безпосереднім висновком Евклідової формули.

Приймаючи $A\Delta = y_2 = 2x_1 + y_1$, $A\Gamma = x_2 = x_1 + y_1$, одержуємо формулу $2x_2^2 - y_2^2 = -\left(2x_1^2 - y_1^2\right)$, яка дає змогу обчислювати наближені вартості другого кореня з числа 2 і яка є ідентична формулі Евкліда:

$$2A\Gamma^2 - A\Delta^2 = -(2\Gamma\Delta^2 - B\Delta^2).$$

Розглянемо ще зміст десятої теореми другої книги „Елементів“.

Довільний відрізок AB ділимо точкою Γ на дві рівні частини. Точка Δ — довільна точка на продовженні відрізка AB. Евклід доводить, що $A\Delta^2 + \Delta B^2 = 2\, A\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2)$.

З вигляду цієї рівності виходить, що вона може також послужити для наближеного обчислення другого кореня з числа 2, а геометрично вона різниться від дев'ят ї теореми тільки тим, що точка Δ ділить той відрізок AB зовнішньо у довільному відношенні.

5. Доведемо ще, що послідовність $\left\{\frac{(n-1)^{i-1}}{x_i^2}\right\}$ (див. рівності α) сходиться до нуля, якщо $i \to \infty$.

Досить, очевидно, розглянути випадок $x_1 = y_1 = 1$, бо кожне з чисел $x_2, x_3, x_4, \ldots$ стає більшим, якщо замість x_1 і y_1 приймемо натуральні числа більші ніж одиниця. Неважко перевірити, що числа x_i, y_i визначені формулами:

$$x_1 = 1,\ y_1 = 1,$$
$$x_{i+1} = x_i + y_i, \quad y_{i+1} = nx_i + y_i$$

можна написати у вигляді:

$$x_i = n^{\frac{i-1}{2}} + \binom{i}{2} n^{\frac{i-3}{2}} + \binom{i}{4} n^{\frac{i-5}{2}} + \ldots + i, \quad \text{для непарного } i,$$

$$x_i = \binom{i}{1} n^{\frac{i-2}{2}} + \binom{i}{3} n^{\frac{i-4}{2}} + \binom{i}{5} n^{\frac{i-6}{2}} + \ldots + i, \quad \text{для парного } i^*.$$

Для непарних індексів, маємо:

$$\frac{(n-1)^{i-1}}{x_i^2} = \frac{(n-1)^{i-1}}{\left\{n^{\frac{i-1}{2}} + \binom{i}{2} n^{\frac{i-3}{2}} + \binom{i}{4} n^{\frac{i-5}{2}} + \ldots + i\right\}^2} =$$

$$= \left(\frac{n-1}{n}\right)^{i-1} \cdot \frac{1}{\left\{1 + \binom{i}{2}\frac{1}{n} + \binom{i}{4}\frac{1}{n^2} + \ldots + i\,\frac{1}{n^{\frac{i-1}{2}}}\right\}^2} < \left(\frac{n-1}{n}\right)^{i-1}.$$

---

* $y_i = \binom{i}{2} n^{\frac{i-1}{2}} + \binom{i}{3} n^{\frac{i-3}{2}} + \binom{i}{5} n^{\frac{i-5}{2}} + \ldots + 1$, для непарного i

$y_i = n^{\frac{i}{2}} + \binom{i}{2} n^{\frac{i-2}{2}} + \binom{i}{4} n^{\frac{i-4}{2}} + \ldots + 1$, для парного i.

Звідси виходить:

$$\lim_{i\to\infty}\frac{(n-1)^{i-1}}{x_i^2}=O,$$ для довільного натурального n.

Для парних індексів i маємо:

$$\frac{(n-1)^{i-1}}{x_i^2}=\frac{(n-1)^{i-1}}{\left\{\binom{i}{1}n^{\frac{i-2}{2}}+\binom{i}{3}n^{\frac{i-4}{2}}+\binom{i}{5}n^{\frac{i-6}{2}}+\ldots+i\right\}^2}=$$

$$=n\left(\frac{n-1}{n}\right)^{i-1}\cdot\frac{1}{\left\{\binom{i}{1}+\binom{i}{3}\frac{1}{n}+\binom{i}{5}\frac{1}{n^2}+\ldots+i\frac{1}{n^{\frac{i-2}{2}}}\right\}^2}<n\left(\frac{n-1}{n}\right)^{i-1}.$$

Звідси виходить:

$$\lim_{i\to\infty}\frac{(n-1)^{i-1}}{x_i^2}=O,$$ для $n=1, 2, 3,\ldots$

М. О. ЗАРИЦКИЙ. ЗАМЕЧАНИЕ О ПРИБЛИЖЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ ДРЕВНИХ ГРЕКОВ.

Резюме

Я показываю возможность следующих действий при вычислении $\sqrt{n}$ в древнегреческой математике:

Положим $x_2=x_1+y_1$, $y_2=nx_1+y_1$, где n, x_1 и y_1 — натуральные числа. В результате: $nx_2^2-y_2^2=-(n-1)\ (nx_1^2-y_1^2)$.

Положив $x_i=x_{i-1}+y_{i-1}$, $y_i=nx_{i-1}+y_{i-1}$, находим, что

$$nx_i^1-y_i^2=(-1)^{i+1}(n-1)^{i-1}\ (nx_1^2-y_1^2.$$

Предположив, что $nx_1^2-y_1^2=1$, получаем

$$\frac{y_i}{x_i}=\sqrt{n+(-1)^i\frac{(n-1)^{i-1}}{x_i^2}}.$$

Так как $\lim\limits_{i\to\infty}\frac{(n-1)^{i-1}}{x_i^2}=o$, то мы получаем, что $\sqrt{n}=\lim\limits_{i\to\infty}\frac{y_i}{x_i}$.

Наукові записки Львівського Державного Університету імені Ів. Франка
Том V Серія фізико-математична, вип. 1 1947

Г. Л. БУЙМОЛА

КОЕФІЦІЄНТ ТОЧНОСТІ ГЕОМЕТРИЧНИХ ПОБУДОВ

Як відомо, поняття простоти побудови було введене Лемуаном (E. Lemoine „Géométrographie on art des constructions géométriques“, 1902).

Найпростішою вважається, за Лемуаном, та побудова, яка вимагає найменшого числа проведення операцій циркулем та лінійкою. Причому всі операції: C_1, C_2, C_3, R_1, $R_2 \ldots$, що розрізняє Лемуан, треба вважати однаково простими. Він покладає: $C_1 = C_2 = C_3 = R_1 = R_2 = 1$. В зв'язку з використанням інших прилад в рисуванні пізніше були введені такі символи: W_1, ξ_1, η_1, P_1, що позначають відповідно деякі характерні операції розміщення угольника в площині рисунку та повторні операції циркулем і лінійкою. Отже, загальний Лемуанів символ побудови можна було б тепер записати у такому вигляді: $OP(n_1 R_1 + n_2 R_2 + n_3 C_1 + n_4 C_2 + n_5 C_3 + n_6 P_1 + n_7 W_1 + n_8 \xi_1 + n_9 \eta_1)$, де також треба покласти: $C_1 = C_2 = C_3 = R_1 = R_2 = P_1 = W_1 = \xi_1 = \eta_1 = 1$. Сума $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 + n_7 + n_8 + n_9 = S$ і визначає собою простоту побудови, або коефіцієнт простоти. Отже, простота побудови залежить тільки від числа проведених операцій рисувальними приладдями. Найпростіше розв'язання задачі на побудову, тобто таке, якому відповідає найменше число S, Лемуан назвав геометрографічним її розв'язанням.

Щодо визначення простоти побудови та геометрографічного розв'язання задачі ми маємо ряд критичних зауважень Адлера (А. Адлер „Теория геометрических построений“, переклад з німецького під редакцією Шатуновського. Одеса, 1910), Бемера (P. Böhmer „Über geometrische Approximation“ inangural Dissertation zur Erlangung der Doktorwürde. Berlin, 1904), Каргіна (Д. И. Каргин „Точность графических расчётов“ — дисертація на степінь доктора технічних наук. Ленінград, 1937).

Всі ці зауваження в основному зводяться до того, що поняття геометрографічного розв'язання не задовольняє практиків хоча б тому, що при такому визначенні не можна з певністю стверджувати, що знайдене розв'язання вже геометрографічне.

Справді, це потребує доведення. Але ні Лемуан, ні його послідовники доведення цього не подали.

Бемер говорить, що встановлення простоти побудови є діло практики, а не теорії. Для теорії має значення точність виконаного рисунку, а не те, яким шляхом він виконаний і скільки проведено при цьому рисувальних операцій, бо найпростіше розв'язання задачі, в розумінні Лемуана, може бути не самим точним її розв'язанням.

Точність же побудови Лемуан характеризує числом проведених підготовчих операцій рисування $E = n_1 + n_2 + n_4 + n_6 + n_7 + n_8 + n_9$.

Але оскільки цілком очевидно, що точність залежить не лише від числа підготовчих операцій, а й в більшій мірі від ряду інших причин, тому це число не має ніякої практичної ваги і тому ним зовсім не користуються.

Бемер вказує метод обчислення величини помилки побудови, виходячи з того, що розглядає елементи рисунку (точки і прямі), як фізичні образи ідеальних геометричних елементів. При цьому він враховує фізіологічні властивості ока людини та фізичні властивості рисувальних приладь. Він досліджує ті „області помилок", в межах яких можливі відхилення від дійсного положення шуканих елементів. Причому найбільшу, або граничну, помилку („відхилення") остаточної побудови він і приймає за точність всієї побудови.

Він ставить задачу: відшукати з усіх можливих розв'язань даної задачі те, яке дало б мінімальну граничну помилку („відхилення").

Отже, тут мова йде лише про абсолютну величину помилки, що зроблена під час побудови. Правда, далі Бемер вказує на можливість обчислення відносної помилки побудови, але сам цієї роботи не проводить, а зупиняється лише на обчисленні абсолютної величини остаточної, або граничної, помилки побудови, яку і вважає за величину помилки всієї проведеної побудови.

Зауважимо тут, що величина помилки побудови сама по собі ще не характеризує точності побудови в цілому. Вона може бути й незначною, але точність виконаного рисунку буде невелика і навпаки.

Це залежить, наприклад, і від того, в якому масштабі виконано рисунок.

Величину помилки побудови часто і приймають в практиці за точність побудови. Насправді ж точність побудови краще виразити певним числом, що характеризувало б якість побудови.

За таке число можна взяти відношення деякого початкового відхилення точки чи прямої, що обумовлюється фізіологічними особливостями нашого ока, до граничного або найбільшого відхилення, яке дістаємо внаслідок остаточної побудови. Це число можна назвати коефіцієнтом точності.

* * *

Практично рисунок виконується на аркуші паперу при допомозі циркуля, лінійки та угольника. Допоміжним знаряддям є олівець, рейсфедер, або перо, з допомогою яких рисуються лінії і позначаються точки на рисунку.

В практичному рисуванні ми маємо два роди речей: реальні точки — плями і реальні лінії — смужки, які являються елементами рисунку.

Якщо при нормальній дальності зору в 25 см найменша видима (гранична) ширина смужки і діаметр плями, які фактично приймаємо за точку і пряму, будуть відповідно ε_1 і ε_2, то, зважаючи на те, що видимість залежить ще від інтенсивності освітлення і багатьох інших причин (наприклад, втома зору, що має місце при спостереженні, виключає можливість довго спостерігати на межі зорових вражень і т. ін.), можна прийти до висновку, що найменша ширина дійсно виконаної (нарисованої) смужки і діаметр плями повинні бути більшими за граничні величини ε_1 і ε_2.

Позначимо цю найменшу ширину смужки і найменший діаметр плями відповідно через $2\omega_1 > \varepsilon_1$ і $2\omega_2 > \varepsilon_2$.

Причому будемо вважати, що:

1. Всяка пляма, яку приймаємо ми за реальну точку, позначену на рисунку з допомогою пера чи уколу ніжки циркуля, міститься в середині кола, радіус якого не перевищує певної величини ω_2 як свого максимуму. Це коло замінює собою геометричну точку, а саме — геометричний центр плями.

2. Кожна смужка, яку ми приймаємо за реальну пряму (позначена в полі рисунку з допомогою пера чи рейсфедера), обмежена двома паралельними прямими, віддаль між якими не перевищує $2\omega_1$ як свого максимуму. Тоді кожна така смужка замінює собою геометричну пряму, а саме — середню лінію смужки.

3. Кожна кільцева смужка (позначена в полі рисунку з допомогою циркуля), яку ми приймаємо за реальне коло, обмежена двома концентричними колами. Тоді кожна кільцева смужка, ширина якої не більша $2\omega_1$, замінює собою

геометричне коло, а саме — середню лінію кільцевої смужки.

Важливим вихідним принципом всіх побудов в рисуванні будемо вважати принцип сумісного положення плям і смужок, або так званий принцип інцидентності складових елементів рисунку. Цьому принципу надають таке формулювання, беручи до уваги фізіологічні особливості сприймання.

Пляму і смужку слід вважати інцидентними, якщо їх не можна відрізнити окремо одне від другого. Це має місце тоді, коли найменша віддаль їх контурів не досягає деякої величини ε.

В зв'язку з цим введемо такі три величини (рис. 1): $\omega_1' = \omega_1 + \frac{\varepsilon}{2}$; $\omega_2' = \omega_2 + \frac{\varepsilon}{2}$; $\omega_0 = \omega_1' + \omega_2'$ і будемо вважати,

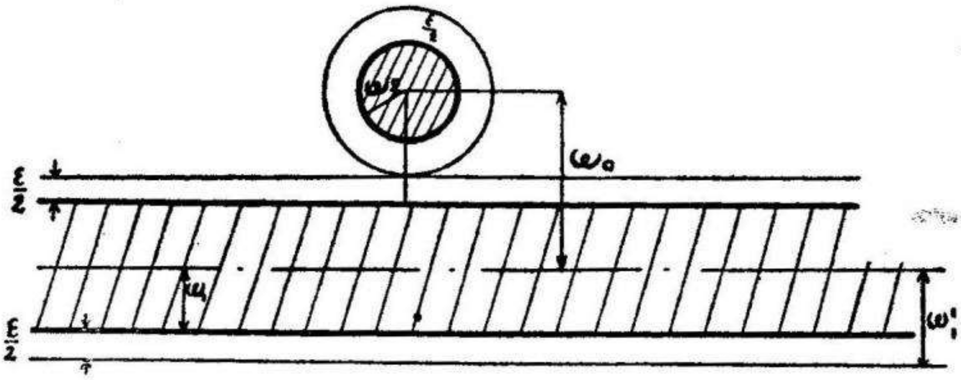


Рис. 1.

що інцидентність має місце, якщо віддаль центра плями від середньої лінії смужки не перевищує ω_0 як свого максимуму.

Дві плями не відрізняються одна від другої, якщо віддаль між їх центрами не більше $2\omega_1'$, тобто, якщо вони містяться разом в середині деякого кола, радіус якого ніколи не перевищує ω_0 (рис. 2).

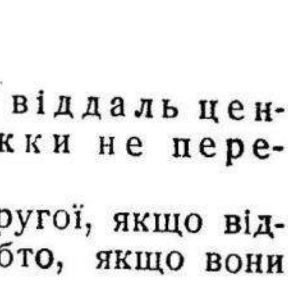


Рис. 2.

Такі плями будемо також називати інцидентними.

Розглядаючи сукупності реальних геометричних образів (точок і прямих) на рисунку, ми приходимо до поняття „області відхилення", тобто тієї області рисунку, в межах якої можливе непомітне відхилення збудованого геометричного образу від ідеального його положення. Остаточна помилка якоїсь побудови являє собою деяку пляму помилок, що виникає внаслідок появи „областей відхилень", які самі виникають при елементарних операціях. Важливо, звичайно, визначити не тільки величину цієї помилки, а й схарактеризувати степінь точності виконаної побудови.

З цією метою при розв'язуванні будь-якої геометричної задачі на побудову ми будемо розрізняти помилки двох типів:

1) „помилку ширини", тобто лінійну помилку, яку будемо звати просто „відхиленням";

2) „площу помилок".

Перший тип помилок зустрічається в побудові при фіксуванні точки на прямій, а також при проведенні прямої через одну або дві точки.

Такого типу буде остаточна помилка, що з'являється в побудові при розв'язуванні задач, у яких шуканим елементом є пряма.

Збудована пряма (що являється розв'язкою задачі), як би точно ми побудову не проводили, завжди буде відхилятися від ідеально-геометричного положення її, тобто від того положення, яке б вона займала, коли б ми мали змогу будувати ідеально-геометричні прямі та точки.

Проте, оскільки на рисунку ми маємо справу не з ідеально-геометричними точками та прямими, а лише з їх фі-

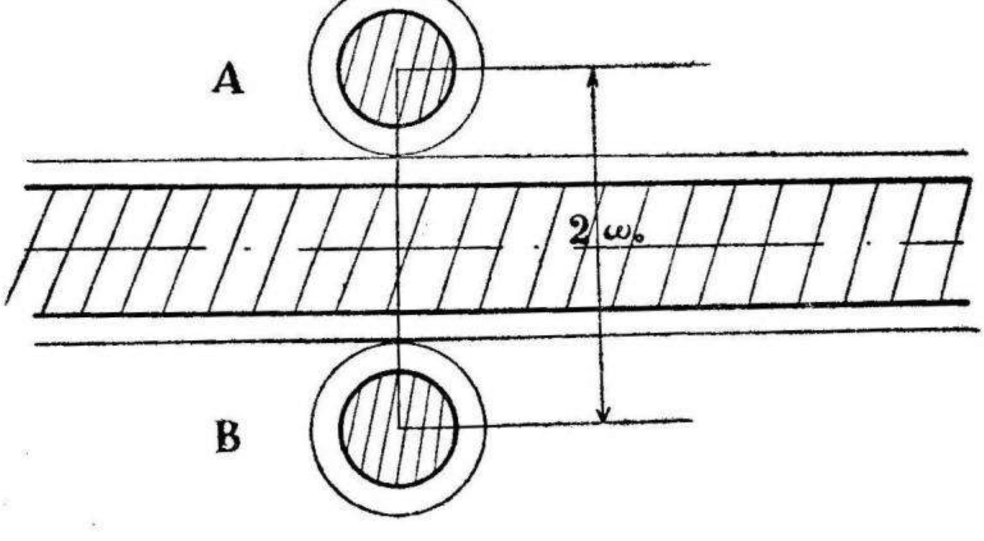


Рис. 3.

зичними образами, то природно, що остаточне положення збудованої прямої буде відхилятись від ідеально-геометричного її положення. Лінійна величина цього відхилення і буде

„помилкою ширини", або просто „відхиленням", що з'являється в побудові.

Другий тип помилок з'являється в побудові і при будь-якому графічному визначенні положення точки (перетином ліній або встановленням ніжки циркуля чи пера в графічно задану точку).

Отже, цей тип помилок з'являється в побудові при розв'язуванні задач, у яких шуканим елементом є точка. „Відхилення", рівне діаметрові плями (точки) та ширині нарисованої смужки (лінії), тобто рівне $2\omega_2' + 2\omega_1' = 2\omega_0 = AB$ (рис. 3), назвемо „одиничним відхиленням", або одиничною помилкою першого типу.

Будемо позначати його через t_1. За одиничну помилку другого типу, тобто за „одиничну площу помилок" ми візьмемо „площу помилок", рівну $2\omega_0 \cdot 2\omega_0 = 4\omega_0^2$ (рис. 4). Ця

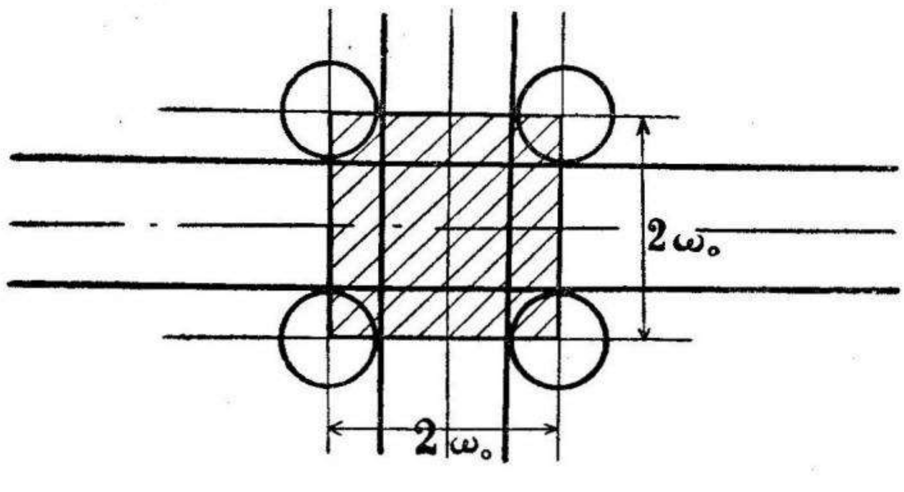


Рис. 4.

площа одержується внаслідок визначення точки перетином двох реальних прямих (смужок) під прямим кутом. Будемо позначати її через t_2.

Найбільше крайнє, або граничне можливе „відхилення", яке дістаємо внаслідок побудови прямої, ми будемо називати граничною помилкою побудови прямої і позначатимемо через T_1.

Найбільшу граничну „площу помилок", яку дістаємо внаслідок побудови точки, ми зватимемо граничною помилкою побудови точки, або „граничною площею помилок", і будемо позначати через T_2.

Для того, щоб судити про точність розв'язання задачі на побудову, щоб мати змогу порівнювати точність розв'язань однієї і тієї ж задачі різними способами або різних поміж собою задач, необхідно мати міру точності. За міру точності побудови ми візьмемо відношення одиничної помилки до граничної помилки T.

Тобто, точність побудови ми будемо характеризувати відношенням $\frac{t}{T} = K_\alpha$.

Число K_α назвемо коефіцієнтом точності побудови. Отже, коефіцієнтом точності побудови, у якого шуканим елементом є пряма, буде $K_1 = \frac{t_1}{T_1}$, а коефіцієнт точності побудови, у якого шуканим елементом є точка, буде $K_2 = \frac{t_2}{T_2}$.

Зауважимо, що завжди $t_1 = \sqrt{t_2}$. Отже, якщо $K_1 = \sqrt{K_2}$, то побудови будуть одного порядку точності. Звідси видно, що чим більший коефіцієнт K_α, тим більша точність побудови. Те розв'язання задачі на побудову, при якому дістаємо максимальне значення K_α, будемо вважати кращим її розв'язанням.

Застосовуючи введені поняття, ми зможемо тепер кожну Лемуанову елементарну операцію рисування схарактеризувати певним числом — коефіцієнтом точності цієї операції, обчисленим за вказаним принципом.

Так, наприклад, розглядаючи операцію встановлення ніжки циркуля (чи взагалі вістря пера, олівця) в реальну точку (пляма) як позначення в полі рисунку плями інцидентної заданій плямі чи смужці, ми можемо обчислити коефіцієнт точності операції C_1 так: $K_{c_1} = \frac{4\omega_0^2}{I/\omega_0^2} = 1{,}27\ldots$, де I/ω_0^2 — площа кола, що являє собою „граничну площу помилок". Щождо встановлення ніжки циркуля в точку перетину двох прямих під довільним кутом α, а також в точку перетину двох кривих (якщо елемент кривої замінити поблизу точки перетину дотичною), то „областю відхилення" буде та частина площини рисунку, на якій розміщені геометричні центри всіх плям інцидентних обом заданим прямим (рис. *i*). Ця частина площини носить назву „площі відхилень" або „площі помилок". Її форма і величина залежить в основному лише від кута α, під яким перетинаються ці прямі. Якщо позначити площу помилок через T_2, то ця залежність виразиться такою формулою: $T_2 = \frac{4\omega_0^2}{\sin\alpha}$ і коефіцієнт точності операції $c_1 - K_{c_1} = \frac{4\omega_0^2}{T_2} = \sin\alpha$. Для $\alpha = 60^0$ будемо мати $K_{c_1} = 0{,}86\ldots$ Звідси очевидно, що коефіцієнт точності встановлення ніжки циркуля в точку перетину двох прямих під прямим кутом дорівнює одиниці, що, між іншим, видно із прийнятого визначення „одиничної площі помилок".

Розглянемо тепер Лемуанову операцію C_2 — встановлення ніжки циркуля в довільну точку заданої лінії.

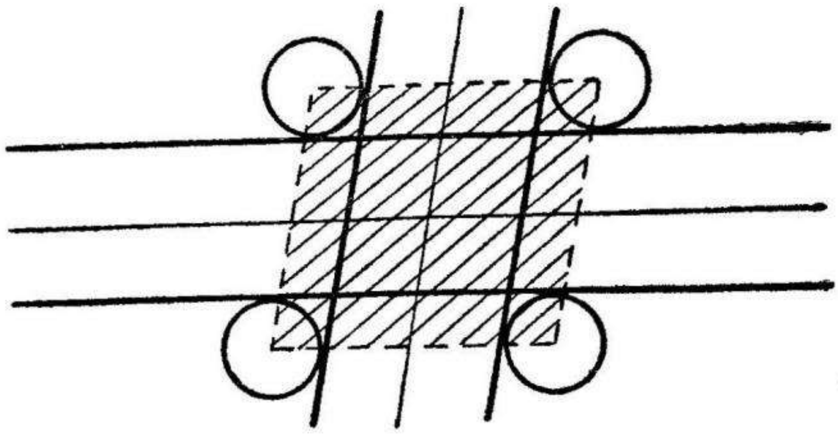


Рис. 5.

Сумісне положення (інцидентність) реальної точки (плями) та реальної лінії (смужки) утворює „відхилення" $\omega_0 = \omega_1' + \omega_2'$ в ту і другу сторону. Тому $K_{c_2} = \frac{2\omega_0}{2\omega_0} = 1$.

Точність прикладування лінійки до заданої графічної точки — $Op(R_1)$ — характеризується величиною ω_0.

Тобто операції $Op(R_1)$ і $Op(c_2)$ приймаються рівноточними.

Тоді: $K_{R_1} = \frac{2\omega_0}{2\omega_0} = 1$.

Операцію прикладування лінійки до двох заданих точок $(2R_1)$ можна схарактеризувати коефіцієнтом точності $K_{2R_1} = \frac{2\omega_0}{2\beta}$, де 2β — „граничне відхилення" проведеної прямої (смужки) через дві задані точки (плями) від ідеально-геометричного її положення.

Величина відрізку 2β нормального до лінії центрів тих кіл, що являють собою реальні точки A та B (рис. 6) (тобто до ідеальної прямої AB), в точці x залежить від відношення $\lambda = XA:XB$. Для різних ділянок (I, II, III) прямої AB це відхилення буде дорівнювати:

$$1)\quad 2\beta_{\mathrm{I}} = 2\frac{\lambda\omega_0 + \omega_0}{1-\lambda};\qquad 2)\quad 2\beta_{\mathrm{II}} = 2\frac{\lambda\omega_0 - \omega_0}{\lambda - 1} = 2\omega_0;$$

$$3)\quad 2\frac{\beta}{\text{III}} = 2\frac{\lambda\omega_0 + \omega_0}{\lambda - 1}.$$

Якщо відхилення розглядається в точках лише на відрізку AB, то $2\frac{\beta}{\text{II}} = 2\omega_0$ і коефіцієнт точності у цьому випадку дорівнює $K_{2R_1} = \frac{2\omega_0}{2\omega_0} = 1$.

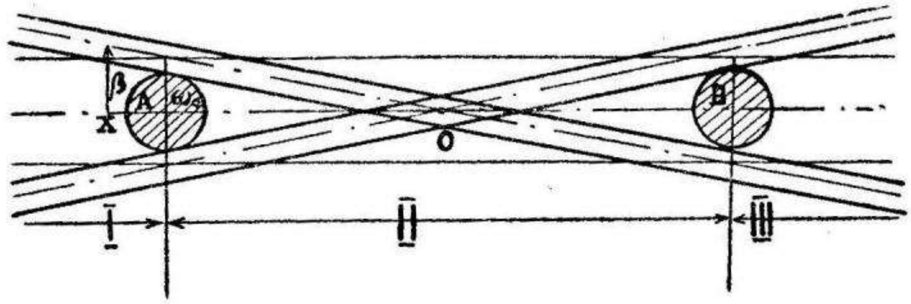


Рис. 6.

Аналогічним способом, очевидно, можна встановити коефіцієнт точності і для інших елементарних операцій, що вживаються в рисуванні.

Зокрема. для операцій (R_2) і (C_3) — рисування прямої та кола — коефіцієнт точності можна умовно вважати рівним одиниці.

Таке припущення стверджується наслідками експериментальних досліджень цих операцій, проведених Каргіним.

В складніших випадках, коли помилка побудови („відхилення") з'являться внаслідок цілого ряду елементарних побудов, треба брати до уваги не тільки ті „відхилення", що повстають під час проведення елементарних операцій рисування, а й „к о м п о н е н т и" їх (тобто ортогональні проекції відхилень на певний напрям), що, входячи в слідуючу область „відхилень", яка з'являється внаслідок дальнішої побудови, сприяють нарощуванню помилки

Отже, остаточна помилка побудови являє собою деяку пляму „помилок", яка з'являється внаслідок появи „відхилень", що виникають при елементарних операціях та „компонентів відхилень".

Розглядаємо тепер декілька прикладів на обчислення коефіцієнта точності основних геометричних побудов.

1. ПОДІЛИТИ ЗАДАНИЙ ВІДРІЗОК ПОПОЛАМ

Хай задано графічно відрізок AB (рис. 7). Для розв'язання цієї задачі описують з точки A та B, як з центрів, послідовно два кола довільним радіусом При цьому можливі такі помилки: 1). При встановленні ніжки циркуля в точку

A „відхилення“ буде дорівнювати $2\omega_0$. Те ж саме в точку B, поскільки операції встановлення ніжки циркуля як в точку A, так і в точку B цілком однакові і, крім того, одна від другої не залежить.

2). В точках перетину дуг C і D, очевидно, також „площі помилок“ будуть однакові і кожна з них може бути обчислена так: „компоненти помилок“ вздовж AC та BC будуть рівні, $\omega_a = \omega_b = \omega_0 \operatorname{Sin} \alpha$.

„Площа помилок“ в точці C буде: $T_c = \frac{\omega_0^2 (\operatorname{Sin} \alpha + 2)^2}{\operatorname{Sin} \gamma}$, де γ — кут, під яким перетинаються дуги.

Точність побудови точок C і D, очевидно, буде найбільшою, якщо „площа помилок“ в точках C і D буде мінімальною. А це може бути тоді, коли кут перетину дуг γ буде дорівнювати $\frac{\pi}{2}$.

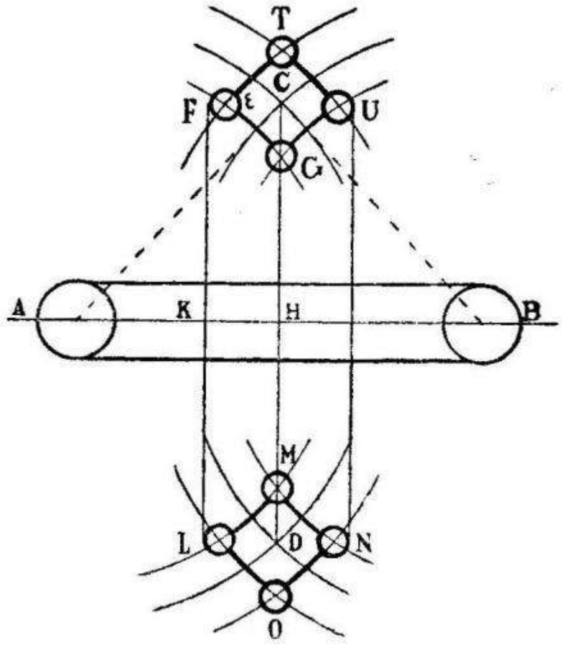


Рис. 7.

Тоді радіуси кіл будуть рівні $\frac{AB^2}{2} \approx 0{,}7\,AB$, трохи більшими за половину AB, як це здебільшого і вживають в рисуванні.

Обчислимо коефіцієнт точності побудови точки C. $K_c = \frac{t_2}{T} = \frac{4\omega_0^2 \operatorname{Sin} \gamma}{\omega_0^2 (\operatorname{Sin} \alpha + 2)^2}$, і якщо $\gamma = \frac{\pi}{2}$, то коефіцієнт точності побудови точки C буде:

$$K_c = 0{,}54\ldots$$

Щоб обчислити відхилення, яке має місце при проведенні прямої, яка сполучає точки C і D, треба обчислити спочатку „компоненти відхилення“ в точках C і D на AB, які й можна наближено прийняти за величину помилки поділу відрізка AB пополам, а також побудову перпендикуляра до середини заданого відрізка.

Тому щонайбільше „відхилення“ ми одержуємо у випадку одностороннього дотику прямої EL „площі помилок“ в точках C і D, максимальне зміщення перпендикуляра CD буде рівне KH. Величина KH і є „компонент відхилення“ в точках C і D на AB. Величину KH можна розглядати, як проекцію $(GE + EF)$ на AB, причому $GE = \omega_0 \operatorname{Sin} \alpha + 2\omega_0$, а $EF = \omega_0$, тобто величині тієї помилки, що виникає при прикладуванні лінійки до точки.

Отже, проекція $[(\omega_0 \operatorname{Sin} \alpha + 2\omega_0) + \omega_0]$ на AB повинна дати нам „відхилення" (рівне KH) перпендикуляра CD від дійсного його положення.

$$KH = \omega_0 (\operatorname{Sin} \alpha + 2) \operatorname{Cos} (GE, \hat{AB}) + \omega_0 \operatorname{Cos} (EF, \hat{AB}) =$$
$$= \omega_0 [(\operatorname{Sin} \alpha + 2) \operatorname{Cos} \alpha + 1],$$

якщо покласти кут $(GE, \hat{AB}) = \alpha$, а між EF та $AB = 0$.

Отже, $KH = \omega_0 (\operatorname{Sin} \alpha \operatorname{Cos} \alpha + 2 \operatorname{Cos} \alpha + 1)$.

Ця найбільша величина „відхилення" буде при умові $\alpha = \frac{\pi}{4}$ дорівнювати: $KH \approx 2{,}9\, \omega_0$.

Якщо вважати, за Бемером, величину $\omega_0 = 0{,}08$ мм, то дістанемо $KH = 0{,}23$ мм. Це і є величина помилки поділу відрізку пополам і побудування перпендикуляра в середині відрізку. Коефіцієнт точності цієї побудови буде дорівнювати відношенню $\frac{2\omega_0}{T_1}$, де „граничне відхилення" $T_1 = 2KH$. Або при вказаних умовах: $K_{CD} = \frac{2\omega_0}{2 \cdot 2{,}9\omega_0} = 0{,}34\ldots$ Величина цього відношення прямо пропорціональна точності побудови, тобто чим більше відношення, тим більша точність побудови.

Порівнюючи коефіцієнти точності побудови точки C і D та прямої CD, ми бачимо, що, оскільки $t_1 = \sqrt{t_2}$, $\sqrt{K_c} = 0{,}734\ldots$, а $K_{CD} = 0{,}34\ldots$, порядок точності побудови не однаковий.

2. ПОДІЛ КУТА ПОПОЛАМ

Розглянемо кут $ASB = \alpha$ (рис. 8). Щоб поділити його пополам, опишемо дугу з точки S, як центра, довільним радіусом r.

При встановленні ніжки циркуля в точку S ми робимо помилку, яка характеризується „площею помилок"

$$T_s = \frac{4\omega_0^2}{\operatorname{Sin} \alpha}.$$

„Компонент відхилень" в точці S на напрям SA, який позначимо через ω_s, буде:

$$\omega_s = \omega_0 \operatorname{Cos} (90 - \alpha) = \omega_0 \operatorname{Sin} \alpha.$$

Тоді „відхилення“ $MN = \omega_0 \operatorname{Sin} \alpha + 2\omega_0 = \omega_0 (\operatorname{Sin} \alpha + 2) = \omega_0 f(\alpha)$, де $f(\alpha) = \operatorname{Sin} \alpha + 2$.

„Площа помилок“ в точці A буде дорівнювати

$$T_A = 2\omega_0^2 f(\alpha).$$

Аналогічно можна обчислити відхилення KL і „площу помилок“ в точці B.

Далі з точок A та B, як центрів, опишемо дуги рівними радіусами, більшими за половину AB, ($R = 0{,}7\,AB$), що перетнуться в точці C.

При такому радіусі R дуги перетнуться під кутом, близьким до прямого, і тоді „площа помилок“ в точці $C - T_c$

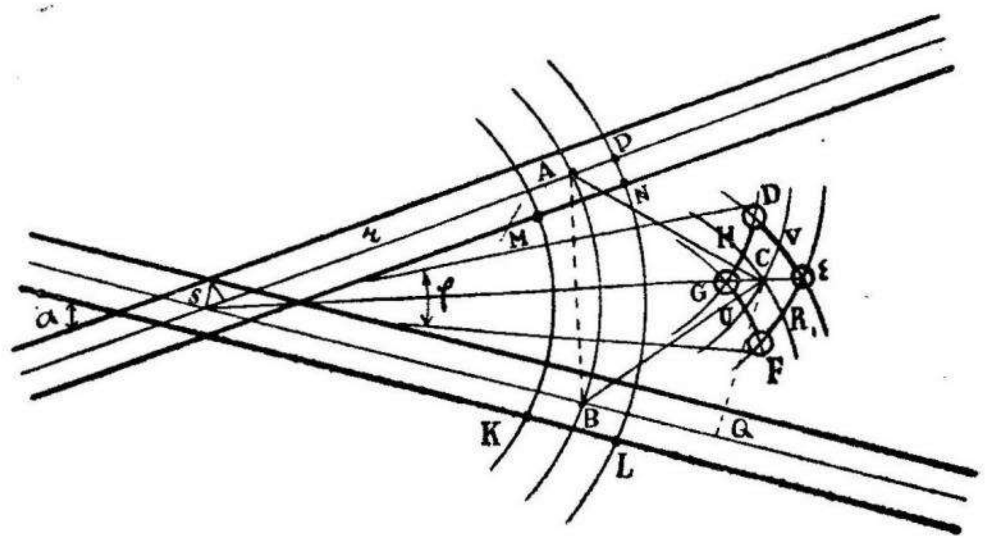


Рис. 8.

буде за своєю формою найменше витягнутою в напрямку сторін кута ASB, що зменшує помилку побудови прямої, яка сполучає точку C з вершиною S заданого кута, тобто бісектриси кута α.

Обчислимо „площу помилок“ T_c в точці C. Для цього знайдемо спочатку величину ω_a „компонента відхилення“ на напрямок AC.

$$\omega_a = AP \operatorname{Cos} \psi, \text{ де } \psi = \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}.$$

Підставляючи $AP = \frac{1}{2}\, MN = \frac{1}{2}\,\omega_0 f(a)$,

дістанемо $\omega_a = \frac{\omega_0}{2} f(a) \operatorname{Cos} \psi$.

Аналогічно можна обчислити ω_b для точки B, що, як легко бачити, буде дорівнювати ω_a.

Відхилення HR_1 і UV в точці C будуть рівні між собою.

$$UV = HR_1 = \frac{\omega_0}{2} f(\alpha) \operatorname{Cos} \psi + 2\omega_0 = \omega^0 \left(\frac{1}{2} f(\alpha) \operatorname{Cos} \psi + 2 \right).$$

„Площею помилок“ в точці C буде площа $DEFG$, яку наближено можна вважати за квадрат, якщо кут γ, під яким перетинаються дуги в точці C, буде дорівнювати $\frac{\pi}{2}$.

Площа $DEFG = T_c = \omega_0^2 \left[\frac{1}{2} f(\alpha) \operatorname{Cos} \psi + 2 \right]^2$.

Отже, тепер ми маємо змогу визначити точність побудови кожної з точок A, B, C за формулою.

Щоб схарактеризувати точність поділу кута ASB пополам, можна обчислити спочатку „кутову помилку“ або „кут відхилення“ φ, що утворюється при сполученні точок C і D. Цей кут приймемо за величину можливої помилки даної побудови.

З рисунку знаходимо:

$$tg \frac{\varphi}{2} = \frac{DC + 2\omega_0}{SC},$$

де $2\omega_0$ — це те сумарне „відхилення“, яке з'являється при прикладуванні лінійки до точок C і S, причому лінійка займає положення SD (можливе також „відхилення“ лінійки в напрямку SF). Розглядаючи $DC = \frac{1}{2} DF$ і $DF^2 = DE^2 + EF^2$,

знаходимо $DC = \frac{\omega_0}{4} \left[f(\alpha) \operatorname{Cos} \psi + 4 \right] \sqrt{2}$.

Для визначення SC знаходимо BQ

$$BQ = BC \cdot \operatorname{Cos} \psi = 0{,}72\, AB \operatorname{Cos} \psi.$$

Підставивши значення $AB = r \sqrt{2 (1 - \operatorname{Cos} \alpha)}$,

$$BQ = 0{,}72 r \sqrt{2 (1 - \operatorname{Cos} \alpha)} \cdot \operatorname{Cos} \psi.$$

Тепер визначимо SC.

$$SC^2 = SB^2 + BC^2 + 2SB \cdot BQ,$$

звідки після підстановки значень відповідних відрізків дістанемо:

$$SC = r \sqrt{1 + 0{,}98 (1 - \operatorname{Cos} \alpha) + 1{,}4 \sqrt{2 (1 - \operatorname{Cos} \alpha)} \operatorname{Cos} \psi}.$$

Обчислимо тепер:

$$tg\,\frac{\varphi}{2}=\frac{\frac{\omega_0}{4}[f(\alpha)\,\mathrm{Cos}\,\psi+4]\sqrt{2}+2\,\omega_0}{r\sqrt{1+0{,}98\,(1-\mathrm{Cos}\,\alpha)+1{,}4\,\sqrt{2\,(1-\mathrm{Cos}\,\alpha)}\cdot\mathrm{Cos}\,\psi}}$$

Отже, величина кута φ залежить від величини кута α і від радіуса r: чим більший радіус r, тим менша „кутова помилка" (а також від ω_0 — товщини проведених ліній).

Обчислимо для $\alpha = 60^0$ і $r = 100$ мм величину „кутової помилки", тобто кут φ:

$$tg\,\frac{\varphi}{2}=\frac{3{,}659\,\omega_0}{136}.$$

Покладаючи $\omega_0 = 0{,}08$ мм, дістанемо наближено:

$tg\,\frac{\varphi}{2} = 0{,}0021\ldots$, звідки $\frac{\varphi}{2} = 7'$ і, значить, „кутова помилка" даної побудови $\varphi = 14'$ для $\alpha = 60^0$ і $r = 100$ мм (тобто „кутова помилка" побудови становить біля $0{,}4\%$ заданого кута).

Характеризуючи точність цієї побудови відношенням $\frac{2\,\omega_0}{T}$, знаходимо:

$$K_{sc}=\frac{2\,\omega_0}{2\,(DC+2\,\omega_0)}=\frac{2\,\omega_0}{2\cdot 3{,}659\,\omega_0}=0{,}27\ldots$$

Отже, коефіцієнт точності поділу заданого кута пополам

$$K_{sc}=0{,}27\ldots$$

3. ПОБУДОВА ПРЯМОЇ, ЩО ПРОХОДИТЬ ЧЕРЕЗ ЗАДАНУ ТОЧКУ ПАРАЛЕЛЬНО ЗАДАНІЙ ПРЯМІЙ

Хай AB — задана пряма і C — точка зовні неї, через яку повинна пройти шукана пряма паралельно до AB (рис. 9).

Здебільшого при побудові шуканої прямої використовують угольник і лінійку, бо для практики важлива простота побудови.

Побудова проводиться так: прикладають угольник однією з його сторін (напр. гіпотенузою) до заднього відрізку AB і по лінійці зміщують його в напрямку точки C до тих пір, поки сторона угольника (гіпотенуза), що раніше зливалася з AB, не пройде через задану точку. Потім проводять вздовж цієї сторони пряму CD, яка і буде шуканою прямою.

Дослідимо точність цієї побудови.

Помилка прикладування сторони угольника до відрізку AB характеризується кутом φ — „відхилення" сторони угольника від ідеального положення прямої,

$$tg\varphi = \frac{\omega_0}{AO} = \frac{2\omega_0}{AB}.$$

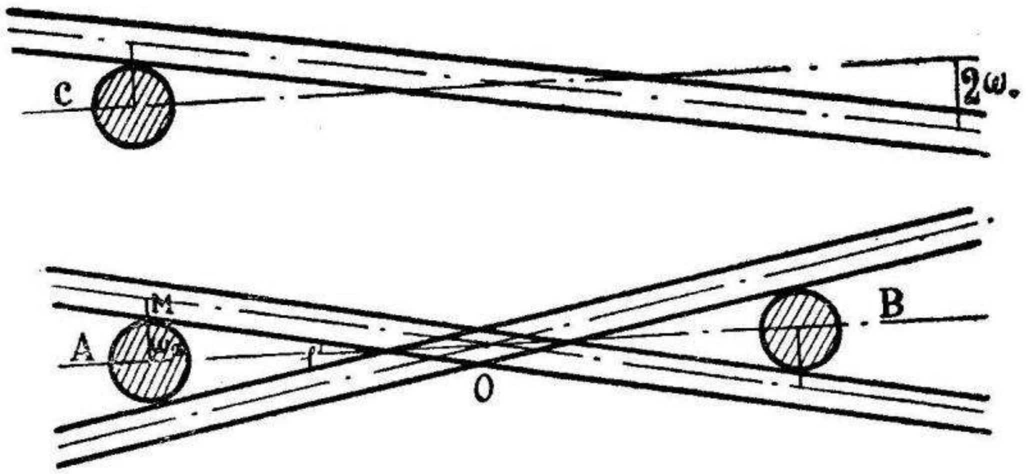


Рис. 9.

Якщо довжина заднього відрізку $AB = 100$ мм і $\omega_0 = 0{,}08$ мм, то $tg\varphi = 0{,}0016$, звідки $\varphi = 5'30''$.

Переміщування угольника по лінійці, ми вважаємо, не вносить помилки в побудову. Прикладування сторони угольника до точки C характеризується величиною ω_0 і тому $tg\psi$ „кута відхилення", що має місце в цьому випадку, і буде дорівнювати $\frac{0{,}08}{100} = 0{,}0008$. Звідки $\psi = 2'30''$.

Отже, максимальна величина „кутової помилки" побудови угольником і лінійкою паралельної прямої, що проходить через задану точку, рівна $\xi = \varphi + \psi = 8'$ на 100 мм довжини заданого відрізку.

Коефіцієнт точності цієї побудови обчислимо за формулою:

$$K_1 = \frac{t_1}{T_1}.$$

В даному разі „граничне відхилення" $T_1 = 3\omega_0$.

Тому $K_1 = \frac{2\omega_0}{3\omega_0} = 0{,}66.$

Аналогічно можна обчислити коефіцієнт точності ряду інших основних геометричних побудов.

Г. БУЙМОЛА. О ТОЧНОСТИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПОСТРОЕНИЙ

Резюме

Автор изучает вопрос точности некоторых геометрических построений. Он вычисляет величины, характеризующие эту точность, и применяет их к операциям Лемуана (Lémouane) и другим элементарным геометрическим построениям.

ЗМІСТ

Стор.

Б. В. Гнеденко. Стефан Банах 5

І. Г. Соколов. Про наближення функцій, що задовольняють умові Ліпшица поліномами Бернштейна 10

І. Г. Соколов. Про коефіцієнти Фур'є для деяких класів неперервних функцій 16

М. О. Зарицький. Деякі властивості поняття похідної множини в абстрактних просторах 22

А. С. Кованько. Про квадрувальність деяких окремих видів поверхонь в сенсі Лебега 34

А. С. Кованько. Про компактність систем узагальнених майже періодичних функцій Вейля 53

В. Є. Лянце. До теорії майже періодичних функцій двох дійсних змінних 68

М. О. Зарицький. Зауваження до проблеми наближених обчислень в грецькій математиці 74

Г. Л. Буймола. Коефіцієнт точності геометричних побудов . . 80

Ученые записки
Львовского государственного университета
имени Ивана Франко
Том V. Серия физико-математическая. Выпуск 1
(на украинском языке)

БГ 00812. Зам. 498. Тираж 500. 14 республ. друк. м. Львів

Ціна 10 крб.