ЛЬВІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені ІВАНА ФРАНКА

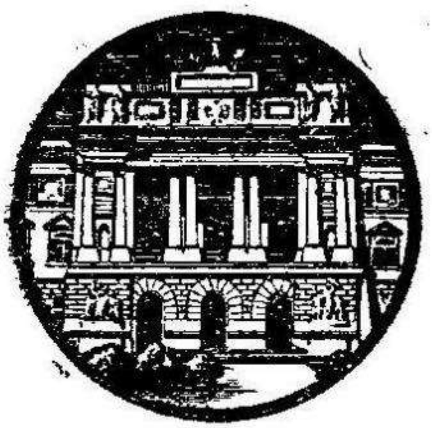
НАУКОВІ ЗАПИСКИ

ТОМ V

СЕРІЯ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА

ВИПУСК ДРУГИЙ

ВИДАННЯ ЛЬВІВСЬКОГО ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ — 1947



ЛЬВІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені ІВАНА ФРАНКА

НАУКОВІ ЗАПИСКИ

ТОМ V

СЕРІЯ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА

ВИПУСК ДРУГИЙ

ВИДАННЯ ЛЬВІВСЬКОГО ДЕРЖАВНОГО УНІВЕРСИТЕТУ — 1947

ЛЬВОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени ИВАНА ФРАНКО

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ

ТОМ V

СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

ВЫПУСК ВТОРОЙ

ИЗДАНИЕ ЛЬВОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА—1947

Друкується за розпорядженням ректора університету професора І. І. Белякевича

Наукові записки Львівського Державного Університету імені Ів. Франка
Том V Серія фізико-математична, вип. 2 1947

Я. Б. ЛОПАТИНСЬКИЙ

ПРО ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ КІЛЬЦЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ОПЕРАТОРІВ

Метою цієї статті являється встановлення деяких властивостей ідеалів у кільці диференціальних операторів.

Перший параграф носить підготовчий характер, основні результати викладені в другому параграфі. Наприкінці наводиться літературний вказівник, посилки на який вказані в тексті порядковим номером, заключеним в квадратові дужки.

1. Хай Γ — комутативне поле з характеристикою, яка рівна нулеві, що допускає n (лівих) операторів $d_1, \ldots, d_n$ з властивостями: якщо $a, b \subset \Gamma$; $i, j = 1, \ldots, n$, то $d_i a \subset \Gamma$; $d_i(a+b) = d_i a + d_i b$; $d_i(ab) = a d_i b + b d_i a$; $d_i(d_j a) = d_j(d_i a)$.

Таке поле буде зватися диференціальним.* Елемент $a \subset \Gamma$ буде зватися постійним, якщо $d_i a = o$ $(i = 1, \ldots, n)$. Легко бачити, що кожне раціональне число постійне.

Поле Γ, яке містить n елементів $a_1, \ldots, a_n$ з ненулевим якобіаном $|d_i a_j|$ („незалежні елементи"), буде зватися повним.

Важливість цього типу полів показує наступна лема, що належить Кольчину [1].

Лема 1. Хай $f_1(\varphi_1, \ldots, \varphi_k), \ldots, f_l(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$ — ненулеві поліноми неозначених $\varphi_1, \ldots, \varphi_k, \ldots, d_1^{i_1} \ldots d_n^{i_n} \ldots \varphi_j, \ldots$, з коефіцієнтами з повного поля Γ. Тоді існують елементи $b, \ldots, b_k \subset \Gamma$ такі, що $f_1(b_1, \ldots, b_k), \ldots, f_l(b_1, \ldots, b_k)$ відрізняються від нуля.**

Легко бачити, що повнота поля не тільки достатня, але й необхідна для справедливості леми. Дійсно, в неповному полі якобіан $|d_i \varphi_j|$ являється ненулевим поліномом неозначених $d_i \varphi_j$ $(i, j = 1, \ldots, n)$, який анулюється при довільній заміні $\varphi_j = b_j \subset \Gamma$ $(j = 1, \ldots, n)$.

* В дальшому Γ буде означати диференціальне поле (яке іноді зветься просто полем).

** d_i^0 розуміється як одиничний оператор d_0.

З полем Γ зв'язане кільце диференціальних операторів виду $\Sigma a_{i_1 \ldots i_n} d_1^{i_1} \ldots d_n^{i_n}$ $(a_{i_1 \ldots i_n} \subset \Gamma)$.

Сума тут припускається скінченою і розповсюдженою на різні сполуки цілих невід'ємних індексів $i_1, \ldots i_n$*. Всі такі суми з нулевим коефіцієнтом утотожнюються (нуль кільця $\Delta(\Gamma)$). Додавання в $\Delta(\Gamma)$ визначається очевидним способом, множення — аксіомами кільця та умовами: якщо $a \subset \Gamma$; $\alpha = d_i^{i_1} \ldots d_n^{i_n}$; $i, j = 1, \ldots, n$, то $d_i d_j = d_j d_i$, $d_i (a \alpha) = (d_i a) \alpha + a (d_i \alpha)$, $d_0 (a d_i) = (a d_i) d_0 = a d_i$.

Очевидно $\Delta(\Gamma)$ є кільцем з одиницею (d_0), без дільників нуля. Якщо Γ є полем постійних, то $\Delta(P)$ — комутативне; в противному разі $\Delta(\Gamma)$ не комутативне.

Дійсно, якщо, наприклад, $d_1 a \neq o$ $(a \subset \Gamma)$, то $d_1 (a d_1 = a d_1^2 + (d_1 a) d_1 \neq (a d_1) d_1$.

В кільці $\Delta(\Gamma)$ існує інволютивний обернений автоморфізм I, вказаний Фробеніусом [2]:

$$\Sigma a_{i_1 \ldots i_n} d_1^{i_1} \ldots d_n^{i_n} \rightarrow \Sigma (-1)^{i_1 + \ldots + i_n} d_1^{i_1} \ldots d_n^{i_n} (a_{i_1 \ldots i_n} d_0).$$

Це перехід до спряженого оператору. А саме:

$$I^2 = 1;\ I(\alpha + \beta) = I(\alpha) + I(\beta);\ I(\alpha\beta) = I(\beta) I(\alpha)$$

(I — тотожний автоморфізм $\Delta(\Gamma)$; $\alpha, \beta \subset \Delta(\Gamma)$).

Ця обставина дозволяє переносити кожну властивість лівих ідеалів кільця $\Delta(\Gamma)$ на праві ідеали (і навпаки). Як було показано Е. Нетер [3], кожний лівий (і, значить, правий) ідеал кільця $\Delta(\Gamma)$ має скінченний базис.

Очевидним способом проводяться операції над матрицями, з елементами $\Delta(\Gamma)$; при цьому матриця першого порядку $(\alpha) = \alpha$. Матриці $A_1, \ldots, A_k$, що складаються з одного рядка і однакової кількості стовбців („рядки"), звуться лінійно-незалежними (зліва), якщо $\alpha_1 A_1 + \ldots + \alpha_k A_k = 0$ $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k \subset \Delta(\Gamma))$ виникає $\alpha_i = o$ $(i = 1, \ldots, k)$.

Як було показано автором [4], для довільних елементів $\alpha, \beta \subset \Delta(\Gamma)$ можна підібрати такі елементи $\lambda, \mu \subset \Delta(\Gamma)$, що $\lambda \alpha = \mu \beta$ і λ або $\mu \neq o$. Очевидно, якщо $\alpha \neq o$, то $\mu \neq o$. Таким чином довільні два елементи з $\Delta(\Gamma)$ залежні (ліворуч, а також і праворуч).

2. В випадку, коли Γ є повним полем, теорема про скінченний базис (Е. Нетер) для ідеалів в $\Delta(\Gamma)$ може бути уточнена.

---

* Максимальна сума $i_1 + \ldots + i_n$ (в припущенні, що $a_{i_1 \ldots i_n} \neq o$ буде зватися степінню елементу).

Передусім буде доведена

Лема 2. Хай $A_1, \ldots, A_k$ — лінійно-незалежні строки довжини k; $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ — ненулеві елементи з $\Delta(\Gamma)$. Якщо поле коефіцієнтів Γ повне, то можна підібрати такі елементи $a_1, \ldots, a_k \subset \Gamma$, що строки $A_1, \ldots, A_k$ і $A = (\alpha_1 a_1 d_0, \ldots, \alpha_k a_k d_0)$ утворюють матрицю, яка має обернену матрицю зліва.

Доведення: Хай $U_{ii_1 \ldots i_n}$ позначає строку довжини k, спеціального виду: елемент строки, що займає i — місце дорівнює $d_1^{i_1} \ldots d_n^{i_n}$, інші — дорівнюють нулеві.

Хай s — найвища степінь елементів $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ і елементів з $\Delta(\Gamma)$, що складають строки $A_1, \ldots, A_k$.

Приєднуючи до Γ неозначені $\varphi_1, \ldots, \varphi_k, \ldots, d_1^{i_1} \ldots d_n^{i_n} \varphi_j, \ldots$ утворюють поле розширення — Γ_φ, яке буде, очевидно, диференціальним полем (применення операторів $d_1, \ldots, d_n$ до приєднаних елементів підказується позначеннями). Для кожного i вводиться слідуюча впорядкованність похідних: $d_1^{i_1} \ldots d_n^{i_n} \varphi_i$; $d_1^{i_1} \ldots d_n^{i_n} \varphi_i$ йде перед $d_1^{j_1} \ldots d_n^{j_n} \varphi_i$, якщо в послідовності $\sum\limits_{l=1}^{n} (j_e - i_e)$, $j_n - i_n, \ldots, j_1 - i_1$, існують ненулеві числа, причому перше з таких чисел — додатнє.

Хай $A_\varphi = (\alpha_1 \varphi_1 d_0, \ldots, \alpha_k \varphi_k d_0)$. Розглядаємо множини елементів виду:

$$d_1^{i_1} \ldots d_n^{i_n} A_i = \Sigma\, a_{ii_1 \ldots i_n}^{jj_1 \ldots j_n} u_{jj_1 \ldots j_n}, \tag{I}$$

$$d_1^{i_1} \ldots d_n^{i_n} A_\varphi = \Sigma\, a_{i_1 \ldots i_n}^{jj_1 \ldots j_n} (\varphi)\, u_{jj_1 \ldots j_n}. \tag{II}$$

Тут $i_1 + \ldots + i_n \leqslant m - s$ (m — деяке додатнє число більше s); $j_1 + \ldots + j_n \leqslant m$; $i, j = 1, \ldots, k$; $a_{ii_1 \ldots i_n}^{jj_1 \ldots j_n} \subset \Gamma$; $a_{i_1 \ldots i_n}^{jj_1 \ldots j_n}(\varphi) \subset \Gamma_\varphi$. Очевидно, $a_{i_1 \ldots i_n}^{jj_1 \ldots j_n}(\varphi)$ являються поліномами відносно $\varphi_1 \ldots, \varphi_k \ldots, d_1^{i_1} \ldots d_n^{i_n} \varphi_j \ldots$, причому вища похідна $d_1^{i_1} \ldots d_n^{i_n} \varphi_i$ в розкладі $d_1^{i_1} \ldots d_n^{i_n} A_\varphi$ входить в коефіцієнт при $U_{i0 \ldots 0}$ і відсутня в інших коефіцієнтах. Елементи (I) лінійно-незалежні над Γ_φ. Дійсно, в противному разі, ця залежність мала б місце і над Γ, що приводило б до лінійної залежності $A_1 \ldots, A_k$ над $\Delta(\Gamma)$. Нехай елементи $d_1^{i_1} \ldots d_n^{i_n} A_i - a_{ii_1 \ldots i_n}^{10 \ldots 0} U_{10 \ldots 0}$ (III) лінійно-залежні над Γ_φ (і, значить, над Γ).

Тоді $\sum\limits_{ii_1 \ldots i_n} c_{ii_1 \ldots i_n} (d_1^{i_1} \ldots d_n^{i_n} A_i - a_{ii_1 \ldots i_n}^{10 \ldots 0} U_{10 \ldots 0}) = 0$, де $c_{ii_1 \ldots i_n}$ — елементи з Γ, не рівні нулеві в сукупності.

Значить, $\sum_{ii_1\ldots i_n} c_{ii_1\ldots i_n} a^{1\,o\ldots o}_{ii_1\ldots i_n} = g_i \neq o$ і

$$\sum_i \alpha_i A_i = g_1 U_{1\,o\ldots o} \cdot (\alpha_i \subset \Delta(\Gamma)).$$

Хай тепер елементи (III) лінійно-незалежні над Γ_φ; і в цьому випадку дістанемо співвідношення того ж виду.

При достатньо великому m, елементи (I), (II) і, значить, відповідні елементи

$$d_1^{i_1}\ldots d_n^{i_n} A_i - a^{1\,o\ldots o}_{ii_1\ldots i_n} U_{1\,o\ldots o},\ d_1^{i_1}\ldots d_n^{i_n} A_\varphi - a^{1\,o\ldots o}_{i_1\ldots i_n}(\varphi)\, U_{1\,o\ldots o}$$

лінійно залежні над Γ_φ. Дійсно, кількість цих виразів

$$(k+1)\binom{n+m-s}{n},\ \text{при } m > \frac{nk^{\frac{1}{n}} + s\,(k+1)^{\frac{1}{n}}}{(k+1)^{\frac{1}{n}} - k^{\frac{1}{n}}}$$

перевищує кількість символів $U_{jj_1\ldots j_n}$, що беруть участь в цих виразах, яка дорівнює $K\binom{n+m}{n}$.

Хай $B_t = d_1^{i_1(t)}\ldots d_n^{i_n(t)} A_\varphi - a^{1\,o\ldots o}_{i_1(t)\ldots i_n(t)}\, u_{1\,o\ldots o}$, $(t=1\,\ldots,\,l)$ є одною з таких мінімальних систем, що вирази (III) і $B_1\,\ldots,\,B_l$ залежні над Γ_φ. Хай $d_1^{i_1(1)}\ldots d_n^{i_n(1)} A_\varphi$ містить похідну $d_1^{i_1}\ldots d_n^{i_n}\varphi_1$, наступну після всіх інших похідних φ_1, що містяться в $d_1^{i_1(t)}\ldots d_n^{i_n(t)} A_\varphi$ $(t=2\,\ldots,\,l)$; це має місце, тому що всі $d_1^{i_n(t)}\ldots d_n^{i_n(t)}$ $(t=1\,\ldots,l)$ різні. Тоді всі коефіцієнти при $U_{jj_1\ldots j_n}$ в $d_1^{i_1(t)}\ldots d_n^{i_n(t)} A_\varphi$ $(t=1\,\ldots,\,l)$, крім $a^{1\,o\ldots o}_{i_1(1)\ldots i_n(1)}(\varphi)$ не містять $d_1^{i_1}\ldots d_n^{i_n}\varphi_1$; значить, можна припускати, що не рівні нулеві в сукупності коефіцієнти залежності

$$\sum_{ii_1\ldots i_n} c_{ii_1\ldots i_n}(\varphi)\ (d_1^{i_1}\ldots d_n^{i_n} A_i - a^{1\,o\ldots o}_{ii_1\ldots i_n} U_{1\,o\ldots o}) + \sum_{t=1}^{l} e_t(\varphi) B_t = o,$$

також не містять $d_1^{i_1}\ldots d_n^{i_n}\varphi_1$. При цьому, з властивості мінімальності $B_1\ldots B_l$, $e_t(\varphi) \neq o$ $(t=1\,\ldots,\,l)$. З цієї залежності дістаємо далі:

$$\sum_{ii_1\ldots i_n} c_{ii_1\ldots i_n}(\varphi)\, d_1^{i_1}\ldots d_n^{i_n} A_i + \sum_{t=1}^{l} c_t(\varphi)\, d_1^{i_1(t)}\ldots d_n^{i_n(t)} A_\varphi =$$

$$= \Big(\sum_{ii_1\ldots i_n} c_{ii_1\ldots i_n}(\varphi)\, a^{1\,o\ldots o}_{ii_1\ldots i_n} + \sum_{t=1}^{l} e_t(\varphi)\, a^{1\,o\ldots o}_{i_1(t)\ldots i_n(t)} U_{1\,o\ldots o} =$$

$$= g_1(\varphi)\, U_{1\,o\ldots o},$$

згідно з зробленими зауваженнями $g_1(\varphi) \neq o$.

Аналогічно опреділюється $g_2(\varphi)\ldots,g_k(\varphi)$ (при заміні в приведеному доведенні φ_1, $U_{1o\ldots o}$ відповідно через φ_i $U_{io\ldots o}$. За лемою I опреділюються такі $a_1\ldots,a_k \subset \Gamma$, що $g_i(a)$ ($\subset \Gamma$) не рівні нулеві ($i=1\ldots,k$).

Тоді одержимо залежності виду

$$U_{io\ldots o}=\sum_{j=1}^{k}\beta_{ij}A_j+\beta_i A_a\,(i=1\ldots,k),\text{ де }\beta_{ij},\ \beta_i\subset\Delta(\Gamma).$$

Приймаючи $A_a=(a_1\,a_1\,d_0\,\ldots,\ a_k\,a_k\,d_0)=A$, дістають твердження леми.

На цій лемі грунтуються наступні теореми.

Теорема I. Якщо поле Γ повне, то кожний лівий (правий) ідеал з $\Delta(\Gamma)$ має базис не більше, ніж з двох елементів.

Доведення. Хай $\mathfrak{M}$ — лівий ідеал з $\Delta(\Gamma)$. За теоремою Е. Нетер цей ідеал має скінченний базис $a_1\ldots,a_k$.

Для нулевого ідеалу справедливість твердження леми очевидна. Хай $\mathfrak{M}\neq 0$ і $k>1$, тоді можна припускати $a_1\neq 0$. Тоді існують елементи β_i, γ_i ($i=2\ldots,k$) з $\Delta(\Gamma)$ такі, що $\beta_i d_1=\gamma_i d_i$ і $\gamma_i\neq 0$ ($i=2\ \ldots,k$). Строки (довжини k): $A_1=(d_0\ldots)$, $A_i=(-\beta_i\ldots,\gamma_i\ldots)$ ($i=2\ldots,k$; γ_i займає i — місце; невиписані елементи рядків рівні нулеві), очевидно, лінійно-незалежні. Згідно з лемою 2 існує рядок $A=(a_1 d_0\ \ldots,a_k d_0)$, ($a_1\ldots,\ a_k\subset\Gamma$), такий, що матриця, складена із рядків $A_1\ldots,A_k$, A являється правим дільником одиничної матриці; тоді, очевидно,

$$A_1\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_k\end{pmatrix}=a_1,\ A_i\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_k\end{pmatrix}=o\,(i=2\ldots,k),A\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_k\end{pmatrix}=a_1\,a_1+\ldots+a_k a_k$$

також утворює базис ідеалу $\mathfrak{M}$.

Цей результат, за попереднім, справедливий і для правих ідеалів. Це доводить теорему.

Для випадку одного оператору диференціювання d ($n=1$) в кільці $\Delta(\Gamma)$, як відомо, має місце алгорифм Евкліда.

Тому в $\Delta(\Gamma)$ (при довільному полі Γ) кожний ідеал являється головним.

Наступний приклад показує існування не головних ідеалів, при повному полі Γ.

Хай $n=2$ і Γ містить елементи x_1, x_2 („аргументи") з властивостями $d_i x_i=1$, $d_i x_j=o$ ($i\neq j$, i, $j=1$, 2). Як легко перевірити, ідеал $\mathfrak{M}$ з базисом d_1^2, $d_1\,d_2$, d_2^2 не являється головним. Цей ідеал має також базис $d_1^2, d_1 d_2+$ $+x_1 d_2^2$. В випадку, якщо Γ містить тільки постійні, базис

$d_1^2, d_1 d_2, d_2^2$ ідеалу $\mathfrak{M}$ не може бути скорочений (в цьому випадку $\Delta(\Gamma)$ є кільцем поліномів з аргументами d_1, d_2).

Легко бачити, що принаймні, якщо Γ містить аргументи $x_1 \ldots, x_n$ ($d_i x_i = 1$, $d_i x_j = o$ при $i \neq j$) опреділення додаткового рядка A в лемі 2 і побудова базису ідеалу довжини не більше двох, практично може бути виконане і при тому за допомогою тільки скінченної кількості алгебричних дій та диференціювань.

Теорема. 2. Якщо Γ є повним полем, то кільце $\Delta(\Gamma)$ просте (тобто не містить двосторонніх ідеалів, відмінних від нулевого та одиничного).*

Обернене твердження також справедливе.

Доведення: Хай Γ — повне поле і $\mathfrak{M}$ — двосторонній ідеал в $\Delta(\Gamma)$, відмінний від нулевого.

Хай $\alpha \subset \Delta(\Gamma)$, $\alpha \neq 0$.

За лемою 2 існує такий елемент $a \subset \Gamma$, що лівий ідеал з базисом α, $\alpha a d_0$ — одиничний; але тоді і $\mathfrak{M}$ є одиничний ідеал.

Значить, (Γ) — просте кільце.

Хай тепер Γ не повне.

Хай k — максимальне число елементів $a_1 \ldots, a_k$ з Γ таких, що

$$\begin{vmatrix} d_1 a_1 \ldots d_k a_1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ d_1 a_k \ldots d_k a_k \end{vmatrix} \neq 0,$$

(якщо Γ — поле постійних, то $k=0$) $0 \leqslant k < n$.

Тоді для кожного елементу $a \in \Gamma$

$$\begin{vmatrix} d_1 a_1 \ldots d_k a_1 \; d_{k+1} a_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ d_1 a_k \ldots d_k a_k \; d_{k+1} a_k \\ d_1 a \ldots d_k a \; a_{k+1} \; a \end{vmatrix} = 0.$$

Ліва частина породжує оператор першої степені з Γ

$$\alpha = b_1 d_1 + \ldots + b_k d_k + b d_{k+1} \quad (b \neq 0);$$

при цьому, для кожного $a \in \Gamma$, $\alpha a = 0$.

Але тоді для кожного $\beta \subset \Delta(\Gamma)$, $\alpha\beta \equiv 0 \; (mod \; d_1 \ldots, d_{k+1})$ і двосторонній ідеал, породжений α, не містить одиниці. Значить, кільце (Γ) не просте.

---

* Для випадку одного диференціювання доведене Джекобсоном [5].

ЛІТЕРАТУРА

1. E. R. Kolchin. Extensions of differential ideals. Ann. of Math., 43, 1942.
2. G. Frobenius. Über den Begrift der Irreduzibilität in der Theorie der linearen Differentialgleichungen. J. f. r. a. Math. (Crelle's J.), 76, 1873.
3. E. Noether u. W. Schmeidler. Moduln in nichtkommutativen Bereichen, insbesondere aus Differential — und Differenzenausdrücken. Math. Z., 8, 1920.
4. Я. Б. Лопатинский. Некоторые свойства линейных дифференциальных операторов. Мат. сб., 17 (59):2, 1945.
5. N. Jacobson. Structure theory of simple rings without finitness assumptions. Trans. Am. Math. Soc., 57:2, 1945.

Я. Б. ЛОПАТИНСКИЙ. О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ.

Резюме

В настоящей заметке устанавливаются две теоремы:

1. Если поле коэфициентов кольца дифференциальных операторов, при n дифференцированиях, содержит n элементов с ненулевым Якобианом, то каждый идеал кольца дифференциальных операторов порождается не более чем двумя элементами.

Это уточнение (для указанного типа колец) теоремы о конечном базисе, доказанной E. Noether в [3].

2. При том же предположении относительно поля коэфициентов, кольцо дифференциальных операторов является простым.

Это обобщение одного результата N. Jacobson'a [5].

Наукові записки Львівського Державного Університету імені Ів. Франка
Том V Серія фізико-математична, вип. 2 1947

Р. М. СУЛТАНОВ

ПРО РОЗКЛАД АБЕЛЕВИХ ГРУП БЕЗ КРУЧЕННЯ В ПРЯМУ СУМУ ЦИКЛІЧНИХ ПІДГРУП

В цій роботі дається необхідна і достатня умова для того, щоб операторна абелева група без кручення з обчисленою системою твірних розкладалася в пряму суму циклічних допустимих підгруп.

Відмитимо, що деякі критерії можливості розкладу обчислених абелевих груп без кручення даються в роботах Л. С. Понтрягіна* і R. E. Johnson'а.** Критерій, який приводиться в цій роботі, близький до критерія R. E. Johnson'а; однак, нам здається, що введення поняття висоти підгрупи (відсутнє у Johnson'а) дає більш ясну характеристику структури групи, що розкладається в пряму суму.

Хай G — абелева група з областю (лівих) операторів K, де K — комутативне кільце головних ідеалів без дільників нуля з одиницею. Відомо, що кожна абелева група з таким кільцем операторів і зі скінченною кількістю твірних розкладається в пряму суму циклічних підгруп***. Ми тут обмежимося розглядом операторних абелевих груп без кручення, тобто таких груп, що з рівності $\alpha a = o$ ($\alpha \subset K$, $a \subset G$) випливає, що або $\alpha = o$ або $a = o$, не роблячи поки що обмежень відносно потужності множини твірних групи.

При зроблених припущеннях для довільних двох елементів α, $\beta \subset K$ існує спільний найбільший дільник $\delta = (\alpha, \beta) \subset K$ з властивістю: $\alpha = \alpha_1 \delta$, $\beta = \beta_1 \delta$, $\delta = \lambda\alpha + \mu\beta = \lambda\alpha_1 \delta + \mu\beta_1 \delta$, $1 = \lambda\alpha_1 + \mu\beta_1$. Якщо $\delta = 1$, то α і β звуться взаємнопростими. Елемент $\alpha \neq o$ з K зветься простим якщо він дозволяє лише „тривіальний розклад“ $\alpha = \alpha \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon^{-1}$, де ε — дільник одиниці. Далі, в кільці K виконується єдність розкладу кожного елементу (не рівного нулеві) на

---

* Понтрягін Л. С. — The theory of topological commutative groups, Ann. of Math. 35 (1934), 351—388.

** Johnson R. E. — On structures of infinite modules, Trans. Amer. Math. Soc., 53 (1943), 469—489.

*** Див. Ван-дер-Варден — Современная алгебра ч. II (1937). 24.

прості множники з точністю до дільника одиниці; кількість таких простих множників в розкладі елементу $\alpha \subset K$ будемо звати довжиною його розкладу і позначати символом l_α.

Хай F є допустима підгрупа групи G і a — елемент з G. Множина таких операторів $\alpha \subset K$, що $\alpha a \subset F$, творять ідеал, який за припущенням має бути головним; хай α_a буде його базисом; тоді α_a буде мати найменшу довжину розкладу l_{α_a} на прості множники серед усіх елементів цього ідеалу. Примушуючи (при даній підгрупі F) елемент a пробігати всю групу G, утворюємо множину всіх відповідних елементів $\alpha_a \subset K$. Верхню межу довжин розкладу l_{α_a} всіх таких α_a на прості множники назвемо висотою підгрупи F; висоту підгрупи F будемо позначати символом $h(F)$. Якщо $h(F)$ — скінченна, то F будемо звати допустимою підгрупою скінченної висоти. Дамо ще одне опредІлення, також необхідне для дальнішого.

Допустима група F зветься сервантною в G, якщо з того, що рівняння $\alpha a = b$ (де $a \subset G$, b — фіксований елемент підгрупи F, $\underset{\alpha \neq o}{\alpha \subset K}$) має розв'язок, випливає $\alpha a_1 = b$, де $a^1 \subset F$ (в цьому випадку групи без кручення; це означає, що $a \subset F$)

Доведемо наступні леми.

Лема 1. Кожна допустима циклічна підгрупа $\{a_1\}$ скінченної висоти операторної абелевої групи G без кручення міститься в деякій сервантній циклічній допустимій підгрупі, причому остання визначається однозначно даною підгрупою $\{a_1\}$.

Доведення. Хай $h(\{a_1\}) = l_\varkappa$, тоді рівняння $\varkappa a = \varkappa_1 a_1$ має розв'язок $[(\varkappa, \varkappa_1) = 1,\ a \subset G]$.

Це рівняння можна привести до виду:

$$\varkappa a^* = a_1, \tag{1}$$

де $a^* \subset G$.

Дійсно, існують оператори α і β такі, що $\alpha\varkappa + \beta\varkappa_1 = 1$ тоді $\beta\varkappa a = (1 - \alpha\varkappa) a_1$, звідки дістаємо рівняння (1), якщо покласти $a^* = \beta a + \alpha a_1$.

Ясно, що $\{a_1\} \subset \{a^*\}$. Покажемо, що допустима підгрупа $\{a^*\}$ сервантна в G. Розглянемо рівняння

$$\lambda b = \mu a^*, \tag{2}$$

де $b \subset G$, $\lambda, \mu \subset K$.

Можна вважати $(\lambda, \mu) = 1$. Хай $\lambda\gamma + \mu\delta = 1$; тоді $\lambda b^* = a^*$, де $b^* = \delta b + \gamma a^*$. Значить $\lambda\varkappa b^* = a_1$. Легко бачити, що $\lambda\varkappa$ по винно бути базисом того ідеалу α з K, для якого $\mathfrak{A}; b^* \subseteq \{a_1\}$. З властивості максимальності $\varkappa(h\{a_1\} = l_x)$ виникає, що λ повинно бути дільником одиниці. Але тоді з (2) виникає $b = \lambda^{-1}\mu a^* \subset \{a^*\}$, що доводить сервантність допустимої підгрупи $\{a\}$.

Єдиність $\{a^*\}$ очевидна.

Лема 2. Якщо в операторній абелевій групі без кручення з кільцем операторів K дані сервантна допустима підгрупа G_n зі скінченною кількістю n твірних та елемент $b \sqsubset G_n$, і якщо допустима підгрупа $H = \{G_n, b\}$ має скінченну висоту, то в G існує сервантна допустима підгрупа G_{n+1}, з кількістю твірних $n+1$, яка містить підгрупу G_n і цей елемент b; при цьому G_n являється прямим додатком G_{n+1}.

Доведення. Хай $a_1 \ldots, a_n$ лінійно-незалежна над K система твірних G_n. Розглянемо рівняння

$$\sum_{i=1}^{n} \varkappa_i a_i + \alpha b = \varkappa c, \tag{3}$$

де $\varkappa_1 \ldots, \varkappa_n, \alpha, \varkappa \subset K$, $l_x = h(H)$, $b \sqsubset G_n$ і $(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n, \alpha, \varkappa) = 1$.

По-перше, очевидно $(\alpha, \varkappa) = 1$.

Тоді рівняння (3) приводиться до вигляду

$$\sum_{i=1}^{n} \varkappa_i a_i + b = \varkappa c^*, \tag{4}$$

де $c^* \sqsubset H$, $h(H) = l_x$.

Дійсно, існують оператори $\lambda, \mu \subset K$, такі що $\lambda\alpha + \mu\varkappa = 1$. Приймаючи до уваги останнє з (3), одержуємо

$$\lambda \sum_{i=1}^{n} \varkappa_i a_i + (1 - \mu\varkappa) b = \lambda\varkappa c,$$

а це рівняння приводиться до (4), якщо покласти $\lambda c + \mu b = c^*$. Доведемо тепер сервантність допустимої підгрупи $\{G_n, c^*\} = G_{\varkappa c}$. Розглянемо рівняння:

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i a_i + \varphi c^* = \psi d, \tag{5}$$

де $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varphi, \psi \subset K$, $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varphi, \psi) = 1$ і, значить, згідно з попереднім $(\varphi, \psi) = 1$.

Хай $\lambda\varphi + \mu\varphi = 1$ і $\lambda\alpha + \mu c^* = d^*$, тоді з (5)

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda\varphi_i a_i + c^* = \psi d^*,$$

звідки за допомогою (4):

$$\sum_{i=1}^{n} (\varkappa\lambda\varphi_i + \varkappa_i)\ a_i + b = \varkappa\Psi\, d^*. \qquad (6)$$

Покажемо тепер, що $\varkappa\Psi$ є базисом ідеалу $\mathfrak{A}$, який складається зі всіх тих елементів $\varkappa \subset K$, для яких $\varkappa d^* \supset H$. Дійсно, хай b є базисом цього ідеалу, тоді $\varkappa\Psi = \varepsilon\delta$ і $\delta d^* = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i a_i + \gamma b$, тоді $(1-\varepsilon\gamma)\, b = \sum_{i=1}^{n} (\varepsilon\gamma_i - x\lambda\varphi_i - \varkappa_i)\ a_i \subset G_n$; тому що G_n сервантна і $b \subset G_n$, то $1 - \varepsilon\gamma = 0$, значить, разом з δ і $\varkappa\Psi$ є базисом ідеалу $\mathfrak{A}$. За властивістю максимальності $\varkappa$ з (6) випливає, що Ψ є дільником одиниці i, значить, з (5) виникає, що $d \subset \{G_n,\ c^*\} = G_{n+1}$.

Очевидно, $G_{n+1} = G_n + \{c^*\}$. Цим лема 2 доведена повністю.

Лема 3. Операторна абелева група G без кручення з обчисленою системою твірних, у якої кожна допустима підгрупа зі скінченною кількістю твірних має скінченну висоту і зростаючу обчислену послідовність сервантних допустимих підгруп зі скінченною кількістю твірних, з'єднання яких зливається з самою групою G.

Доведення. Добре упорядкувавши систему твірних групи G за типом натурального ряду, дістаємо:

$$a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n, \ldots \qquad (7)$$

1-й крок. Візьмемо елемент a_1 з ряду (7). За лемою 1 існує сервантна циклічна допустима підгрупа $G_1 = \{a_1\}$, яка містить a_1. 2-й крок. Хай тепер для довільного натурального числа n вже сконструйована сервантна підгрупа G_n, яка містить всі елементи $a_1, \ldots, a_m$ ряду (7) і існує в ряді (7) елемент a_k $(k > m)$, який не міститься в G_n. Тоді існує, за лемою 2, сервантна підгрупа G_{n+1}, яка містить підгрупу G_n і цей елемент a_k.

Продовжуючи цей процес, ми побудуємо зростаючу послідовність

$$G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G_n \subset \ldots$$

сервантних допустимих підгруп, з'єднання G' яких містить всі елементи послідовності (7). Дійсно, якщо б існував елемент a_s, який не міститься в G', то ми продовжували б цей процес. Очевидно, щоб охопити всі елементи послідовності (7), треба зробити не більш кроків, ніж потужність послідовності (7), тобто обчислену кількість кроків.

Таким чином це з'єднання G' містить всі елементи системи твірних даної групи G, тим самим містить і саму групу G. Очевидно, $G' \subseteq G$ і лема повністю доведена.

Теорема. Для того, щоб операторна абелева група G без кручення з обчисленою системою твірних і областю операторів K розкладалася в пряму суму циклічних допустимих підгруп, необхідно і досить, щоб кожна допустима її підгрупа зі скінченною кількістю твірних мала скінченну висоту.

1. Необхідність. Хай група G розкладається в пряму суму циклічних допустимих підгруп, тобто $G = \sum_{i=1}^{\infty} \{g_i\}$. Розглянемо довільну допустиму підгрупу $F \subset G$ зі скінченною кількістю твірних, лінійно-незалежних від K, наприклад $a_1, \ldots, a_n$. Хай $g \subset F$ є довільний елемент з G, для якого $\varkappa g \subset F$, причому $l_\varkappa$ мінімально для g.

Хай

$$\varkappa g = \sum_{j=1}^{n} \varkappa_j \ a_j \tag{8}$$

де, очевидно,

$$(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n, \varkappa) = 1. \tag{9}$$

Покладемо

$$g = \sum_{t=1}^{m} \alpha_t \ g_{n_t} \quad \text{і} \quad a_j = \sum_{t=1}^{m} \beta_{jt} \ g_{n_t} \tag{10}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, n).$$

Тому що $a_1, \ldots, a_n$ лінійно-незалежні, ранг матриці $\| \beta_{jt} \|$ дорівнює $n \leqslant m$.

З співвідношень (8) та (10) не важко одержати систему рівнянь:

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_{jt} \varkappa_j = \varkappa \alpha_t \qquad (t = 1, 2, \ldots, m).$$

Розв'язуючи цю систему, одержуємо:

$$\varkappa_j \cdot D = \varkappa D_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{11}$$

де $\quad D = |\beta_{jt}| \neq 0, \quad D_j = \begin{vmatrix} \beta_{11} \ldots \beta_{1,j-1} & \alpha_1 & \beta_{1,j+1} \ldots \beta_{1n} \\ \vdots \qquad \vdots & \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ \beta_{n1}, \quad \beta_{n,j-1} & \alpha_n & \beta_{n,j+1} \qquad \beta_{nn} \end{vmatrix}$

(зі спрощенням нумерації).

Хай $\varkappa = \bar{\varkappa}\mu, \quad D = \bar{D}\mu,$ де $(\bar{\varkappa}, \bar{D}) = 1$.

Тоді з (11) виникає $x_j^1 \bar{D} = \bar{\varkappa} D_j \qquad (j = 1, 2, \ldots n)$.

Приймаючи до уваги (9), з останнього одержуємо $\bar{\varkappa} = 1$.

Значить, $\varkappa$ є дільником постійного елементу $D \subset K$.

Тому кількість простих множників $\varkappa$ менша кількост простих множників постійного D.

Отже, для довільного елементу $g \subset F$, де $xg \subseteq F$ (причому зі всіх елементів з такою властивістю має мінімальну довжину розкладу l_x на прості множники), довжина розкладу l_x елементу x обмежена, значить, висота $h(F)$ допустимої підгрупи F скінченна, що й треба було довести.

Достатність. За лемою 3, з'єднання зростаючої послідовності сервантних допустимих підгруп $G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G_n \subset \ldots$ співпадає з групою G. Це з'єднання являється прямою сумою всіх циклічних допустимих підгруп $\{g_n\}$, які, з'єднуючись з сервантними допустимими підгрупами G_{n-1}, давали підгрупу G_n.

Дійсно, за лемою 3 має місце

$$\left\{ \{g_1\}, \ldots, \{g_{n-1}\} \right\} \cap \{g_n\} = G_{n-1} \cap \{g_n\} = 0 \qquad (n = 1, 2 \ldots).$$

Таким чином, група G співпадає з прямою сумою цих циклічних допустимих підгруп, тобто $\sum_{i=1}^{\infty} \{g_i\}$, що і було до доведення.

Зробимо в кінці ще кілька зауважень. Очевидно що скінченність висоти допустимої підгрупи F еквівалентна умові, щоб всі елементи фактор-групи G/F, які мають скінченний (операторний) порядок*, мали б порядки з обмеженою в сукупності довжиною розкладу на прості множники. Лема 3 дозволяє твердити більше для випадку груп, що можуть розкладатися в пряму суму циклічних підгруп. Саме в цьому випадку для допустимої підгрупи F зі скінченною кількістю твірних можна твердити, що (операторні) порядки всіх елементів фактор-групи G/F, які мають скінченний порядок, являються дільниками фіксованого елементу з K.

Відмітимо ще, що для розглядуваних груп не може мати місця теорема, яка була б повним аналогом відомої теореми Прюфера** для обчислених примірних груп. Нижче приводиться приклад, який показує, що вимога скінченності висоти всіх елементів абелевої групи без кручення (з обчисленою системою твірних) не є достатньою для того, щоб ці групи могли розкладатися в пряму систему циклічних підгруп.

Дійсно, розглянемо сукупність всіх елементів виду (α, β), де α і β — раціональні числа.

* Операторним порядком елементу a з G (визначеним з точністю до дільників одиниці) буде зватися базис ідеалу з К, що анулює a.

** Див. напр. А. П. Курош — „Теория групп", 1944, 227.

Ця сукупність утворює групу, якщо операції визначені слідуючим чином:

$$(\alpha, \beta) + (\gamma, \delta) = (\alpha + \gamma, \beta + \delta)$$

$$\lambda(\alpha, \beta) = (\lambda\alpha, \lambda\beta), \qquad (\lambda \text{ — ціле число}).$$

До вказаних груп належить група (другого рангу) з обчисленою системою твірних:

$$a_0 = (0; 1), \quad a_n = \left(\frac{1}{2^n}, -\frac{\sum\limits_{s=1}^{[\sqrt{n}]} 2^{s^2}}{2^n}\right) \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Очевидно, до групи G належать елементи $a_0 = (0; 1)$ і $a = 2a_0 + 2a_1 = (1; 0)$.

Тим самим група G має підгрупу G_1, яка складається зі всіх елементів виду (k, l), де k і l — цілі числа.

Висота підгрупи G_1 нескінченна, що видно з рівності

$$2^n a_n = a - \sum_{s=1}^{[\sqrt{n}]} 2^{s^2} \cdot a_0 \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Значить, за доведеною теоремою, G не може бути розкладена в пряму суму циклічних підгруп і в той же час можна довести, що всі елементи групи G мають скінченну висоту.

Р. М. СУЛТАНОВ. О РАЗЛОЖЕНИИ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП БЕЗ КРУЧЕНИЯ В ПРЯМУЮ СУММУ ЦИКЛИЧЕСКИХ ПОДГРУПП.

Резюме

Пусть g есть Абелева группа с кольцом операторов K, являющимся кольцом главных идеалов. Предположим, что группа g имеет счетный базис и, кроме того, что соотношение $\alpha a = a$ $\alpha \subset k_1$ $a \subset g$ влечет или $\alpha = 0$, или $a = 0$ (операторная группа без кручения).

Пусть N есть какая-либо допустимая подгруппа группы g, если $a \subset g$ пусть $\mathfrak{A}$ (a) означает множество всех тех элементов из К, что $\alpha \subset \mathfrak{A}$ (a) означает $\alpha a \subset N$.

Пусть, наконец, $l(\alpha)$ есть количество множителей в разложении α в произведение простых элементов. Назовем sup $\left\{\inf l(\alpha)\right\}$ высотою подгруппы N; высота циклической подгруппы $\left\{a\right\}$ будет называться также высотою элемента a.

В настоящей заметке мы доказываем для групп указанного типа следующую теорему:

Для того, чтобы группа g была разложима в прямую сумму циклических подгрупп, необходимо и достаточно, чтобы каждая допустимая подгруппа с конечным числом образующих имела конечную высоту.

Эта теорема близка к одной теореме R. E. Johnson'a, но введение понятия высоты подгруппы дает более ясную характеристику структуры разложимой группы.

В заключение мы приводим пример счетной группы, каждый элемент которой имеет конечную высоту и которая, тем не менее, не разложима в прямую сумму циклических подгрупп.

В. В. ГНЄДЕНКО

ПРО ЕЛІПСОЇДИ РОЗСІЮВАННЯ

Хай буде дана послідовність

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots \tag{1}$$

взаємно незалежних випадкових векторів в k-мірному евклідовому просторі, розподілених за одним і тим самим нормальним законом. Відомо, що щільність розподілу ймовірностей для k-мірного нормального закону має вигляд:

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_k) = ce^{-\frac{1}{2}Q(x_1, x_2, \ldots, x_k)}, \tag{2}$$

де

$$Q(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}(x_i - a_i)(x_j - a_j)$$

невід'ємна квадратична форма, c, a_{ij} і a_i — дійсні постійні.

Ми обмежимося надалі розглядом тільки невироджених розподілів, тобто таких, для яких ранг квадратичної форми Q дорівнює k. Для невироджених розподілів квадратична форма Q анулюється тільки в точці $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \ldots, x_k = a_k$. k-мірні еліпсоїди

$$\sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}(x_i - a_i)(x_j - a_j) = R^2,$$

де R є дійсна постійна, мають назву еліпсоїдів розсіювання, які для скорочення будемо позначати через $G(R)$. На поверхні еліпсоїда $G(R)$ функція $p(x_1 \ x_2, \ldots, x_k)$ зберігає постійне значення.

Ймовірність того, що кінець вектора ξ, розподіленого за законом (2), буде належати еліпсоїдові $G(R)$, дорівнює

$$P(R) = P\{\xi \subset G(R)\} = \int \underset{G(R)}{\ldots} \int p(x_1, x_2, \ldots, x_k)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_k.$$

Для обчислення цього інтегралу введемо сферичні координати

$$\left.\begin{aligned} x_1-a_1&=r\cos\varphi_1\cos\varphi_2\ldots\cos\varphi_{k-1}\\ x_2-a_2&=r\cos\varphi_1\cos\varphi_2\ldots\sin\varphi_{k-1}\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_i-a_i&=r\cos\varphi_1\cos\varphi_2\ldots\sin\varphi_{k-i+1}\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_k-a_k&=r\sin\varphi_1.\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Маємо

$$P(R)=c\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\ldots\int_0^{2\pi}\int_0^{z}e^{-\frac{1}{2}r^2s}\left|\frac{d(x_1\ldots x_k)}{d(r\varphi_1\ldots\varphi_{k-1})}\right|dr\,d\varphi_1\ldots d\varphi_{k-1},$$

де позначено

$$s=\sum_{i,j=1}^{k}a_{ij}\,\frac{x_i-a_i}{r}\cdot\frac{x_j-a_j}{r}$$

і

$$z=\frac{R}{\sqrt{s}}.$$

Легко підрахувати, що

$$\left|\frac{d(x_1\,x_2,\ldots,x_k)}{d(r,\varphi_1,\ldots,\varphi_{k-1})}\right|=r^{k-1}I,$$

де величина I не залежить від r і дорівнює значенню якобіана перетворення (3) при $r=1$.

Заміною

$$t=r\sqrt{s}$$

зводимо $P(R)$ до виду

$$P(R)=A\int_0^{R}e^{-\frac{1}{2}t^2}\,t^{k-1}\,dt, \qquad (4)$$

де

$$A=c\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\ldots\int_0^{2\pi}s^{-\frac{1}{2}k}\,I\,d\varphi_1\ldots d\varphi_{k-1}. \qquad (5)$$

Для обчислення постійної A немає потреби вираховувати інтеграл (5), тому що її значення визначається з умови $P(+\infty)=1$.

Маємо

$$A = \frac{1}{\int_0^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, t^{k-1}\, dt} = \frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^{k-2} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}. \tag{6}$$

Ця стаття присвячена доведенню слідуючого:

Теорема. Існує така послідовність постійних R_n, для якої при $n \to \infty$ мають місце такі співвідношення:

1. Ймовірність того, що вектори $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ приймуть значення, які знаходяться в середині еліпсоїда $G(R_n + \varepsilon)$, прямує до 1 при довільному $\varepsilon > 0$.

2. Ймовірність того, що значення принаймні одного вектора $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ вийде з еліпсоїду $G(R_n - \varepsilon)$ прямує до 1 при довільному $\varepsilon > 0$.

3. Ймовірність того, що значення принаймні одного вектора $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ вийде з еліпсоїду $G(R_n - \varepsilon)$ через сектор $(\varphi_1, \varphi_1 + \Theta_1; \varphi_2, \varphi_2 + \Theta_2; \ldots; \varphi_k, \varphi_k + \Theta_k)$ при довільних $\Theta_1 > 0$, $\Theta_2 > 0 \ldots \Theta_k > 0$ і $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$, і при довільному $\varepsilon > 0$, прямує до одиниці.

4. $R_n = \sqrt{2 lg n}$.

Доведення. З рівності

$$\int_R^{\infty} t^{k-1} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt = R^{k-2} e^{-\frac{1}{2}R^2} + (k-2) \int_R^{\infty} t^{k-3} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

заключаємо, що при $R \to \infty$ має місце співвідношення

$$1 - P(R) = A \int_R^{\infty} t^{k-1} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = A R^{k-2} e^{-\frac{1}{2}R^2} (1 + o(1)). \tag{7}$$

За теоремою множення ймовірність того, що в середину еліпсоїда $G(R_n + \tau)$ попадуть значення всіх векторів, $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ дорівнює

$$P^n(R_n + \tau) = \left[1 - A(R_n + \tau)^{k-2} e^{-\frac{1}{2}(R_n + \tau)^2} (1 + o(1))\right]^n =$$
$$= \left[1 - \frac{a(n)}{n}\right]^n, \tag{8}$$

де (при $R_n = \sqrt{2 lg n}$)

$$lg\, a(n) = -\sqrt{2 lg n}\left(\frac{\tau}{2} - (-k-2) \frac{lg \sqrt{2 lg n}}{\sqrt{2 lg n}} + lg A (1 + o(1))\right).$$

Звідси виводимо, що при довільному $\tau=\varepsilon>0$

$$\lim_{n\to\infty} lg\,\alpha(n)=-\infty$$

і при $\tau=-\varepsilon<0$

$$\lim_{n\to\infty} lg\,\alpha(n)=+\infty .$$

З (8) ми, таким чином, знаходимо, що при довільному $\varepsilon>0$

$$\lim_{n\to\infty} P^n(R_n+\varepsilon)=1$$

і

$$\lim_{n\to\infty} P^n(R_n-\varepsilon)=0.$$

Ці співвідношення, очевидно, завершують доведення двох перших частин теореми.

Позначимо через σ_n частину сектора $(\varphi_1, \varphi_1+\Theta_1; \ldots \varphi_{k-1}, \varphi_{k-1}+\Theta_{k-1})$, зовнішню до еліпсоїду $G(R_n-\varepsilon)$. Ймовірність вектора ξ прийняти значення, що знаходиться в σ_n, дорівнює

$$P(\sigma_n)=\int\ldots\int_{\sigma n} p(x_1\ldots x_k)\,dx_1\ldots dx_k=$$

$$=\int_{\varphi_{k-1}}^{\varphi_{k-1}+\theta_{k-1}}\ldots\int_{\varphi_1}^{\varphi_1+\theta_1}\int_{\frac{R_n-\varepsilon}{\sqrt{s}}}^{\infty} ce^{-\frac{1}{2}r^2 s}r^{k-1}\,Idrd\varphi_1\ \ldots\ d\varphi_{k-1}=$$

$$=B\int_{R_n-\varepsilon}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,t^{k-1}dt, \qquad (9)$$

де величина

$$B=c\int_{\varphi_{k-1}}^{\varphi_{k-1}+\theta_{k-1}}\ldots\int_{\varphi_1}^{\varphi_1+\theta_1} s^{-\frac{1}{2}k}\,Id\varphi_1\ldots d\varphi_{k-1}$$

не залежить від R_n та ε. Тому що $P(\sigma_n)>0$, якщо тільки $\prod_{i=1}^{k-1}\Theta_i>0$, то також $B>0$.

Ймовірність того, що в σ_n не попаде жодне значення векторів $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, дорівнює

$$(1-P(\sigma_n))^n.$$

Згідно (9) і (7) знаходимо, що

$$(1-P(\sigma_n))^n=\left[1-\frac{1}{n}\,\beta(n)\right]^n,$$

де

$$lg\beta(n) = \sqrt{2\,lgn}\left(\frac{\varepsilon}{2} + (k-2)\frac{lg\sqrt{2\,lgn}}{\sqrt{2\,lgn}}\right) + lg\,B(1 + o\ (1)).$$

Поскільки $lg\,\beta_n \to \infty$ при $n \to \infty$, то

$$\lim_{n\to\infty} (1 - P(\sigma_n))^n = 0,$$

що й треба було довести.

Б. В. ГНЕДЕНКО. ОБ ЭЛЛИПСОИДАХ РАССЕИВАНИЯ

Резюме

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ взаимно независимые случайные векторы в k-мерном пространстве, распределенные по одному и тому же невырожденному нормальному закону с плотностью распределения (2).

Обозначим через $G(R)$ гиперэллипсоид

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\,(x_i - a_i)\,(x_j - a_j) = R^2.$$

В статье доказана следующая теорема.

Теорема. Существует такая последовательность постоянных R_n, для которой при $n \to \infty$ имеют место следующие соотношения:

1) вероятность того, что все векторы $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ примут значения, находящиеся внутри эллипсоида $G(R_n + \varepsilon)$, стремится к 1 при любом ε;

2) вероятность того, что значение хотя бы одного вектора $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ окажется вне эллипсоида, $G(R_n - \varepsilon)$, стремится к 1 при любом $\varepsilon > 0$;

3) вероятность того, что значение хотя бы одного вектора $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ выйдет из эллипсоида $G(R_n - \varepsilon)$ через сектор $(\varphi_1, \varphi_1 + \theta_1; \varphi_2, \varphi_2 + \theta_2; \ldots; \varphi_k, \varphi_k + \theta_k)$ при любых $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ и $\theta_1 > 0, \theta_2 > 0, \ldots, \theta_k > 0$ и $\varepsilon > 0$, стремится к 1;

4) $R_n = \sqrt{2\,lgn}$.

Наукові записки Львівського Державного Університету імені Ів. Франка
Том V Серія фізико-математична, вип. 2 1947

Б. В. ГНЄДЕНКО

ПРО ФУНКЦІЇ ВІД ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

1. ВСТУП. Ця стаття має переважно методичний інтерес і виникла в зв'язку з тим, що мені доводилось неодноразово за проханням інженерів та фізиків розв'язувати задачі, які в своїй математичній частині зводилися до відповіді на слідуюче питання: дані випадкові величини $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ та їх функція розподілу $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$; треба знайти функцію розподілу $\Phi(z)$ випадкової величини

$$\zeta = f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n),$$

де f — визначена функція.

Велика кількість окремих випадків цієї загальної задачі вирішена, і кожному спеціалістові в галузі теорії ймовірностей або математичної статистики відоме загальне її рішення. Формально записати це рішення дуже легко, а саме: $\Phi(z)$ рівняється n-кратному інтегралові

$$\Phi(z) = \int \underset{D(z)}{\cdots} \int d_n F(x_1, \ldots, x_n), \tag{1}$$

розповсюдженому на область $D(z)$, яка визначається нерівністю

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) < z.$$

В підручниках з теорії ймовірностей і відповідних монографіях це загальне рішення не приводиться, а звичайно викладається тільки в застосуванні до визначення функції розподілу суми двох незалежних випадкових величин. Ця обставина приводить до того, що нескладні задачі викликають непоборні труднощі навіть у осіб, знайомих з сучасними посібниками з теорії ймовірностей.

В цій статті я застосовую формулу (1) до рішення двох задач: одної, що виникла в зв'язку з рішенням гідрологічного питання про розподіл розміру *весняного паводку*, і другої, пов'язаної з рішенням задачі теорії помилок механізмів, що виникають від невірної *обточки* торців деталей механізмів.

Викладені задачі можуть бути використані як змістовні приклади при читанні курсу теорії ймовірностей.

2. ФУНКЦІЯ РОЗПОДІЛУ ЧАСТКИ. Хай $F(x, y)$—функція розподілу пари випадкових величин ξ і η.

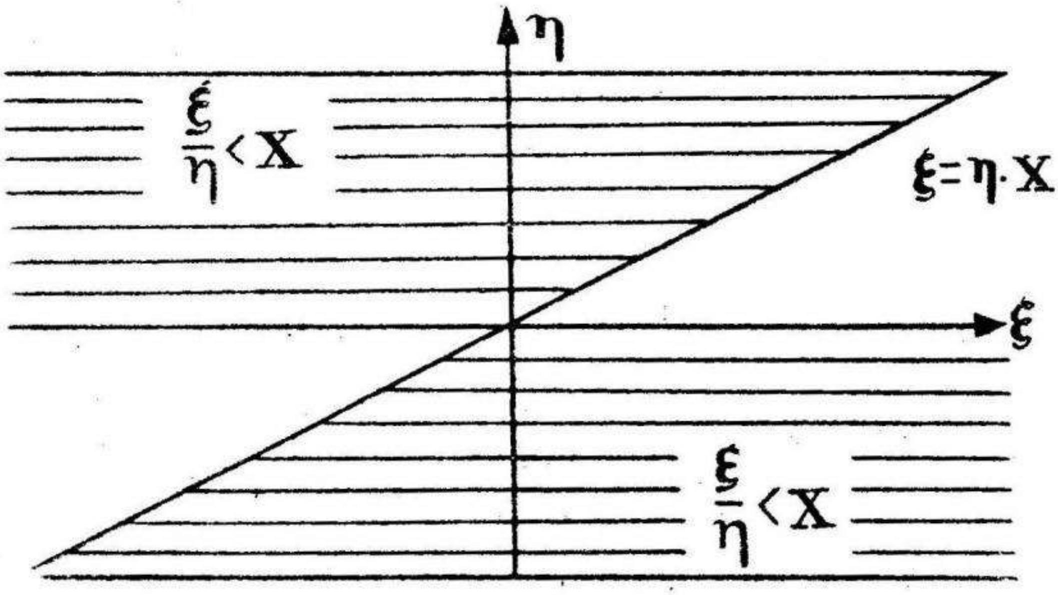


Рис. 1.

При припущенні, що $P\{\eta=0\}=0$, знайдемо функцію розподілу $\Phi(z)$ величини $\zeta=\frac{\xi}{\eta}$.

Область $D(z)$, в якій $\zeta<z$, на рис. 1 заштрихована (на рисунку зображений випадок $x>0$).

Згідно з загальною формулою (1)

$$\Phi(z)=\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{zy} d_2 F(xy)+\int_{-\infty}^{0}\int_{zy}^{\infty} d_2 F(xy). \qquad (2)$$

Зокрема, якщо величини ξ і η незалежні, то

$$F(x, y)=F_1(x)\cdot F_2(y),$$

де $F_1(x)$ і $F_2(y)$ — функції розподілу величин ξ і η.

В цьому випадку з формули (2) знаходимо, що

$$\Phi(z)=\int_0^{\infty} F_1(zy)\,dF_2(y)+\int_{-\infty}^{0}(1-F_1(zy))\,dF_2(y).$$

Якщо випадкові величини ξ і η такі, що існує щільність розподілу ймовірностей $p(x, y)$, то для величини ζ також існує щільність розподілу $p(z)$.

Згідно з формулою (2)

$$p(z)=\int_0^{\infty} yp(zy,y)\,dy-\int_{-\infty}^{0} yp(zy,y)\,dy. \tag{3}$$

Зокрема для незалежних випадкових величин ξ і η ця формула приймає вигляд:

$$p(z)=\int_0^{\infty} yp_1(yz)\,p_2(y)\,dy-\int_{-\infty}^{0} yp_1(yz)\,p_2(y)\,dy.$$

8. ПРИКЛАД. Розглянемо важливий приклад.

Нехай випадкові величини ξ і η нормально розподілені. Тоді:

$$p(x,y)=\frac{1}{2\pi\,\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\,exp-\frac{1}{2(1-r^2)}\left\{\frac{(x-a)^2}{\sigma_1{}^2}-\right.$$
$$\left.-2r\,\frac{(x-a)\,(y-b)}{\sigma_1\,\sigma_2}+\frac{(y-b)^2}{\sigma_2{}^2}\right\}.$$

Нескладні обчислення за формулою (3) показують, що щільність розподілу випадкової величини $\zeta=\frac{\xi}{\eta}$ дається формулою

$$p(z)=\frac{c}{\alpha^2}\left\{1+\beta\,\Phi(\beta)\,e^{\frac{\beta^2}{2}}\right\}, \tag{4}$$

де позначене

$$\alpha^2=\sigma_1{}^2-2r\,\sigma_1\sigma_2\,z+\sigma_2{}^2z^2,$$

$$\beta=\frac{1}{\alpha\sqrt{1-r^2}}\left[\left(a\,\frac{\sigma_2}{\sigma_1}-rb\right)z-\left(ra-b\,\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)\right],$$

$$c=\frac{\sigma_1\,\sigma_2\sqrt{1-r^2}}{\pi}\,exp-\frac{1}{z(1-r^2)}\left(\frac{a^2}{\sigma_1{}^2}-2r\,\frac{ab}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{b^2}{\sigma_2{}^2}\right),$$

$$\Phi(\beta)=\int_0^{\beta}e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz.$$

Якщо $a=b=0$, то формула (4) приймає форму:

$$p(z)=\frac{\sigma_1\,\sigma_2\sqrt{1-r^2}}{\pi\,(\sigma_1{}^2-2r\,\sigma_1\sigma_2 z+\sigma_2{}^2z^2)}. \tag{4¹}$$

Цей результат словами може бути сформульований так: частка від ділення двох нормально розподілених випадкових величин ξ і η, для яких математичні сподівання рівні нулеві ($E\xi = E\eta = 0$), являє собою випадкову величину, розподілену за законом Коші.

Зазначимо, що в загальному випадку при $a^2 + b^2 \neq 0$ порядок спадання $p(x)$ при $x \to \pm\infty$ буде таким, як і для закона Коші.

4. ФУНКЦІЯ РОЗПОДІЛУ ВІДДАЛІ ТОЧКИ ВІД ПОЧАТКУ КООРДИНАТ В КОСОКУТНИХ КООРДИНАТАХ. Хай ξ і η — випадкові величини, розподілені за законом $F(x, y)$, і α — постійна величина (без обмеження загальності можна в дальшому вважати, що $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$). Треба знайти функцію розподілу $\Phi(z)$ випадкової величини

$$\zeta = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 - 2\xi\eta \cos \alpha}.$$

Згідно з (1)

$$\Phi(z) = \iint\limits_{D(z)} d_2 F(x, y),$$

де $D(z)$ (2) — внутрішня частина еліпсу

$$x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha = z^2.$$

Таким чином,

$$\Phi(z) = \int\limits_{-\frac{z}{\sin\alpha}}^{\frac{z}{\sin\alpha}} \int\limits_{x\cos\alpha - \sqrt{z^2 - x^2\sin^2\alpha}}^{x\cos\alpha + \sqrt{z^2 - x^2\sin^2\alpha}} d_2 F(x, y) \quad . \tag{5}$$

Якщо випадкові величини ξ і η мають щільність розподілу $p(x, y)$, то ζ також має щільність розподілу $p(z)$, яка визначається формулою

$$p(z) = \int\limits_{-\frac{z}{\sin\alpha}}^{\frac{z}{\sin\alpha}} \Big[p(x, x\cos\alpha + \sqrt{z^2 - x^2\sin^2\alpha}) + p(x, x\cos\alpha - \\ - \sqrt{z^2 - x^2\sin^2\alpha}) \Big] \frac{z dx}{\sqrt{z^2 - x^2\sin^2\alpha}} . \tag{5}$$

5. ЕЛІПСИ РОЗСІВАННЯ. Хай величини ξ і η розподілені за нормальним законом

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1 - r^2}} exp - \frac{1}{2(1 - r^2)} \left[\frac{(x - a)^2}{\sigma_1{}^2} - \right. \\ \left. - 2r \frac{(x - a)(y - b)}{\sigma_1 \sigma_2} + \frac{(y - b)^2}{\sigma_2{}^2} \right].$$

Треба знайти функцію розподілу випадкової величини ζ:

$$\zeta^2 = \frac{1}{1-r^2}\left[\frac{(\xi-a)^2}{\sigma_1{}^2} - 2r\frac{(\xi-a)(\eta-b)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(\eta-b)^2}{\sigma_2{}^2}\right]$$

Якщо покласти

$$\xi_1 = \frac{\xi-a}{\sigma_1\sqrt{1-r^2}},\quad \eta_1 = \frac{\eta-b}{\sigma_2\sqrt{1-r^2}},\quad r = \cos\alpha,$$

то приходимо до задачі $n^0 4$.

Щільність розподілу пари ξ_1, η_1 дорівнює

$$p_1(xy) = \frac{\sqrt{1-r^2}}{2\pi}\, exp - \frac{1}{2}\,[x^2 - 2rxy + y^2].$$

Легкі перетворення показують, що

$$p_1(x,\ x\cos\alpha + \sqrt{z^2 - x^2\sin^2\alpha}) = p_1(x, x\cos\alpha - \sqrt{z^2 - x^2\sin^2\alpha}) = \\ = \frac{\sqrt{1-r^2}}{2\pi}\, e^{-\frac{z^2}{2}}.$$

Таким чином, згідно (5)

$$p(z) = \int_{-\frac{z}{\sin\alpha}}^{\frac{z}{\sin\alpha}} \frac{\sqrt{1-r^2}}{\pi}\, e^{-\frac{z^2}{2}} \frac{z dx}{\sqrt{z^2 - x^2\sin^2\alpha}} = \\ = \frac{1}{\pi}\, z e^{-\frac{z^2}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\Theta = z e^{-\frac{z^2}{2}}$$

або ж

$$F(z) = \int_0^z p(z)\, dz = 1 - e^{-\frac{z^2}{2}}.$$

Одержаний результат добре відомий в теорії стрільби — $F(z)$ дорівнює ймовірності попадання в область, обмежену еліпсом

$$\frac{(x-a)^2}{\sigma_1{}^2} - 2r\frac{(x-a)\ (y-b)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-b)^2}{\sigma_2{}^2} = z^2(1-r^2),$$

де $(a,\ b)$ — центр мети, а $\frac{1}{\sigma_1}$ і $\frac{1}{\sigma_2}$ — міри точності по кожній з осей еліпсу.

6. ФУНКЦІЯ РОЗПОДІЛУ СТОРОНИ ТРИКУТНИКА. Формула (5) містить в собі рішення такої задачі: сторони ξ і η трикутника ABC — випадкові величини, α — кут при вершині; знайти функцію розподілу третьої сторони ζ. З цією задачею зустрілися при розробці теорії інструментальних помилок і допусків в частині помилок, що походять від торцового биття.

Зазначимо, що в нашій постановці задачі ξ і η повинні бути невід'ємними випадковими величинами і для них, значить,

$$F(x, y) = 0 \quad \text{при } x \leqslant 0 \quad \text{або } y \leqslant 0,$$

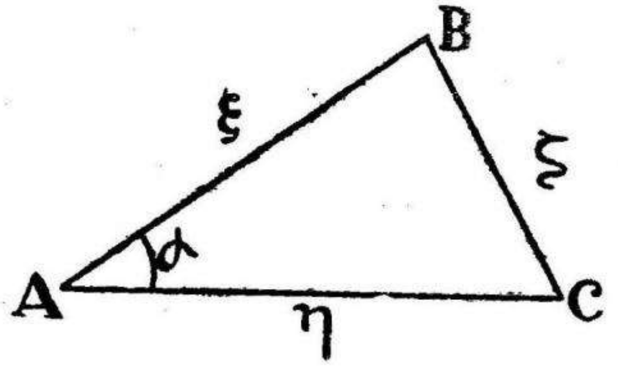


Рис. 2.

а якщо існує щільність розподілу, то

$$p(x, y) = 0 \quad \text{при } \quad x \leqslant 0 \quad \text{або } y \leqslant 0.$$

Формули для $\Phi_\alpha(z)$ — функції розподілу ζ — приймають різний вигляд в залежності від того

$$0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2} \ \text{ або } \ \frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \pi.$$

Випадок $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$. Зазначимо, що в цьому припущенні $\cos\alpha \geqslant 0$ і $x\cos\alpha - \sqrt{z^2 - x^2\sin^2\alpha} > 0$ тільки при $x > z$.

З цього в силу (5) випливає, що

$$\Phi_\alpha(z) = \int_0^z \int_0^{x\cos\alpha + \sqrt{z^2 - x^2\sin^2\alpha}} d_2 F(x, y) + \int_z^{\frac{z}{\sin\alpha}} \int_{x\cos\alpha}^{x\cos\alpha + \sqrt{z^2 - x^2\sin^2\alpha}} d_2 F(x, y). \qquad (6)$$

З (5^1) знаходимо, що

$$p_\alpha(z)=\int_0^{\frac{z}{\sin\alpha}} p(x, x\cos\alpha+\sqrt{z^2-x^2\sin^2\alpha})\frac{z\,dx}{\sqrt{z^2-x^2\sin^2\alpha}}+$$

$$+\int_z^{\frac{z}{\sin\alpha}} p(x, x\cos\alpha-\sqrt{z^2-x^2\sin^2\alpha})\frac{z\,dx}{\sqrt{z^2-x^2\sin^2\alpha}}. \qquad (6^1)$$

Випадок $\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\pi$. Тут $\cos\alpha\leqslant 0$. Величина $x\cos\alpha+\sqrt{z^2-x^2\sin^2\alpha}\geqslant 0$ тільки при $x\leqslant z$. Таким чином,

$$\Phi_\alpha(z)=\int_0^z\int_0^{x\cos\alpha+\sqrt{z^2-x^2\sin^2\alpha}} d_2F(x, y). \qquad (7)$$

З (5^1) знаходимо, що

$$p_\alpha(z)=\int_0^z p(x, x\cos\alpha+\sqrt{z^2-x^2\sin^2\alpha})\frac{z\,dx}{\sqrt{z^2-x^2\sin^2\alpha}}. \qquad (7^1)$$

В технічній задачі, про яку ми згадували вище, величина α рівномірно розподілена в інтервалі $(0, \pi)$ і не залежить від ξ і η.

Згідно з формулою повної ймовірності в цьому випадку безумовна густість розподілу ζ дається формулою

$$p(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi p_\alpha(z)\,d\alpha.$$

Нескладні перетворення приводять нас до формули

$$p(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{z}{\sin\alpha}}\Big[p(x, x\cos\alpha+\sqrt{z^2-x^2\sin^2\alpha})+$$

$$+p(x,|x\cos\alpha-\sqrt{z^2-x^2\sin^2\alpha}|)\Big]\frac{z\,dx}{\sqrt{z^2-x^2\sin^2\alpha}}\,d\alpha.$$

Б. В. ГНЕДЕНКО. О ФУНКЦИЯХ ОТ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Резюме

Автор решает несколько частных задач определения функций распределения функций от случайных величин, возникших при решении различных физических и технических вопросов.

Среди полученных результатов отметим следующий:

Если ξ и η подчинены нормальному закону распределения, то частное $\frac{\xi}{\eta}$ распределено по закону Коши.

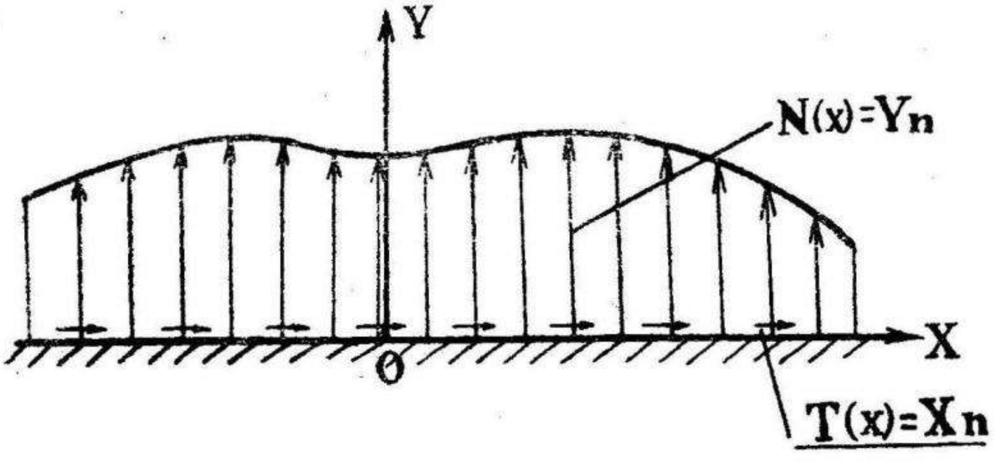
Наукові записки Львівського Державного Університету імені Ів. Франка
Том V Серія фізико-математична, вип. 2 1947

Г. М. САВІН
член-кор. АН УРСР, професор

ЗМІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ АНІЗОТРОПНОЇ ПІВПЛОЩИНИ

Припустимо, що на границі анізотропної півплощини (див. фіг. 1) прикладені зовнішні зусилля X_n, Y_n. Знайдемо картину пружного стану в цій півплощині.

Направимо вісь OX по границі півплощини, вісь OY — вгору й будемо розглядати „нижню“ півплощину, тобто ту, для якої $Y \leqslant O$.



Фіг. 1.

Розв'язання поставленої задачі було зроблено нами в [1]* й зводиться до визначення двох функцій $\varPhi(z_1)$ та $\varPsi(z_2)$ [2], які на контурі області, тобто на осі ox, мусять задовольняти умовам:

$$2\,Re[\varphi(x)+\psi(x)] = f_1 = -\int_0^s Y_n\,ds + c_1,$$

$$2\,Re[s_1\varPhi(x)+s_2\varPsi(x)] = f_2 = \int_0^s X_n\,ds + c_2, \qquad (1)$$

* Цифри в квадратових дужках показують порядковий номер цитованої літератури, список якої наведено в кінці статті.

де: 1) Re — символ дійсної частини комплексної величини, наприклад: $Re\{w\} = u$, коли $w = u + iv$,

2) $s_1 = \alpha_1 + i\beta_1$; $s_2 = \alpha_2 + i\beta_2$ — корені характеристичного рівняння:

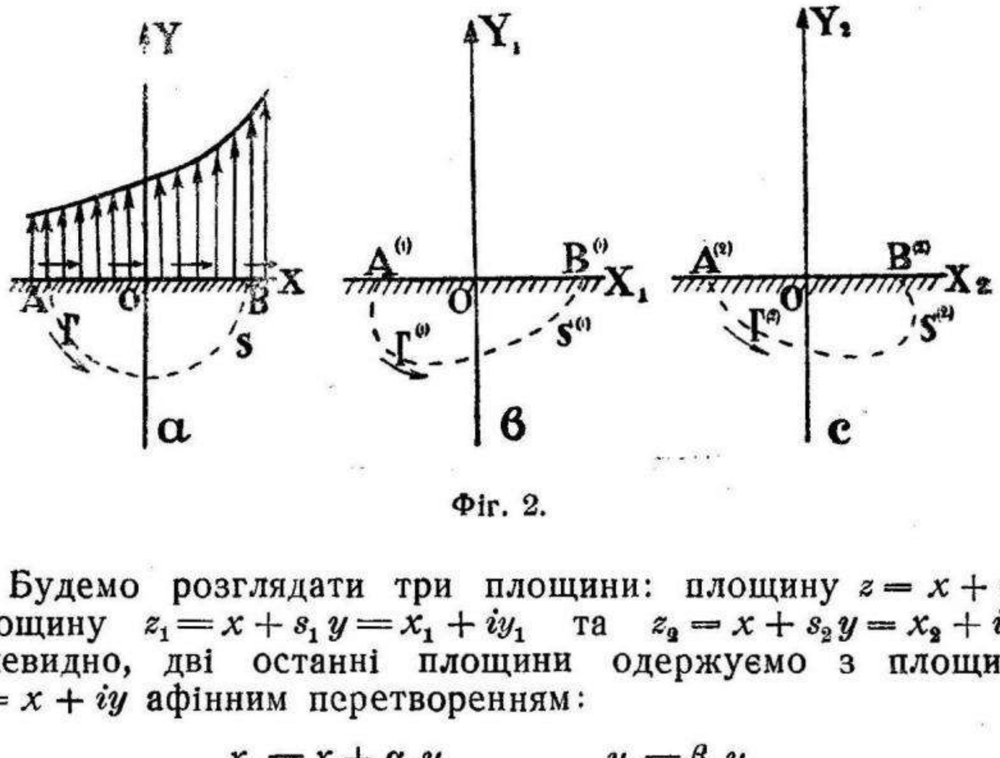
$$a_{11} s^4 - 2a_{16} s^3 + (2a_{12} + a_{66}) s^2 - 2a_{26} s + a_{22} = 0, \qquad (a)$$

в якому сталі a_{11}, a_{16}, a_{66}, a_{26} та a_{22} є пружні сталі, що входять до закону Гука, який для анізотропного середовища має вигляд:

$$\varepsilon_x = a_{11} \sigma_x + a_{12} \sigma_y + a_{16} \tau_{xy},$$
$$\varepsilon_y = a_{12} \sigma_x + a_{22} \sigma_y + a_{26} \tau_{xy},$$
$$\gamma_{xy} = a_{16} \sigma_x + a_{26} \sigma_y + a_{66} \tau_{xy}.$$

На контурі області, тобто на осі ox, $y = o$ і $z_1 = z_2 = x$. Інтеграли $\int_0^s Y_n\, ds$, $\int_0^s X_n\, ds$ беруться в напрямі так, щоб ця півплощина при обході по контуру залишалася ліворуч; звідси маємо:

$$f_1 = \int_0^x Y_n\, dx + c_1; \quad f_2 = -\int_0^x X_n\, dx + c_2. \qquad (2)$$



Фіг. 2.

Будемо розглядати три площини: площину $z = x + iy$, площину $z_1 = x + s_1 y = x_1 + iy_1$ та $z_2 = x + s_2 y = x_2 + iy_2$. Очевидно, дві останні площини одержуємо з площини $z = x + iy$ афінним перетворенням:

$$x_1 = x + \alpha_1 y, \qquad y_1 = \beta_1 y,$$
$$x_2 = x + \alpha_2 y, \qquad y_2 = \beta_2 y. \qquad (3)$$

$$z_1 = x + s_1 y = x + \alpha_1 y + i\beta_1 y = x_1 + iy_1\ ;$$
$$z_2 = x + s_2 y = x + \alpha_2 y + i\beta_2 y = x_2 + iy_2\,.$$

При цьому перетворенні (3), точки дійсної осі OX площини z переходять в точки дійсних же осей OX_1 та OX_2 площин z_1 та z_2, причому $x_1 = x_2 = x$ (див. фіг. 2) для всіх точок, що лежать на цих осях $ox = ox_1 = ox_2$.

Припустимо, що зовнішні зусилля, прикладені до границі півплощини z, або займають конечні інтервали, або ці зусилля X_n, Y_n такі, що f_1 та f_2 (2) в достатньо віддалених точках дійсної осі мають вигляд:

$$f_1(x) = c_1 + O_1\left(\frac{1}{x}\right), \qquad f_2(x) = c_2 + O_2\left(\frac{1}{x}\right), \tag{4}$$

де c_1 та c_2 — дійсні сталі.

З останньої умови (4) відносно виду X_n та Y_n безпосередньо витікає, що:

а) Напруження σ_x, σ_y та τ_{xy} в півплощині будуть йти до нуля при віддаленні на безмежність.

З формул:

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= 2\,Re\,[\,s_1^2\,\varphi'(z_1) + s_2^2\,\psi'(z_2)\,]\,,\\
\sigma_y &= 2\,Re\,[\,\varphi'(z_1) + \psi'(z_2)\,],\\
\tau_{xy} &= -2\,Re(s_1\,\varphi'(z_1) + s_2\,\psi'(z_2)\,]\,,
\end{aligned} \tag{5}$$

які дають нам можливість визначати компоненти напруг в анізотропному тілі, якщо відомі функції $\varphi'(z_1)$ та $\psi'(z_2)$, робимо висновок, що функції $\varphi'(z_1)$ та $\psi'(z_2)$ мусять мати вигляд:

$$\varphi'(z_1) = \frac{a_1}{z_1} + \frac{a_2}{z_1^2} + \frac{a_3}{z_1^3} + \ldots + \frac{a_n}{z_1^{\,n}} + \ldots$$

$$\psi'(z_2) = \frac{a'_1}{z_2} + \frac{a'_2}{z_2^2} + \frac{a'_3}{z_2^3} + \ldots + \frac{a'_n}{z_2^{\,n}} + \ldots, \tag{6}$$

де $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ та $a'_1, a'_2, a'_3, \ldots a'_n$ — комплексні сталі.

Інтегруючи (6), знаходимо:

$$\varphi(z_1) = a_1 \ln z_1 + O_1\left(\frac{1}{z_1}\right) + \mathrm{Const},$$

$$\psi(z_2) = a'_1 \ln z_2 + O_2\left(\frac{1}{z_2}\right) + \mathrm{Const}, \tag{7}$$

де через $O_1\left(\frac{1}{z_1}\right)$ та $O_2\left(\frac{1}{z_2}\right)$ позначені функції, для яких

$$\lim_{z_1 \to \infty}\left\{z_1\, O_1\left(\frac{1}{z_1}\right)\right\} = -\alpha_2$$

$$\lim_{z_2 \to \infty}\left\{z_2\, O_2\left(\frac{1}{z_2}\right)\right\} = -\alpha'_2 .$$

б) Головний вектор зовнішніх зусиль X_n, Y_n, що прикладені до інтервалу AB (див. фіг. 2) границі півплощини, прямує до певного ліміту, коли кінці його уходять на нескінченність (точка A ліворуч, B праворуч).

Це твердження є наслідком наших припущень (див. формулу 2). Знайдемо цей головний вектор. Визначимо спочатку головний вектор $X + iY = \int_{AB} (X_n + iY_n)\, ds$ через функції $\varphi(z)$ та $\psi(z)$. На контурі області компоненти напружень σ_x, σ_y та τ_{xy} мусять задовольняти умовам:

$$\sigma_x \cos(n, x) + \tau_{xy} \cos(n, y) = X_n ,$$

$$\tau_{xy} \cos(n, x) + \sigma_y \cos(n, y) = Y_n .$$

Приймаючи до уваги, що $\cos(n, x) = \frac{dy}{ds}$; $\cos(n, y) = -\frac{dx}{ds}$ й підставляючи замість $\sigma_x = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\sigma_y = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, де $u(x, y)$ — функція, що задовольняє диференціальному рівнянню (3):

$$a_{22}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - 2a_{26}\frac{\partial^4 u}{\partial^3 x^3 \partial y} + 2(a_{12} + a_{66})\frac{\partial^4 u}{\partial^2 x^2 \partial y^2} - 2a_{16}\frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y^3} + + a_{11}\frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0, \tag{9}$$

одержимо

$$X_n = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\frac{dx}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

$$Y_n = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial v}\frac{dy}{ds} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{dx}{ds} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

або

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\int_0^s Y_n\,ds + c_1\,; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \int_0^s X_n\,ds + c_2$$

Звідси маємо, що головний вектор через функцію $u(x, y)$ може бути виражений так:

$$X + i\,Y = \int_{AB} (X_n + iY_n)\,ds = -i\left\{\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y}\right\}_A^B, \tag{10}$$

де через $\left\{\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y}\right\}_A^B$ позначено приріст виразу, що стоїть в фігурних дужках при переміщенні по контуру області з точки A в точку B.

Загальний інтеграл рівняння (9) має вигляд:

$$u(x, y) = F_1(z_1) + \overline{F_1(z_1)} + F_2(z_2) + \overline{F_2(z_2)}, \tag{11}$$

де: 1) $z_1 = x + s_1 y$, $z_2 = x + s_2 y$, а $s_1 = \alpha_1 + i\beta_1$ $s_2 = \alpha_2 + i\beta_2$ (як показав С. Г. Лехницький [3]) є комплексні корені характеристичного рівняння.

2) Функція $\overline{F_1(z_1)}$ є функція спряжена до функції $F_1(z_1)$, тобто в якій знак перед i замінений з плюса на мінус.

Диференціюючи (11) перший раз по x, другий раз по y й позначаючи через

$$\varphi(z_1) = \frac{dF_1}{dz_1}, \quad \psi(z_2) = \frac{dF_2}{dz_2},$$

одержимо:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y} = (1 + is_1)\,\varphi(z_1) + (1 + i\bar{s}_2)\,\overline{\varphi(z_1)} + (1 + is_2)\,\psi(z_2) + $$
$$+ (1 + i\bar{s}_2)\,\overline{\psi(z_2)}. \tag{12}$$

Підставляючи із (12) в (10) — маємо:

$$X + i\,Y = \int_{AB} (X_n + i\,Y_n)\,ds = -i\Big[(1 + is_1)\,\varphi(z_1) + (1 + i\bar{s}_1)\,\overline{\varphi(z_1)} + $$
$$+ (1 + is_2)\,\psi(z_2) + (1 + i\bar{s}_2)\,\overline{\psi(z_2)}\Big]_A^B. \tag{13}$$

Приймаючи до уваги напрямок обходу нашої області, тобто півплощини, для головного вектора $X+iY$, матимемо вираз:

$$X+iY = i\left[(1+is_1)\,\varphi(z_1) + (1+i\bar{s}_1)\,\overline{\varphi(z_1)} + (1+is_2)\,\psi(z_2) + \right.$$
$$\left. + (1+is_2)\,\overline{\psi(z_2)}\right]_A^B . \tag{14}$$

Перехід від точки A до точки B в площині z може бути зроблений довільним шляхом, наприклад: по півколу Γ (див. фіг. 2 „а"). В площинах z_1 та z_2 будемо мати відповідно Γ шляхи $\Gamma^{(1)}$, та $\Gamma^{(2)}$ (див. фіг. 2 „в" та „с"). Але, як вище було зазначено, $OA = OA^{(1)} = OA^{(2)}$; $OB = OB^{(1)} = OB^{(2)}$; напрямок обходів по Γ, $\Gamma^{(1)}$ та $\Gamma^{(2)}$ буде один і той же (бо $\beta_1 > o$; $\beta_2 > o$).

Для функцій $\ln z_1$, та $\ln z_2$ треба вибрати якусь одну вітку цих багатозначних функцій; виберемо так, щоб:

$$\ln z_1 = \ln|z_1| + i\vartheta_1$$
$$\ln z_2 = \ln|z_2| + i\vartheta_2 ,$$

де аргументи ϑ_1 та ϑ_2 змінюються від $\vartheta_1 = \vartheta_2 = -\pi$ до до $\vartheta_1 = \vartheta_2 = o$ при переході за довільним шляхом в областях $S^{(1)}$ та $S^{(2)}$ від $A^{(1)}$, $A^{(2)}$ до $B^{(1)}$, $B^{(2)}$ (див. фіг. 2 „в" та „с").

Підставляючи із (7) функції $\varphi(z_1)$ та $\psi(z_2)$ в (14):

$$\left[a_1(1+is_1) + \bar{a}_1(1+i\bar{s}_1) + a'_1(1+is_2) + \bar{a}'_1(1+i\bar{s}_2)\right]\ln\frac{r_2}{r_1} +$$
$$+\left[a_1(1+is_1) - \bar{a}_1(1+i\bar{s}_1) + a'_1(1+is_2) - \bar{a}'_1(1+i\bar{s}_2)\right]\pi i - \varepsilon =$$
$$= -i(X+iY), \tag{15}$$

де: 1) ε — безконечно мала величина, що прагне до нуля при віддаленні точок $A^{(1)}$, $A^{(2)}$ та $B^{(1)}$, $B^{(2)}$ на безмежність.

2) $r_1 = x_A = x_{1,A} = x_{2,A}$; $r_2 = x_B = x_{1,B} = x_{2,B}$.

Для того, щоб головний вектор $X+iY$ не залежав від вибору початку координат й був величиною конечною, очевидно, мусить бути

$$a_1(1+is_1) + \bar{a}_1(1+i\bar{s}_1) + a'_1(1+is_2) + \bar{a}'_1(1+i\bar{s}_2) = o. \tag{16}$$

З (15) і (16) бачимо, що a_1 та a'_1 задовольняють таку систему рівнянь:

$$a_1(1+is_1) + \bar{a}_1(1+i\bar{s}_1) + a'_1(1+is_2) + \bar{a}'_1(1+i\bar{s}_2) = o,$$

$$a_1(1+is_1)-\bar{a}_1(1+i\bar{s}_1)+a'_1(1+is_2)-\bar{a}'_1(1+i\bar{s}_2)=-\frac{X+iY}{\pi},$$

$$a_1(1-is_1)+\bar{a}_1(1-i\bar{s}_1)+\bar{a}'_1(1-i\bar{s}_2)+a'_1(1-is_2)=o. \quad (17)$$

$$\bar{a}_1(1-is_1)-a_1(1-i\bar{s}_1)+\bar{a}'_1(1-is_2)-a'_1(1-is_2)=-\frac{X-iY}{\pi}.$$

В системі (17) два останні рівняння є спряжені першим двом рівнянням. Розв'язуючи цю систему, маємо:

$$a_1=i\frac{X+s_2Y}{2\pi(s_1-s_2)};\ a'_1=-i\frac{X+s_1Y}{2\pi(s_1-s_2)}. \quad (18)$$

Таким чином функції $\varphi(z_1)$ та $\psi(z_2)$ (7) мають вигляд:

$$\varphi(z_1)=i\frac{X+s_2Y}{2\pi(s_1-s_2)}\ln z_1+\varphi_0(z_1),$$
$$(19)$$
$$\psi(z_2)=-i\frac{X+s_1Y}{2\pi(s_1-s_2)}\ln z_2+\psi_0(z_2),$$

де $\varphi_0(z_1)$ та $\psi_0(z_2)$ — голоморфні функції у своїх областях $S^{(1)}$ та $S^{(2)}$.

Компоненти переміщень U та V опреділюються, якщо нам відомі функції $\varphi(z)$ та $\psi(z)$, по формулам [3]

$$U(x,y)=2Re[p_1\varphi(z_1)+p_2\psi(z_2)]-\gamma y+\alpha_0$$
$$V(x,y)=2Re[q_1\varphi(z_1)+q_2\psi(z_2)]+\gamma x+\beta_0, \quad (20)$$

де введені такі позначення:

$$p_1=a_{11}s_1^2+a_{12}-a_{16}s_1, \qquad p_2=a_{11}s_2^2+a_{12}-a_{16}s_2,$$

$$q_1=\frac{a_{12}s_1^2+a_{22}-a_{26}s_1}{s_1}, \qquad q_2=\frac{a_{12}s_2^2+a_{22}-a_{26}s_2}{s_2}.$$

γ, α_0, β_0 — довільні дійсні сталі; члени $-\gamma y+\alpha_0$ та $\gamma x+\beta_0$ у (20) дають переміщення всього тіла як абсолютно твердого тіла й при розгляді пружної рівноваги можуть бути відкинуті.

Підставляючи з (19) у (20), одержимо:

$$U(x,y)=Re\left[ip_1\frac{X+s_2Y}{\pi(s_1-s_2)}\ln z_1-ip_2\frac{X+s_1Y}{\pi(s_1-s_2)}\ln z_2+\right.$$
$$\left.+p_1O_1\left(\frac{1}{z_1}\right)+p_2O_2\left(\frac{1}{z_2}\right)\right]+\text{Const}.$$

$$V(x, y) = Re\left[iq_1 \frac{X + s_2 Y}{\pi(s_1 - s_2)} \ln z_1 - iq_2 \frac{X + s_1 Y}{\pi(s_1 - s_2)} \ln(z_2) + \right.$$

$$\left. + q_1 O_1\left(\frac{1}{z_1}\right) + q_2 O_2\left(\frac{1}{z_2}\right)\right] + \text{Const}. \qquad (21)$$

З (21) виходить, що переміщення U та V зі збільшенням $|z|$ будуть нескінченно зростати. Для того, щоб вони були обмежені на нескінченності, очевидно, необхідно, щоб $X \equiv Y \equiv O$, а тоді напруження, як це ми бачимо з (19) та (5) будуть величини порядку $O\left(\frac{1}{z^2}\right)$.

Для розв'язання поставленої задачі візьмемо формулу Шварца [4]

$$F(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} U(\Theta)\frac{\sigma + \xi}{\sigma - \xi}\frac{d\sigma}{\sigma} + i\alpha_0, \qquad (22)$$

де: 1) $U(\Theta)$ — значення дійсної частини функції $F(\xi)$ на контурі γ кола, рівного одиниці,

2) α_0 — деяка дійсна стала.

Для наших цілей, так як областю у нас зараз є півплощина, зручніше перетворити формулу Шварца (22) безпосередньо до півплощини. Функції, що конформно відображають півплощини z, z_1 та z_2 на коло радіуса одиниця γ будуть:

$$\xi = -\frac{z + i}{z - i}; \quad \xi = -\frac{z_1 + i}{z_1 - i}; \quad \xi = -\frac{z_2 + i}{z_2 - i}. \qquad (23)$$

Причому точкам A, $A^{(1)}$, $A^{(2)}$ (див. фіг. 2), що знаходяться в афінній відповідності, буде відповідати *одна* точка контура γ кола радіуса одиниця.

Ядро Шварца для цих півплощин буде:

$$\frac{\sigma + \xi}{\sigma - \xi}\frac{d\sigma}{\sigma} = \frac{1 + xz_1}{x - z_1}\,\frac{2\,dx}{1 + x^2}, \qquad (24)$$

$$\frac{\sigma + \xi}{\sigma - \xi}\frac{d\sigma}{\sigma} = \frac{1 + xz_2}{x - z_2}\,\frac{2\,dx}{1 + x^2}. \qquad (25)$$

Помножимо обидві частини першого рівняння (1) на $\frac{1}{2\pi i}\,\frac{1 + xz_1}{x - z_1}\,\frac{2\,dx}{1 + x^2}$, а другого рівняння (1) на $\frac{1}{2\pi i}\,\frac{1 + xz_2}{x - z_2}\,\frac{2\,dx}{1 + x^2}$

і проінтегруємо тепер по контуру цих областей і розв'яжемо одержані два рівняння відносно функцій $\varphi(z_1)$ та $\psi(z_2)$ — маємо:

$$\varphi(z_1) = \frac{i}{2\pi(s_1 - s_2)} \int_{-\infty}^{+\infty} [f_2 - s_2 f_1] \frac{1 + xz_1}{x - z_1} \frac{dx}{1+x^2} + \lambda_1$$

$$\psi(z_2) = -\frac{i}{2\pi(s_1 - s_2)} \int_{-\infty}^{+\infty} [f_2 - s_1 f_1] \frac{1 + xz_2}{x - z_2} \frac{dx}{1+x^2} + \lambda_2, \qquad (26)$$

де: λ_1 та λ_2 — довільні комплексні сталі, що залежать від двох довільних дійсних сталих α_0 та β_0

$$\lambda_1 = i\,\frac{\beta_0 - s_2\alpha_0}{s_1 - s_2} \qquad \lambda_2 = -i\,\frac{\beta_0 - s_1\alpha_0}{s_1 - s_2}.$$

Формули (26) можна значно спростити.

Дійсно, на границі півплощини, тобто на осі ox,

$$\sigma_y = N(x) \qquad \tau_{xy} = T(x),$$

де $N(x)$ та $T(x)$ — нормальні та дотичні зусилля, що прикладені до границі півплощини. Тому на границі півплощини останні дві формули (5) дають:

$$2Re\,[\varphi'(x) + \psi(x)] = N(x),$$
$$2Re\,[s_1\varphi'(x) + s_2\Psi'(x)] = -T(x). \qquad (27)$$

Повторюючи ті ж самі дії до цих рівнянь (27), що були застосовані до рівнянь (1), одержимо:

$$\varphi'(z_1) = -\frac{i}{2\pi(s_1 - s_2)} \int_{-\infty}^{+\infty} \Big[T(x) + s_2 N(x) \Big] \frac{1 + xz_1}{x - z_1} \frac{dx}{1+x^2} + \lambda_1$$

$$(28)$$

$$\psi'(z_2) = \frac{i}{2\pi(s_1 - s_2)} \int_{-\infty}^{+\infty} \Big[T(x) + s_1 N(x) \Big] \frac{1 + xz_2}{x - z_2} \frac{dx}{1+x^2} + \lambda_2.$$

Якщо підставити

$$\frac{1 - xz}{x - z} \frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{x-z} - \frac{x}{1+x^2}, \qquad (28)$$

одержимо:

$$\varphi'(z_1) = -\frac{i}{2\pi(s_1 - s_2)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{T(x) + s_2 N(x)}{x - z_1} dx,$$

$$\psi'(z_2) = \frac{i}{2\pi(s_1 - s_2)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{T(x) + s_1 N(x)}{x - z_2} dx, \qquad (29)$$

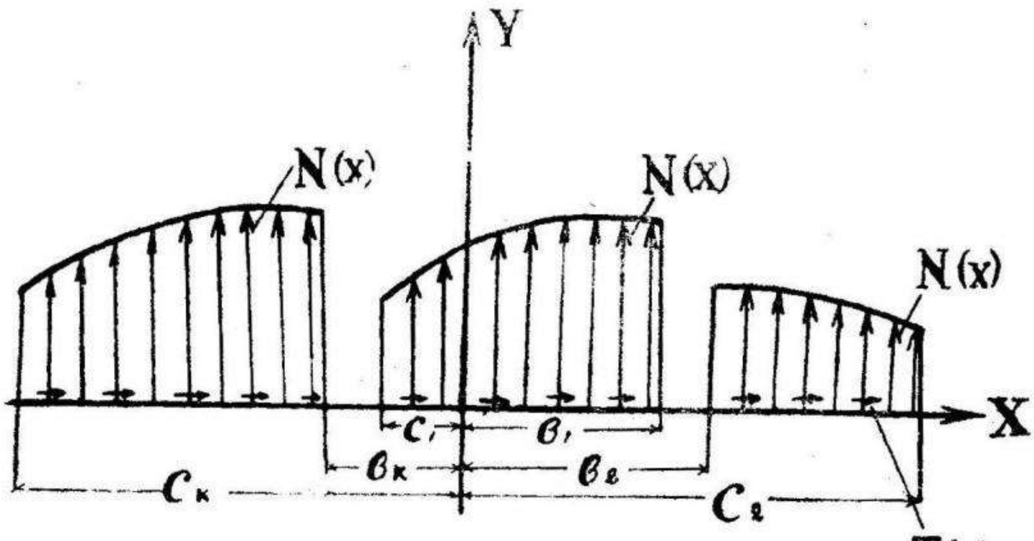
де сталі λ_1 та λ_2 у (28) вибрані так, щоб

$$\lambda_1 + \frac{i}{2\pi(s_1 - s_2)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{T(x) + s_2 N(x)}{1 + x^2} x dx = o,$$

$$\lambda_2 - \frac{i}{2\pi(s_1 - s_2)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{T(x) + s_1 N(x)}{1 + x^2} x dx = o,$$

а це завжди можливо зробити, для цього тільки треба покласти α_0 та β_0 рівними:

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} N(x) \frac{x}{1+x^2} dx, \qquad \beta_0 = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} T(x) \frac{x}{1+x^2} dx.$$



Фіг. 3.

По формулам (29) можемо легко знайти функції $\varphi'(z_1)$ та $\psi'(z_2)$, якщо по границі анізотропної півплощини на інтервалах $(b_k \ldots c_k)$ $(k=1, 2, 3 \ldots n)$ задані нормальні і тангенціальні зусилля.

Наприклад, якщо на інтервалі $(-a \ldots +a)$ задане рівномірно-розподілене навантаження (тиск) з інтенсивністю $p=\text{const.}$, то функції $\varphi'(z_1)$ й $\psi'(z_2)$ (29), покладаючи $T(x)=o$ й $N(x)=-p$, будуть:

$$\varphi'(z_1)=\frac{is_2 p}{2\pi(s_1-s_2)}\ln\frac{z_1-a}{z_2+a},$$

$$\psi'(z_2)=-\frac{is_1 p}{2\pi(s_1-s_2)}\ln\frac{z_2-a}{z_2+a}.$$

Якщо функції $\varphi'(z_1)$ та $\psi'(z_2)$ відомі, то компоненти напруг в пружному анізотропному полі одержимо з рівнянь (5), а переміщення $U(x, y)$ та $V(x, y)$ з рівнянь (20).

Тепер ми можемо перейти до розв'язання такої задачі. Припустимо, що на інтервалі $(-a \ldots +a)$ прикладений абсолютно твердий штамп (див. фіг. 4) й одночасно на інтервалах $(b_k \ldots c_k)$ $k=1, 2, 3, \ldots, n$ прикладене довільне навантаження з інтенсивністю зусиль $N_k(x)$ та $T_k(x)$, де: 1) $N_k(x)$ — нормальні, а $T_k(x)$ — тангенціальні зусилля, що прикладені на інтервалі $(b_k \ldots c_k)$ (див. фіг. 3);

2) K — сила, що притискує абсолютно твердий штамп до півплощини.

Позначимо через $N(x)$ та $T(x)$ нормальні й тангенціальні зусилля, що передаються по підошві штампа на пружну анізотропну основу. Приймемо при розв'язанні цієї задачі такі припущення:

1) Сили тертя між штампом й пружною основою дорівнюють нулеві, тобто $T(x)=o$ на інтервалі $(-a \leqslant x \leqslant +a)$.

2) Вертикальні переміщення точок пружного середовища безпосередньо під підошвою штампа рівні переміщенням точок підошви штампа.

Під дією сили K вертикальні переміщення точок підошви штампа будуть

$$V(x)=g(x)+c, \tag{30}$$

де $g(x)$ — рівняння підошви штампа „c" — довільна стала.

Позначаючи зусилля під штампом (які зводяться тільки до нормальних зусиль) через мінус $P(x)$, де $P(x)$ — тиск, що передається по підошві штампа на пружне середовище; з формул (29) визначимо функції $\varphi'(z_1)$ та $\psi'(z)$:

$$\varphi'(z_1)=\frac{is_2}{2\pi(s_1-s_2)}\int_{-a}^{+a}\frac{P(x)}{x-z_1}dx-\frac{i}{2\pi(s_1-s_2)}\sum_{k=1}^{n}\int_{b_k}^{c_k}\frac{T_k(x)-s_2N_k(x)}{x-z_1}dx,$$

$$\psi'(z_2)=-\frac{is_1}{2\pi(s_1-s_2)}\int_{-a}^{+a}\frac{P(x)}{x-z_2}dx-\frac{i}{2\pi(s_1-s_2)}\sum_{k=1}^{n}\int_{b_k}^{c_k}\frac{T_k(x)-s_1N_k(x)}{x-z_2}dx. \quad (31)$$

Якби $P(x)$ було відоме, то формули (31) й розв'язували поставлену задачу, але цей тиск $P(x)$ нам невідомий.

Таким чином поставлена задача зводиться до визначення тиску $P(x)$, що передається по підошві абсолютно твердого штампа на пружну анізотропну основу.

Проінтегруємо (31); одержимо:

$$\varphi(z_1)=-\frac{is_2}{2\pi(s_1-s_2)}\int_{-a}^{+a}P(x)\ln(x-z_1)\,dx+$$

$$+\frac{i}{2\pi(s_1-s_2)}\sum_{k=1}^{n}\int_{b_k}^{c_k}\left[\,T_k(x)+s_2N_k(x)\,\right]\ln(x-z_1)\,dx+c_1,$$

$$\psi(z_2)=\frac{is_1}{2\pi(s_1-s_2)}\int_{-a}^{+a}P(x)\ln(x-z_2)\,dx-$$

$$-\frac{i}{2\pi(s_1-s_2)}\sum_{k=1}^{n}\int_{b_k}^{c_k}\left[\,T_k(x)+s_1N_k(x)\,\right]\ln(x-z_2)\,dx+c_2, \quad (32)$$

де c_1, c_2 — довільні комплексні сталі.

Спрямовуючи точку (x, y) із нижньої півплощини до точки x_0 контура, що лежить в інтервалі $(-a\leqslant x\leqslant +a)$. знайдемо з (32) значення функцій $\varphi(x_0)$ та $\psi(x_0)$:

$$\varphi(x_0)=-\frac{is_2}{2\pi(s_1-s_2)}\int_{-a}^{+a}P(x)\ln|x-x_0|\,dx+\frac{i}{2\pi(s_1-s_2)}\Phi_1(s_2,\,x_0),$$

$$\psi(x_0)=\frac{is_1}{2\pi(s_1-s_2)}\int\limits_{-a}^{+a}P(x)\ln|x-x_0|\,dx-\frac{i}{2\pi(s_1-s_2)}\Phi_2(s_1,x_0), \quad (33)$$

де

$$\Phi_1(s_2,\,x_0)=\lim_{z_1\to x_0}\left\{\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{b_k}^{c_k}\Big[T_k(x)+s_2N_k(x)\Big]\ln(x-z_1)\,dx\right\}+c_1,$$

$$\Phi_2(s_1,\,x_0)=\lim_{z_2\to x_0}\left\{\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{b_k}^{c_k}\Big[T_k(x)+s_1N_k(x)\Big]\ln(x-z_2)\,dx\right\}+c_2$$

Підставимо функції $\varphi(x_0)$ та $\psi(x_0)$ з (33) у друге рівняння (20) для переміщень і приймаючи до уваги (30), маємо:

$$Re\left\{i\frac{s_1q_2-s_2q_1}{\pi(s_1-s_2)}\right\}\int\limits_{-a}^{+a}P(x)\ln|x-x_0|\,dx+$$

$$+Re\left\{\frac{q_1i}{\pi(s_1-s_2)}\Phi_1-\frac{q_2i}{\pi(s_1-s_2)}\Phi_2\right\}=q(x)+c$$

або:

$$\int\limits_{-a}^{+a}P(x)\ln|x-x_0|\,dx=f(x_0)+\text{const}, \quad (34)$$

де

$$m=Re\left\{i\frac{s_1q_2-s_2q_1}{\pi(s_1-s_2)}\right\}$$

$$f(x_0)=\frac{1}{m}\left[q(x_0)-Re\left\{\frac{iq_1}{\pi(s_1-s_2)}\Phi(x_0)-\frac{iq_2}{\pi(s_1-s_2)}\Phi_2(x_0)\right\}\right]$$

Таким чином, наша задача, як бачимо з (34), зводиться до визначення невідомого тиску $P(x)$ з інтегрального рівняння першого роду. Розв'язання рівняння (34) відоме; візьмемо розв'язання цього рівняння в формі, даній акад. М. І. Мусхелішвілі [4]. За цим методом невідомий тиск визначаємо по формулі:

$$P(x)=\frac{1}{\pi}Re\{iF'(z)\},$$

де: 1) Функція $F(z)$ є функція $F_0(\xi) = k \ln \xi - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{2Q}{\sigma - \xi} d\sigma +$ $+ \text{const}$, якщо підставити сюди замість ξ її значення через z з формули:

$$\xi = \frac{z + \sqrt{z^2 - a^2}}{a}.$$

2) Функція $Q(\sigma)$ є значення правої частини рівняння (30), тобто функція $f(x_0) + \text{const}$, де замість x підставлено його значення через σ по формулі $x = \frac{a}{2}\left(\sigma + \frac{1}{\sigma}\right)$.

3) K — сила, що притискує штамп до півплощини:

$$K = \int_{-a}^{+a} P(x)\,dx.$$

Якщо до штампа прикладена пара M, то очевидно $K = 0$.

Рівняння (34) лінійно відносно $P(x)$; тому можна представити $P(x)$ у вигляді:

$$P(x) = \overset{(\text{осн.})}{P(x)} + \overset{(\text{дод})}{P(x)}, \tag{35}$$

де: 1) $\overset{(\text{осн.})}{P(x)}$ — основний тиск від сили K, коли на інтервалах $(b_k, \ldots, c_k)$ навантаження відсутнє, тобто $N_k(x) = T_k(x) = 0$ на всіх інтервалах $(b_k, \ldots c_k)$.

2) $P^{(\text{дод})}$ — додатковий тиск, викликаний завдяки прикладеним зусиллям $N_k(x)$ та $T_k(x)$ на інтервалах $(b_k, \ldots c_k)$. Із (31) і (30) бачимо, що:

$$\int_{-a}^{+a} \overset{(\text{дод})}{P(x)} \ln|x - x_0|\,dx = -\frac{1}{m} Re\left\{\frac{iq_1}{\pi(s_1 - s_2)} \Phi_1(x_0) - \right.$$

$$\left. - \frac{iq_2}{\pi(s_1 - s_2)} \Phi_2(x_0)\right\}. \tag{36}$$

Права частина в (36) залежить виключно від навантаження по боках $N_k(x)$ та $T_k(x)$. Якщо це навантаження відсутнє, тобто $T_k(x) \equiv 0$, $N_k(x) \equiv 0$, то й $\overset{(\text{дод})}{P(x)} \equiv 0$, а звідси й розв'язання рівняння (31) може бути тільки $\overset{(\text{дод})}{P(x)} \equiv 0$.

Щоб переконатись у тому, що при $N_k(x) = T_k(x) = 0$ на всіх інтервалах $(b_k, \ldots c_k)$ розв'язком рівняння (36) може бути тільки нулеве рішення, можна так: припустимо, що $N_k(x) = T_k(x) \equiv 0$ на всіх інтервалах $(b_k, \ldots c_k)$, тоді рівняння (36) прийме вигляд:

$$\int_{-a}^{+a} \overset{(\text{дод})}{P}(x) \ln|x - x_0|\, dx = o \quad (\text{або const.}). \tag{37}$$

Розв'язуючи це рівняння вказаним вище методом одержимо:

$$\overset{(\text{дод})}{P}(x) = \frac{K^{(\text{дод})}}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}},$$

де

$$\overset{(\text{дод})}{K} = \int_{-a}^{+a} \overset{(\text{дод})}{P}(x)\, dx.$$

До абсолютно-твердого штампу ніяких нових додаткових сил не було прикладено, а тому $K^{(\text{дод})} \equiv o$, а звідси й $P^{(\text{дод})} \equiv o$.

Із цього, між іншим, виводимо, що дія навантаження $N_k(x)$, $T_k(x)$ на $(b_k, \ldots c_k)$ поблизу абсолютно-твердого штампу статично-еквівалентна парі M. Величину цього момента M, очевидно, визначимо за формулою:

$$M = \int_{-a}^{+a} \overset{(\text{дод})}{P}(x)\, x\, dx. \tag{38}$$

Розглянемо тепер випадок, коли в (3а) $g(x) = Ax + B$, тобто розглянемо абсолютно-твердий штамп з прямолінійною основою, прикладений до інтервала $(-a \ldots\ldots + a)$ (див. фіг. 4), на який діє ексцентрично сила K (ексцентриситет e), а на інтервалі $(b \ldots\ldots c)$ прикладене рівномірно розподілене навантаження (тиск) з інтенсивністю $p(x) =$ const.

Знайдемо тиск $P(x)$ під цим штампом. Весь тиск $P(x)$ ми розклали на дві частини $P^{(\text{осн})}$ і $P^{(\text{дод})}$,

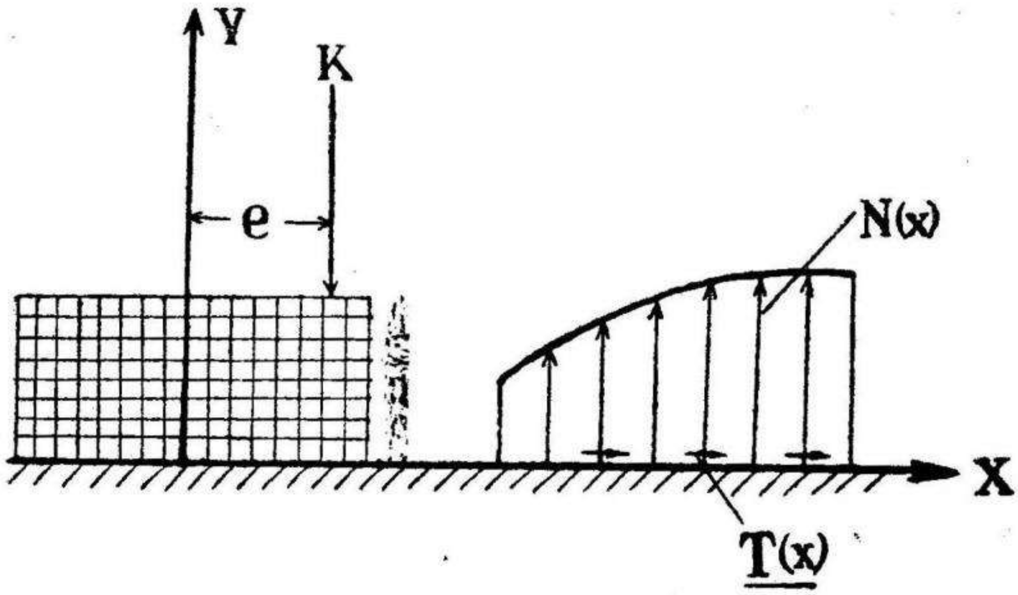
$$P(x) = \overset{(\text{осн})}{P}(x) + \overset{(\text{дод})}{P}(x),$$

які, як не важко бачити, визначаються з інтегральних рівнянь:

$$\int_{-a}^{+a} \overset{(\text{осн.})}{P(x)} \ln |x - x_0| \, dx = \frac{1}{m} [Ax_0 + B]. \tag{39}$$

$$\int_{-a}^{+a} \overset{(\text{дод.})}{P(x)} \ln |x - x_0| \, dx = -\frac{1}{m} R \left[\frac{iq_1}{\pi (s_1 - s_2)} \Phi_1(x_0) - \right.$$

$$\left. - \frac{iq_2}{\pi (s_1 - s_2)} \Phi_2(x_0) \right]. \tag{40}$$



Фіг. 4.

Розглянемо спочатку рівняння (39).

Величини A та B — поки що невизначені дійсні сталі Очевидно, $Q(\sigma) = \frac{Aa}{2m}\left(\sigma + \frac{1}{\sigma}\right) + \text{const}$, функція $F(z)$ для нашого випадку буде мати вигляд

$$F(z) = K \ln (z + \sqrt{z^2 - a^2}) + \frac{A}{m}(z - \sqrt{z^2 - a^2}) + \text{const}.$$

Тиск $\overset{(\text{осн.})}{P(x)}$, коли ми знаємо функцію $F(z)$, буде:

$$P(x) = \frac{K - \frac{A}{m} x}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Сталу A визначимо з однієї з умов рівноваги штампу, а саме:

$$Ke = \int_{-a}^{+a} x \overset{(\text{осн.})}{P(x)}\, dx.$$

Звідси маємо, що

$$A = -\frac{2Kem}{a^2}.$$

Таким чином, остаточно основний тиск під цим штампом буде:

$$\overset{(\text{осн.})}{P(x)} = \frac{1 + 2\dfrac{ex}{a^2}}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}} K. \tag{41}$$

Знайдемо тепер $\overset{(\text{дод.})}{P(x)}$. Для цього розглянемо рівняння (40).

Для нашого випадку $\Phi_1(x_0)$ і $\Phi_2(x_0)$ будуть мати вигляд:

$$\Phi_1(s_2, x_0) = -qs_2[(c - x_0)\ln(c - x_0) - (b - x_0)\ln(b - x_0)] + \text{const},$$

$$\Phi_2(s_1, x_0) = -qs_1[(c - x_0)\ln(c - x_0) - (b - x_0)\ln(b - x_0)] + \text{const}.$$

Підставляючи ці значення Φ_1 та Φ_2 у (40) одержимо:

$$\int_{-a}^{+a} \overset{(\text{доп.})}{P(x)} \ln|x - x_0|\, dx = q[(b - x_0)\ln(b - x_0) -$$

$$-(c - x_0)\ln(c - x_0)] + \text{const}. \tag{42}$$

Опреділимо тепер $Q(\sigma)$. Для цього треба в праву частину (42) замість x підставити: $x = \frac{a}{2}\left(\sigma + \frac{1}{\sigma}\right)$ й ми матимемо:

$$Q(\sigma) = q[b\ln(\sigma - \lambda_2) - c\ln(\sigma - \delta_2) + \frac{a}{2}\sigma\ln(\sigma - \delta_2) - \frac{a}{2}\sigma\ln(\sigma - \lambda_2) +$$

$$+ b\ln(\sigma - \lambda_1) - c\ln(\sigma - \delta_1) + \frac{a}{2}\sigma\ln(\sigma - \delta_1) - \frac{a}{2}\sigma\ln(\sigma - \lambda_1) +$$

$$+ \frac{a}{2}\frac{1}{\sigma}\ln(\sigma - \delta_2) - \frac{a}{2}\frac{1}{\sigma}\ln(\sigma - \lambda_2) + \frac{a}{2}\frac{1}{\sigma}\ln(\sigma - \delta_1) -$$

$$-\frac{a}{2}\frac{1}{\sigma}\ln(\sigma - \lambda_1) + (c - b)\ln\sigma] + \text{const},$$

де: 1) $\lambda_2 = \frac{b}{a} + \sqrt{\frac{b^2}{a^2} - 1}$ $\lambda_1 = \frac{b}{a} - \sqrt{\frac{b^2}{a^2} - 1}$

$\delta_2 = \frac{c}{a} + \sqrt{\frac{c^2}{a^2} - 1}$ $\delta_1 = \frac{c}{a} - \sqrt{\frac{c}{a^2} - 1}$;

2) величина a, b і c характеризують розміри штампа й положення додаткової рівномірно-розподіленої нагрузки $q = \text{const.}$ (див. фіг. 4).

Якщо відома функція $Q(\sigma)$, то функцію $F(\xi)$ визначімо за формулою

$$F_0(\xi) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{2\,Q(\sigma)}{\sigma - \xi}\,d\sigma + \text{const.},$$

де ξ є точка поза одиничним колом γ.

Підставляючи замість ξ у функції $F_0(\xi)$ її значення через z по формулі

$$\xi = \frac{z + \sqrt{z^2 - a^2}}{a},$$

знайдемо функцію $F(z)$.

Тиск $\overset{(\text{дод.})}{P}(x)$, якщо відома функція $F(z)$, визначимо за формулою

$$\overset{(\text{дод.})}{P}(x) = \frac{1}{\pi}\, Re\left\{ i\,F'(z) \right\}.$$

Не приводячи всіх цих проміжних викладок $\overset{(\text{дод.})}{P}(x)$ буде:

$$\overset{(\text{дод.})}{P}(x) = \frac{-xq\ln\frac{\delta_2}{\lambda_2} + 2(c-b)q + \frac{2(x-c)(a-x\delta_1)}{a-2\delta_1 x + a\delta_1{}^2}q - \frac{2(x-b)(a-x\lambda_1)}{a-2\lambda_1 x + a\lambda_1{}^2}q}{\pi\sqrt{a^2-x^2}} +$$

$$+\frac{2q}{\pi}\left\{ arc\ tg\,\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x-a\lambda_1} - arc\ tg\,\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x-a\delta_1}\right\}, \qquad (43)$$

де інтервал зміни $arc\ tg'$ - сів $(o\ldots\pi)$. Таким чином, додаючи $\overset{(\text{дод.})}{P}(x)$ (41) з $\overset{(\text{дод.})}{P}(x)$ (43) знайдемо повний тиск під цим штампом:

$$P(x) = \overset{(\text{дод})}{P}(x) + \overset{(\text{осн.})}{P}(x). \qquad (44)$$

Як бачимо, тиск $P(x)$ (44) не залежить від пружних сталих анізотропного матеріалу півплощини, тобто такий же тиск $P(x)$ (44) будемо мати і у випадку ізотропної півплощини.

Підставляючи тепер з (44) знайдене значення $P(x)$ у формули (31), знайдемо функції $\varphi'(z_1)$ та $\psi(z_2)$. За допомогою цих функцій $\varphi'(z_1)$ та $\psi(z_2)$ по формулам (5) определімо компоненти напруг, а по формулам (20) компоненти переміщень в півплощині.

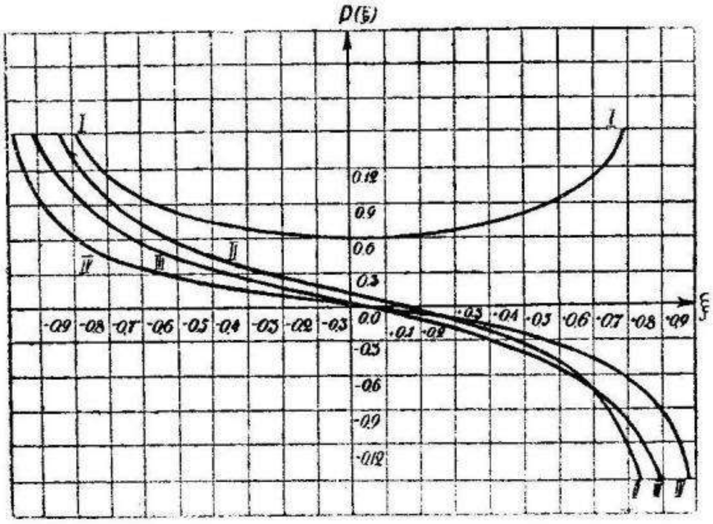
Тут ми розглянули змішану задачу для випадку одного абсолютно-твердого штампу.

Задача змішаною зветься тому, що на одному інтервалі $(-a\ldots\ldots+a)$ задані вертикальні переміщення $v(x)$ й головний вектор K, а на інших інтервалах $(b_k\ldots c_k)$ задані зовнішні зусилля $N_k(x)$ та $T_k(x)$.

В наступних повідомленнях будуть розглянуті випадки, коли до прямолінійної границі анізотропної півплощини одночасно діє декілька абсолютно-твердих штампів, а на інших інтервалах зовнішні зусилля $N_k(x)$ та $T_k(x)$.

Розгляньмо наприкінці декілька прикладів. На фіг. 5 наведені криві I, II, III та IV для $\overset{(\text{дод})}{P}(x)$ (43) для випадків:

$a = 3$ *м*	$b = 3$ *м*	$c = 23$ *м*	крива II
$a = 3$ *м*	$b = 5$ *м*	$c = 25$ *м*	крива III
$a = 3$ *м*	$b = 31$ *м*	$c = 51$ *м*	крива IV



Фіг. 5.

Крива I для $\overset{(\text{осн})}{P}(x)$ (41) при $e = o$. $\overset{(\text{дод})}{P}(x)$ на кривих II, III, IV представлені в частинах q, а $\overset{(\text{осн})}{P}(x)$ на кривій I у частинах $p = \dfrac{K}{2a}$.

З наведених графіків бачимо, що повний тиск абсолютно-твердого штампа на пружну основу праворуч і ліворуч від осі oy буде неоднаковий. При деяких значеннях p і q у правій половині штампа (ближче до кута) повний тиск $P(x) = \overset{(\text{осн})}{P}(x) + \overset{(\text{дод})}{P}(x)$ буде дорівнювати нулеві, або буде незначною величиною; у лівій же частині штампа як $\overset{(\text{осн})}{P}(x)$, так і $\overset{(\text{дод})}{P}(x)$ мають однакові знаки, тому в цій частині штампу $P(x = \overset{(\text{осн})}{P}(x) + \overset{(\text{дод})}{P}(x)$ буде безмежно зростати.

Звідси ми бачимо, що треба сподіватись перенапруження матеріалу під штампом „ліворуч" (правильніше з протилежного боку від додаткової нагрузки q) і коли це перенапруження настане — штамп повернеться вліво (див. фіг. 4).

Не важко пересвідчитись у тому, що $\int\limits_{-a}^{+a} \overset{(\text{дод})}{P}(x)\, dx = o$,

$$\text{а} \quad M = \int\limits_{-a}^{+a} \overset{(\text{дод})}{P}(x)\; x dx = q \left| \frac{a^2}{4}(\delta_1{}^2 - \lambda_1{}^2) - a(c\delta_1 - b\lambda_1) - \frac{a^2}{2} \ln \frac{\delta_2}{\lambda_2} \right],$$

тобто $\overset{(\text{дод})}{P}(x)$ під абсолютно твердим штампом статистично-еквівалентно парі з моментом M.

ЛІТЕРАТУРА

1. Савін Г. М. Про додатковий тиск, який передається по підошві абсолютно твердого штампа на пружну анізотропну основу, викликаний прикладеним навантаженням поблизу абсолютно твердого штампа. Доповіді Академії наук УРСР, № 7, 1940.

2. Савин Г. Н. Некоторые задачи теории упругости анизотропной среды. Доклады Академии наук СССР, т. XXIII, № 3, 1939.

3. Лехницкий С. Г. К вопросу о влиянии сосредоточенных сил на распределение напряжений в анизотропной среде. Прикладная математика и механика, т. III, № 1, 1936.

4. Мусхелишвили Н. И. Некоторые задачи математической теории упругости. Издательство АН СССР, 1935, стр. 244.

Г. Н. САВИН. СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ АНИЗОТРОПНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Резюме

В работе рассмотрены решения двух классов задач:

1) Задача о напряжениях и перемещениях в анизотропной полуплоскости, если на границе ее заданы внешние усилия X_n и Y_n (см. фиг. 1). Решение задачи сведено к определению двух функций $\varphi(z_1)$ и $\psi(z_2)$ (29)[1].

2) Задача о напряжениях и перемещениях в упругой анизотропной полуплоскости, когда к границе этой полуплоскости на участках $(b_k \ldots c_k)$ приложены внешние усилия X_n и Y_n, а на участке $(-a \ldots +a)$ (см. фиг. 4) заданы вертикальные составляющие $v(x)$ перемещения, а также главный вектор K и главный момент M, вызвавшие эти перемещения. Задача также сведена к нахождению двух аналитических функций $\varphi(z_1)$ и $\psi(z_2)$ (31) комплексных переменных $z_1 = x + s_1 y$ и $z_2 = x + s_2 y$.

По найденным функциям $\varphi(z_1)$ и $\psi(z_2)$ (31) компоненты напряжений и перемещений определяются соответственно по формулам (5) и (20).

В заключение рассмотрены несколько примеров.

[1] Номера формул даны по основному тексту статьи.

Наукові записки Львівського Державного Університету імені Ів. Франка
Том V Серія фізико-математична, вип. 2 1947

М. П. ШЕРЕМЕТЬЄВ

ЧИСТИЙ ЗГИН ПОЛОСИ (БАЛКИ), ОСЛАБЛЕНОЇ ЕЛІПТИЧНИМ ОТВОРОМ З ВПАЯНИМ В ЦЕЙ ОТВІР ЕЛІПТИЧНИМ КІЛЬЦЕМ АБО ШАЙБОЮ

§ 1. ЗГИН ПОЛОСИ З ВПАЯНИМ КІЛЬЦЕМ

Припустимо, що в еліптичний отвір пружної ізотропної полоси (балки) вставлено пружне, ізотропне, але з іншого матеріалу еліптичне кільце. Кільце обмежене двома конфокальними еліпсами L_1 і L_2, причому розміри зовнішнього еліпса L_1 однакові з розмірами еліптичного отвору полоси, так, що еліпс L_1 є границею двох областей кільця і балки.

Після того, як кільце вставлене, його спаюють з оточуючим матеріалом балки, а потім балка піддається чистому згину з моментом M.

Визначимо пружну рівновагу балки. Помістимо початок координат в центрі еліптичного отвору балки, або в центрі еліптичного кільця. Будемо вважати для простоти, що великі півосі еліпсів L_1 і L_2 лежать на осі балки (див. рис. 1), по якій направимо і вісь x. Розв'язання в загальному випадку буде складніше в обчисленнях.

Граничні умови будуть слідуючі:

1. Контур L_2 вільний від діяння зовнішніх сил, отже на L_2

$$X_n - iY_n = o.$$

2. Вздовж контура L_1 кільце припаяне до пластинки, отже на L_1

$$X_n = X_{1n}, \ Y_n = Y_{1n}, \ u = u_1, \ v = v_1$$

або

$$X_n - iY_n = X_{1n} - iY_{1n}, \quad u - iv = u_1 - iv_1 .$$

3. На лініях $y = \pm l$, які обмежують полосу, $X_n - iY_n = o$.

4. На лініях $x = \pm c$, паралельних осі oy, нехай діють нормальні зусилля $X_x = -Ay$. Ці зусилля еквівалентні статично парі, момент якої

$$M = 2h \int_{-l}^{+l} Ay^2\, dy = \frac{4}{3} Ahl^3, \tag{1,1}$$

де $2h$ — товщина пластини.

Тут індексом „1" позначені переміщення і напруження, які відносяться до області кільця, а без індекса — ті ж величини, що відносяться до області, зайнятої балкою.

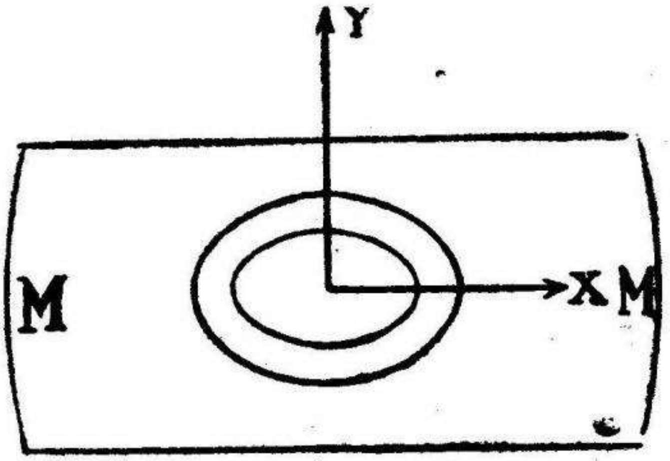


Рис. 1.

Далі будемо відмічати значком „1" всі елементи (пружні константи, компоненти напружень і інш.), які відносяться до області кільця, а без індекса „1" — ті ж елементи, які, однак, відносяться до області полоси (балки).

Ми будемо розв'язувати поставлену задачу наближено, беручи до уваги тільки умови 1 і 2. Відносно ж умов 3 і 4 ми будемо дбати тільки про те, щоб досліджувана пружна рівновага на великій віддалі від кільця наближалась до пружного стану суцільної полоси. Цей пружний стан, як відомо, характеризується функціями:

$$\varphi(z) = \frac{Aiz^2}{8}, \quad \psi(z) = -\frac{Aiz^2}{8}.*$$

Таким чином, ми будемо розв'язувати задачу так, неначе б еліптичне кільце було впаяне в необмежену пластинку. При цьому припущенні функції, які характеризують пружний стан пластинки, будуть мати вигляд

$$\varphi^0(z) = \frac{Aiz^2}{8} + \varphi_2{}^0(z),$$

$$\psi^0(z) = -\frac{Aiz^2}{8} + \psi_2{}^0(z), \tag{1,2}$$

де $\varphi_2{}^0(z)$ і $\psi_2{}^0(z)$ — функції голоморфні поза еліптичним кільцем, включаючи безконечно віддалену точку.

* Мусхелишвили Н. И. „Некоторые задачи математической теории упругости", изд. 1935, стр. 280—281.

Якщо позначити через $\varphi^0_1(z)$ і $\psi^0_1(z)$ функції, які характеризують пружний стан кільця, то умови 1 і 2 будуть рівнозначні слідуючим:

$$\overline{\varphi_0(z)}+\overline{z}\varphi^{0\prime}(z)+\psi^0(z)=\overline{\varphi_1^0(z)}+\overline{z}\varphi_1^{0\prime}(z)+\psi_1^0(z), \tag{1,3}$$

$$\frac{1}{\mu}\left\{x\overline{\varphi^0(\overline{z})}-\overline{z}\varphi^0_1{}'(z)-\psi^0(z)\right\}=\frac{1}{\mu_1}\left\{x_1\overline{\varphi^0_1(\overline{z})}-\overline{z}\varphi^0_1{}'(z)-\psi^0_1(z)\right\}, \tag{1,4}$$

де z — точка на L_1 і

$$\overline{\varphi^0_1(\overline{z})}+\overline{z}\varphi^0_1{}'(z)+\psi^0_1(z)=0, \tag{1,5}$$

де z — точка на L_2.

Відобразимо при допомозі функції $z=\omega(\zeta)=R\left(\zeta+\frac{m}{\zeta}\right)$ область пластинки і кільця на зовнішність круга радіуса $R_1<1$ так, щоб границя двох областей, тобто контур L_1, відобразилася на круг радіуса 1.

Це можна завжди зробити, підібравши відповідним способом R_1:

$$R_1=\frac{(1-K_1)\ (1+K_2)}{(1+K_1)\ (1-K_2)}, \tag{1,6}$$

де $K_1=\frac{b_1}{a_1}$, а $K_2=\frac{b_2}{a_2}$.

Величини a_1, a_2 означають відповідно півосі еліпсів, що обмежують кільце. Величина m при цьому буде рівна

$$m=\frac{1-K_1}{1+K_1}=\frac{a_1-b_1}{a_1+b_1}.$$

Так як еліпси L_1 і L_2 конфокальні, то між величинами a_1, a_2, K_1 і K_2 повинно бути відношення

$$\frac{a_1{}^2}{a_2{}^2}=\frac{1-K_2{}^2}{1-K_1{}^2}.$$

Після відображення граничні умови 1,3, 1,4, 1,5 заміняються

$$\overline{\varphi(\overline{\sigma})}+\frac{\overline{\omega(\overline{\sigma})}}{\omega'(\sigma)}\varphi'(\sigma)+\psi(\sigma)=\overline{\varphi_1(\overline{\sigma})}+\frac{\overline{\omega(\overline{\sigma})}}{\omega'(\sigma)}\varphi_1{}'(\sigma)+\psi_1(\sigma), \tag{1,7}$$

$$\frac{\varkappa}{\mu}\overline{\varphi}(\sigma)-\frac{1}{\mu}\left\{\frac{\overline{\omega(\overline{\sigma})}}{\omega'(\sigma)}\varphi'(\sigma)+\psi(\sigma)\right\}=\frac{\varkappa_1}{\mu}\overline{\varphi_1(\overline{\sigma})}-\frac{1}{\mu_1}\left\{\frac{\overline{\omega(\overline{\sigma})}}{\omega'(\sigma)}\varphi_1{}'(\sigma)+\psi_1(\sigma)\right\}, \tag{1,8}$$

де σ_1 — точка одиничного круга і $\sigma = e^{i\vartheta}$.

$$\overline{\varphi}_1(\overline{\sigma}_1) + \frac{\overline{\omega}(\overline{\sigma}_1)}{\omega'(\sigma_1)}\varphi_1'(\sigma_1) + \psi_1(\sigma_1) = 0, \tag{1,9}$$

де σ_1 — точка на кругу радіуса R_1 і $\sigma_1 = R_1\,\sigma$.

Тут введено позначення: $\varphi^0(\omega(\zeta)) = \varphi(\zeta)$ $\varphi_1{}^0(\omega(\zeta)) = \varphi_1(\zeta)$, $\psi_0(\omega(\zeta)) = \psi(\zeta)$, $\psi_1{}^0(\omega(\zeta)) = \psi_1(\zeta)$, функції $\varphi(\zeta)$ і $\psi(\zeta)$, згідно з формулою (1,1), можуть бути представлені

$$\varphi(\zeta) = \frac{AiR^2}{8}\left(\zeta + \frac{m}{\zeta}\right)^2 + \varphi_0(\zeta); \qquad \varphi_0 = \sum_{v=1}^{\infty} a_v\zeta^{-v};$$

$$\psi(\zeta) = -\frac{AiR^2}{8}\left(\zeta + \frac{m}{\zeta}\right)^2 + \psi_0(\zeta), \quad \psi_0(\zeta) = \sum_{v=0}^{\infty} b_v\zeta^{-v} \tag{1,10}$$

для достатньо великих ζ.

Щождо функцій $\varphi_1(\zeta)$ і $\psi_1(\zeta)$, то вони голоморфні в кільці $(R_1, 1)$ і кожна з них може бути представлена як сума 2-х функцій. Одна з них голоморфна всередині і на колі круга радіуса 1, а друга — голоморфна зовні і на колі круга радіуса $R_1 < 1$, включаючи і безмежно віддалену точку.

$$\varphi_1(\zeta) = P_1(\zeta) + P_2(\zeta), \quad \psi_1(\zeta) = Q_1(\zeta) + Q_2(\zeta),$$

де
$$P_1(\zeta) = \sum_{v=0}^{\infty} c_v\zeta^{v}, \quad Q_1(\zeta) = \sum_{v=0}^{\infty} d_v\zeta^{v},$$

а
$$P_2(\zeta) = \sum_{v=1}^{\infty} e_v\zeta^{-v}, \quad Q_2(\zeta) = \sum_{v=1}^{\infty} f_v\zeta^{-v}. \tag{1,11}$$

Підставимо значення функцій $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$, $\varphi_1(\zeta)$, $\psi_1(\zeta)$ із (1,10) і (1,11), а також значення відображуючої функції $\omega(\zeta)$ в (1,7), (1,8) і (1,9) і після очевидних перетворень одержимо

$$\overline{\varphi}_0\left(\frac{1}{\sigma}\right) + \frac{(1 + m\sigma^2)\sigma}{\sigma^2 - m}\varphi_0'(\sigma) + \psi_0(\sigma) - \frac{AiR^2}{\gamma}(1 - m^2)\left(\sigma - \frac{1}{\sigma}\right)^2 =$$

$$= \overline{P}_1\left(\frac{1}{\sigma}\right) + \frac{(1 + m\sigma^2)\sigma}{\sigma^2 - m}P_1'(\sigma) + Q_1(\sigma) + \overline{P}^2\left(\frac{1}{\sigma}\right) +$$

$$+ \frac{(1 + m\sigma^2)}{\sigma^2 - m}P_2'(\sigma) + Q_2(\sigma). \tag{1,12}$$

$$\frac{\varkappa}{\mu}\overline{\varphi}_0\left(\frac{1}{\sigma}\right)-\frac{1}{\mu}\left\{\frac{(1+m\sigma^2)\sigma}{\sigma^2-m}\varphi_0'(\sigma)+\psi_0(\sigma)\right\}-\frac{\varkappa}{\mu}\frac{AiR^2}{\gamma}\left(\frac{1}{\sigma}+m\sigma\right)^2+$$
$$+\frac{1}{\mu}\frac{AiR^2}{\gamma}\left\{\left(\sigma+\frac{m}{\sigma}\right)^2-2\left(\frac{1}{\sigma}+m\sigma\right)\left(\sigma+\frac{m}{\sigma}\right)\right\}=\frac{\varkappa_1}{\mu_1}\overline{P}_1\left(\frac{1}{\sigma}\right)-$$
$$-\frac{1}{\mu_1}\left\{\frac{(1+m\sigma^2)\sigma}{\sigma^2+m}P_1'(\sigma)+Q_1(\sigma)\right\}+\frac{\varkappa_1}{\mu_1}\overline{P}_2\left(\frac{1}{\sigma}\right)-$$
$$-\frac{1}{\mu_1}\left\{\frac{(1+m\sigma^2)\sigma}{\sigma^2+m}P_2'(\sigma)+Q_2(\sigma)\right\}. \tag{1,13}$$

$$\overline{P}_1(\overline{\sigma}_1)+\frac{\overline{\sigma}_1+\frac{m}{\overline{\sigma}_1}}{1-\frac{m}{\sigma_1^2}}P_1'(\sigma_1)+Q_1(\sigma_1)+P_2(\sigma_1)+$$
$$+\frac{\sigma_1+\frac{m}{\overline{\sigma}_1}}{1-\frac{m}{\sigma_1^2}}P_2'(\sigma_1)+Q_2(\sigma_1)=0, \tag{1,14}$$

але $\quad \sigma_1=R_1\sigma;\quad \overline{\sigma}_1=\frac{R_1}{\sigma};$

в кінці одержуємо умову на внутрішньому контурі кільця

$$\overline{P}_1\left(\frac{R_1}{\sigma}\right)+\frac{R_1\sigma(R_1^2+m\sigma^2)}{R_1^2\sigma^2-m}P_1'(R_1\sigma)+Q_1(R_1\sigma)+\overline{P}_2\left(\frac{R_1}{\sigma}\right)+$$
$$+\frac{R_1\sigma(R_1^2+m\sigma^2)}{R_1^2\sigma^2-m}P_2'(R_1\sigma)+Q_2(R_1\sigma)=0. \tag{1,15}$$

Візьмемо умови (1,12) і (1,13), помножимо їх кожну зокрема на $\frac{1}{2\pi i}\frac{db}{\sigma-\zeta}$ і проінтегруємо по одиночному колі спершу кола $(\zeta)>1$, а потім кола $(\zeta)<1$. Тоді із умов (1,12) і (1,13) ми одержимо слідуючі чотири співвідношення:

$$-\frac{(1+m\zeta^2)\zeta}{\zeta^2-m}\varphi_0'(\zeta)-\psi_0(\zeta)+\frac{(1-m)^2}{8}AiR^2\frac{1}{\zeta^2}=$$
$$=-P_1\left(\frac{1}{\zeta}\right)-\frac{(1+m^2)}{2}\left\{\frac{P_1'(\sqrt{m})}{\zeta-\sqrt{m}}+\frac{P_1'(-\sqrt{m})}{\zeta+\sqrt{m}}\right\}-$$
$$-\left\{\frac{(1+m\zeta^3)\zeta}{\zeta^2-m}P_2'(\zeta)+Q_2(\zeta)\right\}-b_0+\overline{c}_0, \tag{1,16}$$

де b_0 — коефіцієнт функції $\psi_0(\zeta)$ при її розвиненні в ряд довкола безконечно віддаленої точки.

$$\varphi_0\left(\frac{1}{\zeta}\right) - \frac{(1-m^2)}{8} AiR^2(\zeta^2-2) + b_0 = \bar{c}_0 + \frac{(1+m\zeta^2)\zeta}{\zeta^2-m} P_1'(\zeta) -$$

$$-\frac{1+m^2}{2}\left\{\frac{P_1'(\sqrt{m})}{\zeta-\sqrt{m}} + \frac{P_1'(-\sqrt{m})}{\zeta+\sqrt{m}}\right\} + Q_1(\zeta) + \bar{P}_2\left(\frac{1}{\zeta}\right). \qquad (1,17)$$

$$\frac{1}{\mu}\left\{\frac{(1+m\zeta^2)\zeta}{\zeta^2-m}\varphi_0'(\zeta) + \psi_0(\zeta)\right\} - \frac{1}{\mu} b_0 + \frac{\varkappa}{\mu}\frac{AiR^2}{8}\frac{1}{\zeta^2} -$$

$$-\frac{1}{\mu}\frac{AiR^2}{8}\frac{m(m-2)}{\zeta^2} = -\frac{\varkappa_1}{\mu_1}\bar{P}_1\left(\frac{1}{\zeta}\right) + \frac{1+m^2}{2}\frac{1}{\mu_1}\left\{\frac{P_1'(\sqrt{m})}{\zeta-\sqrt{m}} +\right.$$

$$\left.+\frac{P_1'(-\sqrt{m})}{\zeta+\sqrt{m}}\right\} + \frac{1}{\mu_1}\left\{\frac{(1+m\zeta^2)\zeta}{\zeta^2-m}P_2'(\zeta) + Q_2(\zeta) + \frac{\varkappa_1}{\mu_1}C_0\right. . \qquad (1,18)$$

$$\frac{x}{\mu}\varphi_0\left(\frac{1}{\varsigma}\right) - \frac{1}{\mu}b_0 - \frac{x}{\mu}\frac{AiR^2}{8}(m^2\zeta^2) + \frac{1}{\mu}\frac{AiR^2}{8}(1-2m)\zeta^2 +$$

$$+\frac{AiR^2}{4}\frac{1}{\mu}[(1-x)m-(1+m^2)] = \frac{\varkappa_1}{\mu_1}c_0 - \frac{1}{\mu_1}\left\{\frac{(1+m\zeta^2)\zeta}{\zeta^2-m}P_1'(\zeta) +\right.$$

$$\left.+Q_1(\zeta)\right\} + \frac{1}{\mu_1}\frac{1+m^2}{2}\left\{\frac{P_1'(\sqrt{m})}{\zeta-\sqrt{m}} + \frac{P_1'(-\sqrt{m})}{\zeta+\sqrt{m}}\right\} + \frac{\varkappa_1}{\mu_1}\bar{P}_2\left(\frac{1}{\zeta}\right). \quad (1,19)$$

Якщо до одержаних співвідношень приєднати вирази

$$b_0 + \frac{(1-m)^2}{4}AiR^2 = \bar{c}_0 + d_0,$$

$$\frac{1}{\mu}b_0 + \frac{AiR^2}{4}\frac{(\varkappa-1)m + (1+m^2)}{\mu} = \frac{1}{\mu_1}d_0 - \frac{\varkappa_1}{\mu_1}\bar{c}_0, \qquad (1,20)$$

які одержуємо із (1,12) і (1,13) через помноження цих співвідношень кожного зокрема на $\frac{1}{2\pi i}\frac{db}{\sigma}$ і інтегрування по одиночному колі, то тоді вирази (1,16), (1,17), (1,18), (1,19) разом з (1,20) на основі теореми Харнака будуть еквівалентні граничним умовам (1,12) і (1,13), з яких ми вийшли.

Візьмемо значення одержаних виразів на одиночному колі і розв'яжемо їх відносно функцій P_1, Q_1, P_2 і Q_2. Для цього помножимо (1,16) на $\frac{1}{\mu_1}$ і додамо до (1,18).

$$\overline{P}_1\left(\frac{1}{\sigma}\right)=\frac{\mu-\mu_1}{\mu(x_1+1)}\left\{\frac{(1+m\sigma^2)\sigma}{\sigma^2-m}\varphi_0'(\sigma)+\psi_0(\sigma)\right\}-$$

$$-\frac{AiR^2}{8}\frac{\mu(1-m)^2-\mu_1 m(m-2)+x\mu_1}{\mu(x_1+1)}\frac{1}{\sigma^2}+\bar{c}_0-\frac{\mu-\mu_1}{\mu(x_1+1)}b_0.$$

Визначаючи $c_0-\dfrac{\mu-\mu_1}{\mu(x_1+1)}$ із (1,20) і переходячи до спряжених значень, одержимо вираз для функції P_1

$$P_1(\sigma)=\frac{\mu-\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\left\{\frac{\sigma^2+m}{\sigma(1-m\sigma^2)}\overline{\varphi}_0'\left(\frac{1}{\sigma}\right)+\overline{\psi}_0\left(\frac{1}{\sigma}\right)\right\}+$$

$$+\frac{AiR^2}{8}\frac{\mu(1-m)^2-\mu_1 m(m-2)+\varkappa\mu_1}{\mu(x_1+1)}\sigma^2-$$

$$-\frac{AiR^2}{4}\frac{\mu(1-m)^2-\mu_1(\varkappa_1-1)m-\mu_1(1+m^2)}{\mu(\varkappa_1+1)}.$$

Помножуючи (1,17) на $\dfrac{1}{\mu_1}$ і додаючи до нього (1,19), найдемо для функції $P_2(\sigma)$ вираз

$$P_2(\sigma)=\frac{\varkappa\mu_1+\mu}{\mu\varkappa_1+1}\varphi_0(\sigma)-\frac{AiR^2}{8}\frac{(1-2m)\mu_1-\mu(1-m)^2-x\mu_1 m^2}{\mu(x_1+1)}\frac{1}{\sigma}. \tag{1,22}$$

Помножимо тепер вираз (1,16) на $\dfrac{x_1}{\mu_1}$ і віднімемо від нього рівняння (1,18); ми одержимо функцію $Q_2(\sigma)$ при значенні

$$P_1'(\sqrt{m})=-P_1'(-\sqrt{m})=-\frac{AiR_2}{4m\sqrt{m}}\frac{(1-2m)\mu_1-\mu(1-m^3)-\varkappa\mu_1 m^2}{\mu(\varkappa_1+1)}; \tag{1,23}$$

$$Q_2(\sigma)=\frac{(\varkappa_1-1)\mu-(\varkappa-1)\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{(1+m\sigma^2)\sigma}{\sigma^2-m}\varphi_0'(\sigma)+\frac{\varkappa_1\mu+\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\psi_0(\sigma)+$$

$$+\frac{AiR^2}{4}\left\{\frac{x\mu_1-\mu\varkappa_1(1-m)^2-\mu m(m-2)}{2\mu(\varkappa_1+1)}+\right.$$

$$\left.+\frac{(1-2m)\mu_1-\mu(1-m)^2-\varkappa\mu_1 m^2}{\mu(\varkappa_1+1)m}\right\}\frac{1}{\sigma^2}-\frac{\varkappa_1\mu+\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}b_0. \tag{1,24}$$

І, нарешті, помножуючи (1,17) на $\dfrac{x_1}{\mu_1}$ і віднімаючи від нього (1,19), ми найдемо вираз для функції $Q_1(\sigma)$ при тому ж значенні $P_1'(\sqrt{m})$:

$$Q_1(\sigma) = \frac{\varkappa_1\mu - \varkappa\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\ \bar{\varphi}_0\left(\frac{1}{\sigma}\right) +$$

$$\frac{AiR^2}{8}\ \frac{\varkappa\mu_1 m^2 - \mu_1(1-2m) - \varkappa_1\mu(1-m)^2}{\mu(\varkappa_1+1)}\sigma^2 - \frac{(1+m\sigma)\sigma}{\sigma^2-m}P_1'(\sigma) -$$

$$-\frac{1+m^2}{m}\ \frac{AiR^2}{4}\ \frac{(1-2m)\mu_1 - \mu(1-m)^2 - \varkappa\mu_1 m^2}{\mu(x_1+1)\ (\sigma^2-m)} +$$

$$+\frac{AiR^2}{4}\ \frac{(1-m^2)\varkappa_1\mu + \mu_1(\varkappa-1)m + (1+m^2)\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)} + \frac{\varkappa_1\mu+\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}b_0. \quad (1,25)$$

Одержаними значеннями функцій P_1, P_2, Q_1 і Q_2 поставлена задача звелася до першої основної задачі теорії пружності. Помножимо тепер умову (1,15) на $\frac{1}{2\pi i}\frac{d\sigma}{\sigma-\eta}$ і проінтегруємо по одиночному кола колі $|\eta|>1$.

Тоді ця умова буде рівноважна слідуючій:

$$\bar{P}_1\left(\frac{R_1}{\eta}\right) + Q_2(R_1\eta) + \frac{R_1\eta(R_1{}^2 - m\eta^2)}{R_1{}^2\eta^2 - m}P_2'(R_1\eta) - \bar{c}_0 +$$

$$+\frac{R_1{}^4+m^3}{2R_1{}^3}\left\{\frac{P_1'(\sqrt{m})}{R_1\eta-\sqrt{m}} + \frac{P_1'(-\sqrt{m})}{R_1\eta+\sqrt{m}}\right\} = 0. \quad (1,26)$$

Підставляючи в (1,26) значення входячих функцій, значення $P_1'(\sqrt{m}) = -P_1'(-\sqrt{m})$ із (1,23), а також значення $\bar{c}_0$, визначене із (1,20), одержимо

$$\frac{(\varkappa_1-1)\mu - (\varkappa-1)\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\ \frac{(1+mR_1{}^2\eta^2)R_1\eta}{R_1{}^2\eta^2-m}\varphi_0'(R_1\eta) +$$

$$+\frac{x\mu_1+\mu}{\mu(x_1+1)}\ \frac{R_1\eta(R_1{}^2+m\eta^2)}{R_1{}^2\eta^2-m}\varphi_0'(R_1\eta) +$$

$$+\frac{\mu-\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\ \frac{(R_1{}^2+m\eta^2)\eta}{R_1(\eta^2-mR_1{}^2)}\varphi_0'\left(\frac{\eta}{R_1}\right) +$$

$$+\frac{\varkappa_1\mu+\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\psi_0(R_1\eta) + \frac{\mu-\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\psi_0\left(\frac{\eta}{R_1}\right) +$$

$$+\frac{AiR^2}{8}\ \frac{(m-2)m(\mu_1R_1{}^4-\mu) - \mu(1-m)^2(R_1{}^4+x_1) - x\mu_1(R_1{}^4-1)}{\mu(x_1+1)}\ \frac{1}{R_1{}^2\eta^2} +$$

$$+\frac{AiR^2}{4}\ \frac{(1-2m)\mu_1 - \mu(1-m)^2 - \varkappa\mu_1 m^2}{m\mu(\varkappa_1+1)}\ \frac{1-R_1{}^2}{R_1{}^2\eta^2} - b_0 = 0. \quad (1,27)$$

Взявши тепер значення, спряжене умові (1,15), і зробивши те ж саме, що ми зробили з умовою (1,15), знайдемо ще одне співвідношення, яке разом з (1,26) дасть можливість послідовно визначити коефіцієнти функцій φ_0 і ψ_0, а за ними коефіцієнти введених нами функцій.

Ця потрібна нам умова буде слідуюча:

$$P_2(R_1\eta)+\overline{Q}_1\left(\frac{R_1}{\eta}\right)+\frac{R_1^4+m^2}{2R_1\sqrt{m}}\left\{\frac{\overline{P}_1'(\sqrt{m})}{\sqrt{m}\,\eta-R}+\frac{\overline{P}_1'(-\sqrt{m})}{\sqrt{m}\,\eta+R_1}\right\}-d_0-$$

$$-\frac{R_1(R_1^2\eta^2+m)}{\eta(m\eta^2-R_1^2)}\overline{P}_1'\left(\frac{R_1}{\eta}\right)=0. \qquad (1,28)$$

Підставляючи сюди значення функцій і значення $P_1'(\sqrt{m})$, і виконуючи очевидні перетворення, одержимо друге співвідношення, про яке говорили ми вище:

$$\frac{\varkappa\mu_1+\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}\varphi_0(R_1\eta)+\frac{\varkappa_1\mu-\mu_1\varkappa}{\mu(\varkappa_1+1)}\varphi_0\left(\frac{\eta}{R_1}\right)-\frac{R_1(1-R_1^2)(m-\eta^2)}{\eta(R_1^2-m\eta^2)}\overline{P}_1'\left(\frac{R_1}{\eta}\right)+$$

$$+\frac{AiR^2}{4}\frac{(1-2m)\mu_1+\mu(1-m^2)-\varkappa\mu_1m^2}{\mu(x_1+1)}\frac{m(1+m^2)\eta^2-(R_1^4+m^2)}{m^2(R_1^2-m\eta^2)}-$$

$$-\frac{AiR^2}{8}\frac{\varkappa\mu_1m^3(R_1^4-1)-(1-2m)(\mu_1R_1^4-\mu)-\mu(1-m)^2(\varkappa_1R_1^4+1)}{\mu(\varkappa_1+1)}\frac{1}{R_1^2\eta^2}-$$

$$-\frac{AiR^2}{4}\frac{(1-m)^2\varkappa_1\mu+\mu_1(x-1)m+(1+m^2)\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}-d_0+\frac{\varkappa_1\mu+\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}b_0=0. \qquad (1,29)$$

При послідовному визначенні коефіцієнтів функцій із співвідношень (1,27) і (1,29) прийдеться кожний раз роз'язувати систему рівнянь з двома невідомими.

Якщо покласти $\mu=\mu_1$, $\varkappa=\varkappa_1$, тоді наша задача буде зводитись до наближеної розв'язки згину полоси з еліптичним отвором і із (1,27) і (1,29) одержуємо:

$$\psi_0(R_1\eta)+\frac{R_1\eta(R_1^2+m\eta^2)}{R_1^2\eta^2-m}\varphi_0'(R_1\eta)-\frac{AiR^2}{\gamma}\frac{(R_1^2-m)^2}{R_1^2\eta^2}-b_0=0;$$

$$\varphi_0(R_1\eta)+\frac{AiR^2}{\gamma}\frac{(R_1^2-m)^2}{R_1^2\eta^2}+b_0+\frac{AiR^2}{4}m-d_0=0.$$

Але в даному випадку $d_0=b_0-\frac{AiR^2}{4}m$. Відкидаючи постійний складник в виразі для ψ_1, одержимо розв'язку, яка, як і треба було чекати, сходиться з розв'язкою Мусхелішвілі.

Так як $m = \frac{1 - K_1}{1 + K_1}$ не залежить від півосей внутрішнього еліпса, то, взявши K_1 близьким одиниці і зважаючи на умову конфокальності, рівності (1,27) і (1,29) дадуть наближений розв'язок задачі про згин полоси, коли в цю полосу впаяно з іншого матеріалу кільце, внутрішній контур якого еліпс, зовнішній — близький до кола.

Функції P_1, Q_1, P_2, Q_2 залежать від контурних умов на внутрішньому контурі кільця тільки через функції φ_0 і ψ_0. Внаслідок цього тими ж функціями може бути в деяких випадках розв'язана задача, коли внутрішній контур кільця не є вільний від діяння зовнішніх сил (наприклад, коли внутрішній контур кільця підлягає рівномірному тисненню).

Відзначимо, нарешті, що цим же методом може бути розв'язана задача про згин полоси із впаяним ізотропним кільцем з пружними константами, відмінними від пружних констант полоси, але з таким кільцем, область якого разом з всією рештою площини відобразилася б на круг при допомозі раціональної функції.

§ 2. ЧИСТИЙ ЗГИН ПОЛОСИ З ВПАЯНИМ ЕЛІПТИЧНИМ ЯДРОМ

Цю задачу ми будемо розв'язувати так, як розв'язували задачу про згин полоси із впаяним кільцем, тобто так, начеб ядро було впаяне в необмежену пластинку.

При такій постановці немає необхідності визначати знову функції P_1, Q_1, P_2 і Q_2. Досить в формулах (1,21), (1,22) (1,24), (1,25) положити $m = R_1^2$.

Це рівнозначно відображенню всієї площини з розрізом вздовж відрізку AB, що сполучає фокуси впаяної шайби на зовнішність круга радіуса R_1, при тому границя еліптичної шайби перетворюється в коло радіуса 1.

На колі круга радіуса R_1 граничні умови будуть

$$\varphi_1(\sigma_1) = \varphi_1(\bar{\sigma}_1)$$

і

$$\psi(\sigma) = \psi_1(\bar{\sigma}_1), \tag{2,1}$$

тому, що σ_1 і $\bar{\sigma}_1$ відповідає одна і та ж точка відрізку AB. При виконанні цих умов функції φ_1^0 і ψ_1^0 будуть приймати одні і ті ж самі значення при наближенні z до розрізу з тої і з другої сторони і, отже, будуть аналітичними функціями в нерозрізному еліпсі.

Вносячи в (2,1) замість φ_1 і ψ_1 їх значення із (1,11) і приймаючи до уваги значення функцій із (1,21), (1,22), (1,24) і (1,25) при $m = R_1^2$ після спрощень одержимо дві умови для визначення коефіцієнтів функцій φ_0 і ψ_0, а за ними і коефіцієнтів всіх дальших введених функцій.

Ці умови будуть слідуючі:

$$\frac{\mu-\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\,\frac{R_1(\sigma^2+1)}{\sigma(1-R^4\sigma^2)}\,\bar{\varphi}_0'\left(\frac{1}{R_1\sigma}\right)-\frac{x\mu_1+\mu}{\mu(\varkappa_1+1)}\,\varphi_0\left(\frac{R_1}{\sigma}\right)+$$

$$+\frac{\mu-\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\,\bar{\psi}_0\left(\frac{1}{R_1\sigma}\right)-\frac{AiR^2}{8}\,\frac{(\mu-\mu_1)(1-R_1^2)(1-R_1^4)}{\mu R_1^2(\varkappa_1+1)}\,\sigma^2-$$

$$-\frac{\mu-\mu_1}{\mu(x_1+1)}\,b_0=0; \qquad (2,2)$$

і

$$\frac{\varkappa'\mu-\varkappa\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\,\bar{\varphi}_0\left(\frac{1}{R_1\sigma}\right)-\frac{(\varkappa_1-1)\mu-(\varkappa-1)\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\,\frac{\sigma^2+R_1^4}{R_1(1-\sigma^3)\sigma}\,\varphi_0'\left(\frac{R_1}{\sigma}\right)-$$

$$-\frac{\varkappa_1\mu+\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\,\psi_0\left(\frac{R_1}{\sigma}\right)+\frac{\sigma(1+R_1^4\sigma^2)}{R_1(1-\sigma^2)}\,P_1'(R_1\sigma)-$$

$$-\frac{AiR^2}{8}\,\frac{(1-2R_1^2)\mu_1-(1-R_1^2)^2\mu-\varkappa\mu_1R_1^4}{\mu(\varkappa_1+1)}\,\frac{1-R_1^4+\sigma^2(\sigma^2-1)}{R_1^4(\sigma^2-1)}+$$

$$+\frac{AiR^2}{8}\,\frac{(R_1^4-1)\{\varkappa\mu_1(R_1^4+1)-\varkappa_1\mu(1-R_1^2)^2\}+}{\mu(\varkappa+1)}$$

$$\frac{+R_1^2\{(R_1^2-2)\mu-(1-2R_1^2)R_1\mu_1\}}{\mu(\varkappa+1)}+\frac{\varkappa_1\mu+\mu_1}{\mu(\varkappa_1+1)}\,b_0=0. \qquad (2,3)$$

Замінюючи кожний член виразів (2,2) і (2,3) відповідним рядом, зрівнюючи коефіцієнти при однакових степенях σ, ми послідовно визначимо коефіцієнти функцій φ_0 і ψ_0 за винятком коефіцієнта b_0, який можна припустити рівним нулю.

При цьому нам доведеться для кожної пари відповідних коефіцієнтів функцій φ_0 і ψ_0 розв'язувати систему рівнянь першої степені з двома невідомими.

М. П. ШЕРЕМЕТЬЕВ. ЧИСТЫЙ ИЗГИБ БАЛКИ, ОСЛАБЛЕННОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ОТВЕРСТИЕМ С ВПАЯННЫМ В ЭТО ОТВЕРСТИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ КОЛЬЦОМ

Резюме

В настоящей работе дано приближенное решение задачи об изгибе балки с эллиптическим отверстием и впаянным в это отверстие эллипти-

ческим кольцом, упругие постоянные которого отличны от упругих постоянных балки. При этом предполагается, что размеры отверстия малы по сравнению с шириной балки.

Полученные результаты решают также задачу об изгибе балки с впаянной в эллиптическое отверстие шайбой.

Решение задачи получается методом конформных отображений.

Наукові записки Львівського Державного Університету імені Ів. Франка
Том V Серія фізико-математична, вип. 2 1947

О. С. КОВАНЬКО

ІНТЕГРАЛ СТІЛЬТЬЄСА ТА ТЕОРЕМА ПРО СЕРЕДНЄ ЗНАЧЕННЯ

Використовуючи поняття та властивості інтегралу Стільтьєса, можна надзвичайно просто вивести формули середнього значення для означеного інтегралу, відомі під назвою першої та другої формули середнього значення.

Хай $\Phi(x)$ — неперервна, а $f(x)$ — монотонна функції на $(a \leqslant x \leqslant b)$.

Ми знаємо з теорії інтегралу Стільтьєса, що тоді

$$\int_a^b \Phi(x)\,df(x) = \Phi(c)\,[f(b-o) - f(a+o)]. \tag{1}$$

Якщо $f(x) = \int_a^x \psi(t)\,dt$ (де $\psi(t)$ постійного знаку), тоді формулу (1) можна переписати, опираючись на абсолютну неперервність $f(x)$, в такому вигляді:

$$\int_a^b \Phi(x)\,\psi(x)\,dx = \Phi(c)\int_a^b \psi(x)\,dx \tag{2}$$

Це відома п е р ш а формула середнього значення.

Візьмемо тепер формулу інтегрування по частинам в теорії інтегралу Стільтьєса

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = \left[f(x)\int_a^x \varphi(t)\,dt \right] - \int_a^b \left\{ \int_a^x \varphi(t)\,dt \right\} df(x)$$

або

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(b-o)\int_a^b \varphi(x)\,dx - \int_a^b \left\{ \int_a^x \varphi(t)\,dt \right\} df(x). \tag{3}$$

Примінюючи до інтегралу лівої частини формулу (1), в якій ми поклали $\Phi(x) = \int_a^x \varphi(t)\,dt$, ми одержимо

$$\int_a^b \left\{ \int_a^x \varphi(t)\,dt \right\} df(x) = \int_a^c \varphi(x)\,dx\,[f(b-o) - f(a+o)]. \tag{4}$$

Підставляючи значення інтегралу (4) в формулу (3), **одержимо**

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(b-o)\int_a^b \varphi(x)\,dx - \int_a^c \varphi(x)\,dx\,[f(b-o) - f(a+o)] =$$

$$= f(b-o)\int_a^c \varphi(x)\,dx + f(b-o)\int_x^b \varphi(x)\,dx - \int_a^b \varphi(x)\,dx\,[f(b-o) - fa(+o)],$$

звідки остаточно

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(a+o)\int_a^c \varphi(x)\,dx + f(b-o)\int_c^b \varphi(x)\,dx. \tag{5}$$

Це відома д р у г а формула середнього значення.

А. С. КОВАНЬКО. ИНТЕГРАЛ СТИЛЬТЬЕСА И ТЕОРЕМА О СРЕДНЕМ ЗНАЧЕНИИ

Резюме

В этой работе автор даёт исключительно простой способ вывода первой и второй теорем о среднем значении, используя теории интеграла Стильтьеса.

Наукові записки Львівського Державного Університету імені Ів. Франка
Том V Серія фізико-математична, вип. 2 1947

О. С. КОВАНЬКО

ПРО ІСНУВАННЯ ІНТЕГРУЮЧОГО МНОЖНИКА ДИФЕРЕНЦІАЛА ТРЬОХ ЗМІННИХ

В цій статті ми розглянемо відоме класичне питання інтегрувальності рівняння виду

$$Adx + Bdy + Cdz = 0 \tag{1}$$

одним співвідношенням або, що те саме, питання існування інтегруючого множника ϱ, що перетворює ліву частину (1) в новий диференціал.

Цю задачу будемо трактувати і розв'язувати методом векторного аналізу.

Розглядаючи A, B і C як проекції деякого вектору $\overline{R}$, ми можемо записати (1) в такому векторному виді:

$$R\, d\overline{r} = 0, \tag{1'}$$

де $\overline{r}$ — радіус-вектор або координатний вектор простору.

Задача тепер ставиться так:

Дано поле векторів $\overline{R}(x, y, z)$. Питається: при яких умовах існує такий скалярний множник $\varrho(x, y, z)$, що ϱ, $\overline{R}$ є градієнт деякої функції $U(x, y, z)$ тобто

$$\text{grad } U = \varrho R. \tag{2}$$

Відповідь на цю задачу дається наступною теоремою:

Теорема: Необхідна та достатня умова існування рівності (2) (а, значить, і відповідних ϱ і U) полягає в тому, що

$$\overline{R} \operatorname{rot} \overline{R} = 0 \tag{3}$$

або інакше $\overline{R} \perp \operatorname{rot} R.$

Доведення:

1) Умова необхідна:

Нехай (2) має місце, тоді, беручи rot обох частин (3), дістанемо:

$$\text{rot}\,(\text{grad}\, U) = \varrho\, \text{rot}\, \overline{R} + (\text{grad}\, \varrho \times R).$$

Але $$\text{rot}\,(\text{grad}\, U) = 0.$$

Отже $$\varrho\, \text{rot}\, \overline{R} + \overline{R}\,(\text{grad}\, \varrho \times R) = 0. \tag{4}$$

Помножаючи (4) скалярно на $\overline{R}$, одержимо

$$\varrho\, (R\, \text{rot}\, \overline{R}) + \overline{R}\,(\text{grad}\, \varrho \times \overline{R}) = 0, \tag{5}$$

але $\overline{R}\,(\text{grad}\, \varrho \times \overline{R}) = 0$, оскільки мішаний добуток містить два однакових множники.

А звідси виникає, що

$$\overline{R}\, \text{rot}\, \overline{R} = 0, \tag{6}$$

що й треба довести.

2) Умова теореми достатня.

Отже, нехай (3) має місце.

Нехай ϱ_1 — довільний скаляр, тоді

$$\text{rot}\,(\overline{R}\, \varrho_1) = \varrho_1\, \text{rot}\, \overline{R} + (\text{grad}\, \varrho_1 \times R). \tag{7}$$

Помножаючи обидві частини (7) скалярно на $\overline{R}$, одержимо:

$$R\, \text{rot}\,(R\, \varrho_1) = \varrho_1\, (R\ \text{rot}\, \overline{R}) + \overline{R}\,(\text{grad}\, \varrho_1 \times \overline{R}).$$

Але тому, що обидва доданки правої частини рівні нулеві, то

$$\overline{R}\ \text{rot}\,(\overline{R}\, \varrho_1) = 0. \tag{8}$$

Оберемо ϱ_1, як інтегруючий множник виразу $R_x dx + R_y dy$,* причому z вважаємо постійним параметром. Такий множник завжди існує для диференціалів двох змінних.

Хай $V(x, y, z)$ є та функція (z входить як параметр), для якої

$$d\, V_{(x,\ y)} = \varrho\, R_x\, dx + \varrho\, R_y\, dy, \tag{9}$$

звідки

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \varrho\, R_x\, ;\ \frac{\partial V}{\partial y} = \varrho\, R_y\, ; \tag{10}$$

* Rx, Ry. Rz — проекції R на осі координат.

тоді

$$\operatorname{rot}(R\varrho_1) = \left(\frac{\partial(R_z\varrho_1)}{\partial y} - \frac{\partial(R_y\varrho_1)}{\partial z}\right)\bar{i} +$$

$$+\left(\frac{\partial(R_z\varrho_1)}{\partial z} - \frac{\partial(R_z\varrho_1)}{\partial x}\right)\bar{j} + \underbrace{\left(\frac{\partial(R_y\varrho_1)}{\partial x} - \frac{\partial(R_x\varrho_1)}{\partial y}\right)}_{o}\bar{k} =$$

$$= \left(\frac{\partial(R_z\varrho_1)}{\partial y} - \frac{\partial^2 V}{\partial z\partial y}\right)\bar{i} + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial z\partial z} - \frac{\partial(R_z\varrho_1)}{\partial x}\right)\bar{j} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left[R_z\varrho_1 - \frac{\partial V}{\partial z}\right]\bar{i} + \frac{\partial}{\partial x}\left[R_z\varrho_1 - \frac{\partial V}{\partial z}\right]\bar{j},$$

звідси

$$\bar{R}.\operatorname{rot}(\bar{R}\varrho_1) = R_x\frac{\partial}{\partial y}\left[R_z\varrho_1 - \frac{\partial V}{\partial z}\right] - R_y\frac{\partial}{\partial x}\left[R_z\varrho_1 - \frac{\partial V}{\partial z}\right] =$$

$$= \left\{\frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left[\varrho_1 R_z - \frac{\partial V}{\partial z}\right] - \frac{\partial V}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left[\varrho_1 R_z - \frac{\partial V}{\partial z}\right]\right\}\frac{1}{\varrho_1} =$$

$$= \frac{1}{\varrho_1}\cdot\frac{D\left[V, \left(R_z\varrho_1 - \frac{\partial V}{\partial z}\right)\right]}{D(x, y)} = o.$$

А тому з відомих властивостей якобіану $R_z\varrho_1 - \frac{\partial V}{\partial z} = \varphi(V, z)$, де φ — символ довільної функції (z входить під символ φ як параметр)

$$\bar{R}\varrho_1 = \varrho_1 R_x\bar{i} + \varrho_1 Ry\,j + \varrho_1 R_z\bar{k} = \frac{\partial V}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial V}{\partial y}j +$$

$$+\left[\frac{\partial V}{\partial z} + \varphi(V, z)\right]\bar{k} = \operatorname{grad} V + \varphi(V, z)\,k.$$

(Тут z входить як рівноправне з x та y змінне). Звідси:

$$\operatorname{rot}(\bar{R}\varrho_1) = \operatorname{rot}(\operatorname{grad} V) + \operatorname{rot}[\varphi(V, z)\cdot\bar{k}] =$$

$$= \operatorname{rot}[\varphi(V, z)\cdot\bar{k}] = \varphi(V, z)\underbrace{\operatorname{rot}\bar{k}}_{o} + [\operatorname{grad}\varphi(V, z\times\bar{k}] =$$

$$= \left[\frac{\partial\varphi}{\partial V}\operatorname{grad} V + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\operatorname{grad} z\right]\times\bar{k} = \frac{\partial\varphi}{\partial V}(\operatorname{grad} V\times\bar{k}) +$$

$$+\frac{\partial\varphi}{\partial z}(\operatorname{grad} z\times\bar k)=\frac{\partial\varphi}{\partial V}\left(\frac{\partial V}{\partial x}[\bar i\times\bar k]+\frac{\partial V}{\partial y}[\bar j\times\bar k]\right)=$$

$$=\frac{\partial\varphi}{\partial V}\left(-\frac{\partial V}{\partial x}\bar j+\frac{\partial V}{\partial y}\bar i\right).$$

Отже

$$\operatorname{rot}(R\varrho_1)=\left[-\frac{\partial V}{\partial x}\bar j+\frac{\partial V}{\partial y}\bar i\right]\frac{\partial\varphi}{\partial V}. \quad (11)$$

Візьмемо тепер деякий скаляр $\varrho_2=\Phi(V,z)$ і розглянемо величину

$$\operatorname{rot}(\bar R\,\varrho_1\,\varrho_2);$$

$$\operatorname{rot}(R\,\varrho_1\,\varrho_2)\,\varrho_2\operatorname{rot}(\bar R\,\varrho_1)+(\operatorname{grad}\varrho_2\times R\,\varrho_1). \quad (12)$$

Але

$$\operatorname{grad}\varrho_2=\frac{\partial\Phi}{\partial V}\operatorname{grad}V+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\operatorname{grad}z=$$

$$=\frac{\partial\Phi}{\partial V}\operatorname{grad}V+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\bar k.$$

Звідси $\operatorname{grad}\varrho_2\times\bar R\varrho_1$ вираховується так:

Беремо значення $\operatorname{grad}\varrho_2$ і $\bar R\varrho_1$

$$\operatorname{grad}\varrho_2\times\bar R\varrho_1=\left[\frac{\partial\Phi}{\partial V}\operatorname{grad}V+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\bar k\right]\times[\operatorname{grad}V+\varphi(V,z)\,\bar k]=$$

$$=\frac{\partial\Phi}{\partial z}(k\times\operatorname{grad}V)+\frac{\partial\Phi}{\partial V}\varphi(V,z)\cdot(\operatorname{grad}V\times\bar k)=$$

$$=\left[\frac{\partial\Phi}{\partial V}\varphi(V,z)-\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right]\cdot\left[\operatorname{grad}V\times\bar k\right]=$$

$$=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial V}\varphi(V,z)-\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)\cdot\left(-\frac{\partial V}{\partial x}\bar j+\frac{\partial V}{\partial y}\bar i\right).$$

Вставляючи одержане значення $(\operatorname{grad}\varrho_2\times\bar R\,\varrho_1)$, а також значення $\operatorname{rot}(\bar R\,\varrho_1)$ з формули (11) в формулу (12), знаходимо:

$$\operatorname{rot}(R\,\varrho_1\,\varrho_2)=\Phi(V,z)\left[-\frac{\partial V}{\partial x}\bar j+\frac{\partial V}{\partial y}\bar i\right]\frac{\partial\varphi}{\partial V}+$$

$$+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial V}\cdot\varphi(V,z)-\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)\left[-\frac{\partial V}{\partial x}\bar j+\frac{\partial V}{\partial y}\bar i\right]=$$

$$=\left(\Phi\frac{\partial\varphi}{\partial V}+\frac{\partial\Phi}{\partial V}\varphi-\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)\left[-\frac{\partial V}{\partial x}\bar j+\frac{\partial V}{\partial y}i\right].$$

Виберемо Φ так, щоб

$$\Phi \frac{\partial \varphi}{\partial V} + \frac{\partial \Phi}{\partial V} \varphi - \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0,$$

звідки

$$\frac{\partial \ln \Phi}{\partial V} \varphi - \frac{\partial \ln \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial V} = 0. \tag{13}$$

Ми прийшли до лінійного рівняння (13).

Розв'язавши його, знаходимо функцію $\Phi = \Phi(V, z)$, а тоді

$$\mathrm{Rot}\,(\overline{R}\,\varrho_1\,\varrho_2) = 0.$$

Поклавши $\varrho = \varrho_1 \varrho_2$, ми бачимо, що ϱ являється шуканим множником, тому що, якщо

$$\mathrm{Rot}\,(R\,\varrho) = 0,$$

значить існує така функція $U(x, y, z)$, що $R\,\varrho = \mathrm{grad}\,U$.

Достатність умови доведена.

Отже, теорема доведена повністю.

А. С. КОВАНЬКО. О СУЩЕСТВОВАНИИ ИНТЕГРИРУЮЩЕГО МНОЖИТЕЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛА ТРЕХ ПЕРЕМЕННЫХ

Резюме

В этой работе автор даёт необходимое и достаточное условие существования интегрирующего множителя для уравнения вида $Adx + Bdy + Cdr = 0$. Это условие даётся в векторной форме, а именно, в поле векторов R имеется такой скаляр ϱ, чтобы $\overline{R}\,\varrho$ был бы градиентом некоторой функции.

Это условие выражается так: $\overline{R} \perp \mathrm{rot}\,R$.

ЗМІСТ

Ученые записки
Львовского государственного университета
имени Ивана Франко
Том V. Серия физико-математическая. Выпуск 2
(на украинском языке)

БГ 03022. Зам. 876. Тираж 500. 14 республ. друк. м. Львів

Ціна 7 крб.