Наукові записки Львівського Державного Університету імені Ів. Франка
Том V Серія фізико-математична, вип. 2 1947

Я. Б. ЛОПАТИНСЬКИЙ

ПРО ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ КІЛЬЦЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ОПЕРАТОРІВ

Метою цієї статті являється встановлення деяких властивостей ідеалів у кільці диференціальних операторів.

Перший параграф носить підготовчий характер, основні результати викладені в другому параграфі. Наприкінці наводиться літературний вказівник, посилки на який вказані в тексті порядковим номером, заключеним в квадратові дужки.

1. Хай Γ — комутативне поле з характеристикою, яка рівна нулеві, що допускає n (лівих) операторів $d_1, \ldots, d_n$ з властивостями: якщо $a, b \subset \Gamma$; $i, j = 1, \ldots, n$, то $d_i a \subset \Gamma$; $d_i(a+b) = d_i a + d_i b$; $d_i(ab) = a d_i b + b d_i a$; $d_i(d_j a) = d_j(d_i a)$.

Таке поле буде зватися диференціальним.* Елемент $a \subset \Gamma$ буде зватися постійним, якщо $d_i a = o$ $(i = 1, \ldots, n)$. Легко бачити, що кожне раціональне число постійне.

Поле Γ, яке містить n елементів $a_1, \ldots, a_n$ з ненулевим якобіаном $|d_i a_j|$ („незалежні елементи"), буде зватися повним.

Важливість цього типу полів показує наступна лема, що належить Кольчину [1].

Лема 1. Хай $f_1(\varphi_1, \ldots, \varphi_k), \ldots, f_l(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$ — ненулеві поліноми неозначених $\varphi_1, \ldots, \varphi_k, \ldots, d_1^{i_1} \ldots d_n^{i_n} \ldots \varphi_j, \ldots$, з коефіцієнтами з повного поля Γ. Тоді існують елементи $b_1, \ldots, b_k \subset \Gamma$ такі, що $f_1(b_1, \ldots, b_k), \ldots, f_l(b_1, \ldots, b_k)$ відрізняються від нуля.**

Легко бачити, що повнота поля не тільки достатня, але й необхідна для справедливості леми. Дійсно, в неповному полі якобіан $|d_i \varphi_j|$ являється ненулевим поліномом неозначених $d_i \varphi_j$ $(i, j = 1, \ldots, n)$, який анулюється при довільній заміні $\varphi_j = b_j \subset \Gamma$ $(j = 1, \ldots, n)$.

* В дальшому Γ буде означати диференціальне поле (яке іноді зветься просто полем).

** d_i^0 розуміється як одиничний оператор d_0.

З полем Γ зв'язане кільце диференціальних операторів виду $\Sigma a_{i_1} \ldots _{i_n} d_1^{i_1} \ldots d_n^{i_n}$ $(a_{i_1} \ldots _{i_n} \subset \Gamma)$.

Сума тут припускається скінченою і розповсюдженою на різні сполуки цілих невід'ємних індексів $i_1, \ldots i_n$*. Всі такі суми з нулевим коефіцієнтом утотожнюються (нуль кільця $\Delta(\Gamma)$). Додавання в $\Delta(\Gamma)$ визначається очевидним способом, множення — аксіомами кільця та умовами: якщо $a \subset \Gamma$; $\alpha = d_i^{i_1} \ldots d_n^{i_n}$; $i, j = 1, \ldots, n$, то $d_i d_j = d_j d_i$, $d_i (a \alpha) = (d_i a) \alpha + a (d_i \alpha)$, $d_0 (a d_i) = (a d_i) d_0 = a d_i$.

Очевидно $\Delta(\Gamma)$ є кільцем з одиницею (d_0), без дільників нуля. Якщо Γ є полем постійних, то $\Delta(P)$ — комутативне; в противному разі $\Delta(\Gamma)$ не комутативне.

Дійсно, якщо, наприклад, $d_1 a \neq o$ $(a \subset \Gamma)$, то $d_1(ad_1 = ad_1^2 + (d_1 a) d_1 \neq (ad_1) d_1$.

В кільці $\Delta(\Gamma)$ існує інволютивний обернений автоморфізм I, вказаний Фробеніусом [2]:

$$\Sigma a_{i_1} \ldots _{i_n} d_1^{i_1} \ldots d_n^{in} \to \Sigma (-1)^{i_1 + \ldots + i_n} d_1^{i_1} \ldots d_n^{i_n} (a_{i_1} \ldots _{i_n} d_0).$$

Це перехід до спряженого оператору. А саме:

$$I^2 = 1;\ I(\alpha + \beta) = I(\alpha) + I(\beta);\ I(\alpha\beta) = I(\beta) I(\alpha)$$

(I — тотожний автоморфізм $\Delta(\Gamma)$; $\alpha, \beta \subset \Delta(\Gamma)$).

Ця обставина дозволяє переносити кожну властивість лівих ідеалів кільця $\Delta(\Gamma)$ на праві ідеали (і навпаки). Як було показано Е. Нетер [3], кожний лівий (і, значить, правий) ідеал кільця $\Delta(\Gamma)$ має скінченний базис.

Очевидним способом проводяться операції над матрицями, з елементами $\Delta(\Gamma)$; при цьому матриця першого порядку $(\alpha) = \alpha$. Матриці $A_1, \ldots, A_k$, що складаються з одного рядка і однакової кількості стовбців („рядки"), звуться лінійно-незалежними (зліва), якщо $\alpha_1 A_1 + \ldots + \alpha_k A_k = 0$ $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k \subset \Delta(\Gamma))$ виникає $\alpha_i = o$ $(i = 1, \ldots, k)$.

Як було показано автором [4], для довільних елементів $\alpha, \beta \subset \Delta(\Gamma)$ можна підібрати такі елементи $\lambda, \mu \subset \Delta(\Gamma)$, що $\lambda \alpha = \mu \beta$ і λ або $\mu \neq o$. Очевидно, якщо $\alpha \neq o$, то $\mu \neq o$. Таким чином довільні два елементи з $\Delta(\Gamma)$ залежні (ліворуч, а також і праворуч).

2. В випадку, коли Γ є повним полем, теорема про скінченний базис (Е. Нетер) для ідеалів в $\Delta(\Gamma)$ може бути уточнена.

---

* Максимальна сума $i_1 + \ldots + i_n$ (в припущенні, що $a_{i_1} \ldots _{i_n} \neq o$ буде зватися степінню елементу).

Передусім буде доведена

Лема 2. Хай $A_1, \ldots, A_k$ — лінійно-незалежні строки довжини k; $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ — ненулеві елементи з $\Delta(\Gamma)$. Якщо поле коефіцієнтів Γ повне, то можна підібрати такі елементи $a_1, \ldots, a_k \subset \Gamma$, що строки $A_1, \ldots, A_k$ і $A = (\alpha_1 a_1 d_0, \ldots, \alpha_k a_k d_0)$ утворюють матрицю, яка має обернену матрицю зліва.

Доведення: Хай $U_{ii_1\ldots i_n}$ позначає строку довжини k, спеціального виду: елемент строки, що займає i — місце дорівнює $d_1^{i_1}\ldots d_n^{i_n}$, інші — дорівнюють нулеві.

Хай s — найвища степінь елементів $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ і елементів з $\Delta(\Gamma)$, що складають строки $A_1, \ldots, A_k$.

Приєднуючи до Γ неозначені $\varphi_1, \ldots, \varphi_k, \ldots, d_1^{i_1}\ldots d_n^{i_n}\varphi_j, \ldots$ утворюють поле розширення — Γ_φ, яке буде, очевидно, диференціальним полем (примінення операторів $d_1 \ldots, d_n$ до приєднаних елементів підказується позначеннями). Для кожного i вводиться слідуюча впорядкованність похідних: $d_1^{i_1}\ldots d_n^{i_n}\varphi_i$; $d_1^{i_1}\ldots d_n^{i_n}\varphi_i$ йде перед $d_1^{j_1}\ldots d_n^{j_n}\varphi_i$, якщо в послідовності $\sum\limits_{l=1}^{n}(j_e - i_e)$, $j_n - i_n, \ldots, j_1 - i_1$, існують ненулеві числа, причому перше з таких чисел — додатнє.

Хай $A_\varphi = (\alpha_1 \varphi_1 d_0, \ldots, \alpha_k \varphi_k d_0)$. Розглядаємо множини елементів виду:

$$d_1^{i_1}\ldots d_n^{i_n} A_i = \Sigma\, a_{ii_1\ldots i_n}^{jj_1\ldots j_n} u_{jj_1\ldots j_n}, \tag{I}$$

$$d_1^{i_1}\ldots d_n^{i_n} A_\varphi = \Sigma\, a_{i_1\ldots i_n}^{jj_1\ldots j_n}(\varphi) u_{jj_1\ldots j_n}. \tag{II}$$

Тут $i_1 + \ldots + i_n \leqslant m - s$ (m — деяке додатнє число більше s); $j_1 + \ldots + j_n \leqslant m$; $i, j = 1, \ldots, k$; $a_{ii_1\ldots i_n}^{jj_1\ldots j_n} \subset \Gamma$; $a_{i_1\ldots i_n}^{jj_1\ldots j_n}(\varphi) \subset \Gamma_\varphi$. Очевидно, $a_{i_1\ldots i_n}^{jj_1\ldots j_n}(\varphi)$ являються поліномами відносно $\varphi_1 \ldots, \varphi_k \ldots, d_1^{i_1}\ldots d_n^{i_n}\varphi_j \ldots$, причому вища похідна $d_1^{i_1}\ldots d_n^{i_n}\varphi_i$ в розкладі $d_1^{i_1}\ldots d_n^{i_n} A_\varphi$ входить в коефіцієнт при $U_{i0\ldots 0}$ і відсутня в інших коефіцієнтах. Елементи (I) лінійно-незалежні над Γ_φ. Дійсно, в противному разі, ця залежність мала б місце і над Γ, що приводило б до лінійної залежності $A_1 \ldots, A_k$ над $\Delta(\Gamma)$. Нехай елементи $d_1^{i_1}\ldots d_n^{i_n} A_i - a_{ii_1\ldots i_n}^{10\ldots 0} U_{10\ldots 0}$ (III) лінійно-залежні над Γ_φ (і, значить, над Γ).

Тоді $\sum\limits_{ii_1\ldots i_n} c_{ii_1\ldots i_n}(d_1^{i_1}\ldots d_n^{i_n} A_i - a_{ii_1\ldots i_n}^{10\ldots 0} U_{10\ldots 0}) = 0$, де $c_{ii_1\ldots i_n}$ — елементи з Γ, не рівні нулеві в сукупності.

Значить, $\sum\limits_{ii_1\ldots i_n} c_{ii_1\ldots i_n} a^{1\,o\ldots o}_{ii_1\ldots i_n} = g_i \neq o$ і

$$\sum_i \alpha_i A_i = g_1 U_{1\,o\ldots o} \cdot (\alpha_i \subset \Delta(\Gamma)).$$

Хай тепер елементи (III) лінійно-незалежні над Γ_φ; і в цьому випадку дістанемо співвідношення того ж виду.

При достатньо великому m, елементи (I), (II) і, значить, відповідні елементи

$$d_1^{i_1}\ldots d_n^{i_n} A_i - a^{1\,o\ldots o}_{ii_1\ldots i_n} U_{1\,o\ldots o},\ d_1^{i_1}\ldots d_n^{i_n} A_\varphi - a^{1\,o\ldots o}_{i_1\ldots i_n}(\varphi)\, U_{1\,o\ldots o}$$

лінійно залежні над Γ_φ. Дійсно, кількість цих виразів

$$(k+1)\binom{n+m-s}{n},\ \text{при}\ m > \frac{nk^{\frac{1}{n}} + s(k+1)^{\frac{1}{n}}}{(k+1)^{\frac{1}{n}} - k^{\frac{1}{n}}}$$

перевищує кількість символів $U_{jj_1\ldots j_n}$, що беруть участь в цих виразах, яка дорівнює $K\binom{n+m}{n}$.

Хай $B_t = d_1^{i_1(t)}\ldots d_n^{i_n(t)} A_\varphi - a^{1\,o\ldots o}_{i_1(t)\ldots i_n(t)}\, u_{1\,o\ldots o}$, $(t = 1\,\ldots, l)$ є одною з таких мінімальних систем, що вирази (III) і $B_1\,\ldots, B_l$ залежні над Γ_φ. Хай $d_1^{i_1(1)}\ldots d_n^{i_n(1)} A_\varphi$ містить похідну $d_1^{i_1}\ldots d_n^{i_n}\varphi_1$, наступну після всіх інших похідних φ_1, що містяться в $d_1^{i_1(t)}\ldots d_n^{i_n(t)} A_\varphi$ $(t = 2\,\ldots, l)$; це має місце, тому що всі $d_1^{i_n(t)}\ldots d_n^{i_n(t)}$ $(t = 1\,\ldots, l)$ різні. Тоді всі коефіцієнти при $U_{jj_1\ldots j_n}$ в $d_1^{i_1(t)}\ldots d_n^{i_n(t)}\, A_\varphi$ $(t = 1\,\ldots, l)$, крім $a^{1\,o\ldots o}_{i_1(1)\ldots i_n(1)}(\varphi)$ не містять $d_1^{i_1}\ldots d_n^{i_n}\varphi_1$; значить, можна припускати, що не рівні нулеві в сукупності коефіцієнти залежності

$$\sum_{ii_1\ldots i_n} c_{ii_1\ldots i_n}(\varphi)\ (d_1^{i_1}\ldots d_n^{i_n} A_i - a^{1\,o\ldots o}_{ii_1\ldots i_n} U_{1\,o\ldots o}) + \sum_{t=1}^{l} e_t(\varphi) B_t = o,$$

також не містять $d_1^{i_1}\ldots d_n^{i_n}\varphi_1$. При цьому, з властивості мінімальності $B_1\ldots B_l$, $e_t(\varphi) \neq o$ $(t = 1\,\ldots, l)$. З цієї залежності дістаємо далі:

$$\sum_{ii_1\ldots i_n} c_{ii_1\ldots i_n}(\varphi)\, d_1^{i_1}\ldots d_n^{i_n} A_i + \sum_{t=1}^{l} c_t(\varphi)\, d_1^{i_1(t)}\ldots d_n^{i_n(t)} A_\varphi =$$

$$= (\sum_{ii_1\ldots i_n} c_{ii_1\ldots i_n}(\varphi)\, a^{1\,o\ldots o}_{ii_1\ldots i_n} + \sum_{t=1}^{l} e_t(\varphi)\, a^{1\,o\ldots o}_{i_1(t)\ldots i_n(t)}\, U_{1\,o\ldots o} =$$

$$= g_1(\varphi)\, U_{1\,o\ldots o},$$

згідно з зробленими зауваженнями $g_1(\varphi) \neq o$.

Аналогічно опреділюється $g_2(\varphi) \ldots, g_k(\varphi)$ (при заміні в приведеному доведенні $\varphi_1, U_{1o\ldots o}$ відповідно через $\varphi_i\ U_{io\ldots o}$. За лемою I опреділюються такі $a_1 \ldots, a_k \subset \Gamma$, що $g_i(a)$ ($\subset \Gamma$) не рівні нулеві ($i = 1 \ldots, k$).

Тоді одержимо залежності виду

$$U_{io\ldots o} = \sum_{j=1}^{k} \beta_{ij} A_j + \beta_i A_a \ (i = 1 \ldots, k), \text{ де } \beta_{ij},\ \beta_i \subset \Delta(\Gamma).$$

Приймаючи $A_a = (\alpha_1 a_1 d_0 \ldots,\ \alpha_k a_k d_0) = A$, дістають твердження леми.

На цій лемі грунтуються наступні теореми.

Теорема I. Якщо поле Γ повне, то кожний лівий (правий) ідеал з $\Delta(\Gamma)$ має базис не більше, ніж з двох елементів.

Доведення. Хай $\mathfrak{M}$ — лівий ідеал з $\Delta(\Gamma)$. За теоремою Е. Нетер цей ідеал має скінченний базис $\alpha_1 \ldots, \alpha_k$.

Для нулевого ідеалу справедливість твердження леми очевидна. Хай $\mathfrak{M} \neq 0$ і $k > 1$, тоді можна припускати $\alpha_1 \neq 0$. Тоді існують елементи β_i, γ_i ($i = 2 \ldots, k$) з $\Delta(\Gamma)$ такі, що $\beta_i d_1 = \gamma_i d_i$ і $\gamma_i \neq 0$ ($i = 2 \ \ldots, k$). Строки (довжини k): $A_1 = (d_0 \ldots)$, $A_i = (-\beta_i \ldots, \gamma_i \ldots)$ ($i = 2 \ldots, k$; γ_i займає i — місце; невиписані елементи рядків рівні нулеві), очевидно, лінійно-незалежні. Згідно з лемою 2 існує рядок $A = (a_1 d_0 \ldots, a_k d_0)$, ($a_1 \ldots, a_k \subset \Gamma$), такий, що матриця, складена із рядків $A_1 \ldots, A_k, A$ являється правим дільником одиничної матриці; тоді, очевидно,

$$A_1\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_k\end{pmatrix} = \alpha_1,\ A_i\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_k\end{pmatrix} = o\,(i=2\ldots,k),\ A\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_k\end{pmatrix} = a_1\alpha_1 + \ldots + a_k\alpha_k$$

також утворює базис ідеалу $\mathfrak{M}$.

Цей результат, за попереднім, справедливий і для правих ідеалів. Це доводить теорему.

Для випадку одного оператору диференціювання d ($n = 1$) в кільці $\Delta(\Gamma)$, як відомо, має місце алгорифм Евкліда.

Тому в $\Delta(\Gamma)$ (при довільному полі Γ) кожний ідеал являється головним.

Наступний приклад показує існування не головних ідеалів, при повному полі Γ.

Хай $n = 2$ і Γ містить елементи x_1, x_2 („аргументи") з властивостями $d_i x_i = 1$, $d_i x_j = o$ ($i \neq j$, $i, j = 1, 2$). Як легко перевірити, ідеал $\mathfrak{M}$ з базисом $d_1^2, d_1 d_2, d_2^2$ не являється головним. Цей ідеал має також базис $d_1^2, d_1 d_2 + x_1 d_2^2$. В випадку, якщо Γ містить тільки постійні, базис

$d_1^2, d_1 d_2, d_2^2$ ідеалу $\mathfrak{M}$ не може бути скорочений (в цьому випадку $\Delta(\Gamma)$ є кільцем поліномів з аргументами d_1, d_2).

Легко бачити, що принаймні, якщо Γ містить аргументи $x_1 \ldots, x_n$ ($d_i x_i = 1$, $d_i x_j = o$ при $i \neq j$) опреділення додаткового рядка A в лемі 2 і побудова базису ідеалу довжини не більше двох, практично може бути виконане і при тому за допомогою тільки скінченної кількості алгебричних дій та диференціювань.

Теорема. 2. Якщо Γ є повним полем, то кільце $\Delta(\Gamma)$ просте (тобто не містить двосторонніх ідеалів, відмінних від нулевого та одиничного).*

Обернене твердження також справедливе.

Доведення: Хай Γ — повне поле і $\mathfrak{M}$ — двосторонній ідеал в $\Delta(\Gamma)$, відмінний від нулевого.

Хай $\alpha \subset \Delta(\Gamma)$, $\alpha \neq 0$.

За лемою 2 існує такий елемент $a \subset \Gamma$, що лівий ідеал з базисом α, $\alpha a d_0$ — одиничний; але тоді і $\mathfrak{M}$ є одиничний ідеал.

Значить, (Γ) — просте кільце.

Хай тепер Γ не повне.

Хай k — максимальне число елементів $a_1 \ldots, a_k$ з Γ таких, що

$$\begin{vmatrix} d_1 a_1 \ldots d_k a_1 \\ \cdots\cdots \\ d_1 a_k \ldots d_k a_k \end{vmatrix} \neq 0,$$

(якщо Γ — поле постійних, то $k=0$) $0 \leqslant k < n$.

Тоді для кожного елементу $a \in \Gamma$

$$\begin{vmatrix} d_1 a_1 \ldots d_k a_1 \, d_{k+1} a_1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ d_1 a_k \ldots d_k a_k \, d_{k+1} a_k \\ d_1 a \ldots d_k a \;\, a_{k+1} \;\, a \end{vmatrix} = 0.$$

Ліва частина породжує оператор першої степені з Γ

$$\alpha = b_1 d_1 + \ldots + b_k d_k + b d_{k+1} \quad (b \neq 0);$$

при цьому, для кожного $a \in \Gamma$, $\alpha a = 0$.

Але тоді для кожного $\beta \subset \Delta(\Gamma)$, $\alpha\beta \equiv 0 \ (mod\ d_1 \ldots, d_{k+1})$ і двосторонній ідеал, породжений α, не містить одиниці. Значить, кільце (Γ) не просте.

---

* Для випадку одного диференціювання доведене Джекобсоном [5].

ЛІТЕРАТУРА

1. E. R. Kolchin. Extensions of differential ideals. Ann. of Math., 43, 1942.
2. G. Frobenius. Über den Begrift der Irreduzibilität in der Theorie der linearen Differentialgleichungen. J. f. r. a. Math. (Crelle's J.), 76, 1873.
3. E. Noether u. W. Schmeidler. Moduln in nichtkommutativen Bereichen, insbesondere aus Differential — und Differenzenausdrücken. Math. Z., 8, 1920.
4. Я. Б. Лопатинский. Некоторые свойства линейных дифференциальных операторов. Мат. сб., 17 (59):2, 1945.
5. N. Jacobson. Structure theory of simple rings without finitness assumptions. Trans. Am. Math. Soc., 57:2, 1945.

Я. Б. ЛОПАТИНСКИЙ. О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ.

Резюме

В настоящей заметке устанавливаются две теоремы:

1. Если поле коэфициентов кольца дифференциальных операторов, при n дифференцированиях, содержит n элементов с ненулевым Якобианом, то каждый идеал кольца дифференциальных операторов порождается не более чем двумя элементами.

Это уточнение (для указанного типа колец) теоремы о конечном базисе, доказанной E. Noether в [3].

2. При том же предположении относительно поля коэфициентов, кольцо дифференциальных операторов является простым.

Это обобщение одного результата N. Jacobson'a [5].
