Наукові записки Львівського Державного Університету імені Ів. Франка
Том V Серія фізико-математична, вип. 2 1947

Р. М. СУЛТАНОВ

ПРО РОЗКЛАД АБЕЛЕВИХ ГРУП БЕЗ КРУЧЕННЯ В ПРЯМУ СУМУ ЦИКЛІЧНИХ ПІДГРУП

В цій роботі дається необхідна і достатня умова для того, щоб операторна абелева група без кручення з обчисленою системою твірних розкладалася в пряму суму циклічних допустимих підгруп.

Відмитимо, що деякі критерії можливості розкладу обчислених абелевих груп без кручення даються в роботах Л. С. Понтрягіна* і R. E. Johnson'a.** Критерій, який приводиться в цій роботі, близький до критерія R. E. Johnson'a; однак, нам здається, що введення поняття висоти підгрупи (відсутнє у Johnson'a) дає більш ясну характеристику структури групи, що розкладається в пряму суму.

Хай G — абелева група з областю (лівих) операторів K, де K — комутативне кільце головних ідеалів без дільників нуля з одиницею. Відомо, що кожна абелева група з таким кільцем операторів і зі скінченною кількістю твірних розкладається в пряму суму циклічних підгруп***. Ми тут обмежимося розглядом операторних абелевих груп без кручення, тобто таких груп, що з рівності $\alpha a = o$ ($\alpha \subset K$, $a \subset G$) випливає, що або $\alpha = o$ або $a = o$, не роблячи поки що обмежень відносно потужності множини твірних групи.

При зроблених припущеннях для довільних двох елементів α, $\beta \subset K$ існує спільний найбільший дільник $\delta = (\alpha, \beta) \subset K$ з властивістю: $\alpha = \alpha_1 \delta$, $\beta = \beta_1 \delta$, $\delta = \lambda\alpha + \mu\beta = \lambda\alpha_1\delta + \mu\beta_1\delta$, $1 = \lambda\alpha_1 + \mu\beta_1$. Якщо $\delta = 1$, то α і β звуться взаємнопростими. Елемент $\alpha \neq o$ з K зветься простим якщо він дозволяє лише „тривіальний розклад“ $\alpha = \alpha \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon^{-1}$, де ε — дільник одиниці. Далі, в кільці K виконується єдність розкладу кожного елементу (не рівного нулеві) на

* Понтрягін Л. С. — The theory of topological commutative groups, Ann. of Math. 35 (1934), 351—388.

** Johnson R. E. — On structures of infinite modules, Trans. Amer. Math. Soc., 53 (1943), 469—489.

*** Див. Ван-дер-Варден — Современная алгебра ч. II (1937). 24.

прості множники з точністю до дільника одиниці; кількість таких простих множників в розкладі елементу $\alpha \subset K$ будемо звати довжиною його розкладу і позначати символом l_α.

Хай F є допустима підгрупа групи G і a — елемент з G. Множина таких операторів $\alpha \subset K$, що $\alpha a \subset F$, творять ідеал, який за припущенням має бути головним; хай α_a буде його базисом; тоді α_a буде мати найменшу довжину розкладу l_{α_a} на прості множники серед усіх елементів цього ідеалу. Примушуючи (при даній підгрупі F) елемент a пробігати всю групу G, утворюємо множину всіх відповідних елементів $\alpha_a \subset K$. Верхню межу довжин розкладу l_{α_a} всіх таких α_a на прості множники назвемо висотою підгрупи F; висоту підгрупи F будемо позначати символом $h(F)$. Якщо $h(F)$ — скінченна, то F будемо звати допустимою підгрупою скінченної висоти. Дамо ще одне определіння, також необхідне для дальнішого.

Допустима група F зветься сервантною в G, якщо з того, що рівняння $\alpha a = b$ (де $a \subset G$, b — фіксований елемент підгрупи F, $\underset{\alpha \neq 0}{\alpha \subset K}$) має розв'язок, випливає $\alpha a_1 = b$, де $a^1 \subset F$ (в цьому випадку групи без кручення; це означає, що $a \subset F$)

Доведемо наступні леми.

Лема 1. Кожна допустима циклічна підгрупа $\{a_1\}$ скінченної висоти операторної абелевої групи G без кручення міститься в деякій сервантній циклічній допустимій підгрупі, причому остання визначається однозначно даною підгрупою $\{a_1\}$.

Доведення. Хай $h(\{a_1\}) = l_\varkappa$, тоді рівняння $\varkappa a = \varkappa_1 a_1$ має розв'язок $[(\varkappa, \varkappa_1) = 1,\ a \subset G]$.

Це рівняння можна привести до виду:

$$\varkappa a^* = a_1, \tag{1}$$

де $a^* \subset G$.

Дійсно, існують оператори α і β такі, що $\alpha\varkappa + \beta\varkappa_1 = 1$ тоді $\beta\varkappa a = (1 - \alpha\varkappa) a_1$, звідки дістаємо рівняння (1), якщо покласти $a^* = \beta a + \alpha a_1$.

Ясно, що $\{a_1\} \subset \{a^*\}$. Покажемо, що допустима підгрупа $\{a^*\}$ сервантна в G. Розглянемо рівняння

$$\lambda b = \mu a^*, \tag{2}$$

де $b \subset G$, $\lambda, \mu \subset K$.

Можна вважати $(\lambda, \mu) = 1$. Хай $\lambda\gamma + \mu\delta = 1$; тоді $\lambda b^* = a^*$, де $b^* = \delta b + \gamma a^*$. Значить $\lambda\varkappa b^* = a_1$. Легко бачити, що $\lambda\varkappa$ по винно бути базисом того ідеалу α з K, для якого $\mathfrak{A}; b^* \subseteq \{a_1\}$. З властивості максимальності $\varkappa(h\{a_1\} = l_x)$ виникає, що λ повинно бути дільником одиниці. Але тоді з (2) виникає $b = \lambda^{-1} \mu a^* \subset \{a^*\}$, що доводить сервантність допустимої підгрупи $\{a\}$.

Єдиність $\{a^*\}$ очевидна.

Лема 2. Якщо в операторній абелевій групі без кручення з кільцем операторів K дані сервантна допустима підгрупа G_n зі скінченною кількістю n твірних та елемент $b \sqsubset G_n$, і якщо допустима підгрупа $H = \{G_n, b\}$ має скінченну висоту, то в G існує сервантна допустима підгрупа G_{n+1}, з кількістю твірних $n+1$, яка містить підгрупу G_n і цей елемент b; при цьому G_n являється прямим додатком G_{n+1}.

Доведення. Хай $a_1 \ldots, a_n$ лінійно-незалежна над K система твірних G_n. Розглянемо рівняння

$$\sum_{i=1}^{n} \varkappa_i a_i + \alpha b = \varkappa c, \tag{3}$$

де $\varkappa_1 \ldots, \varkappa_n, \alpha, \varkappa \subset K$, $l_x = h(H)$, $b \sqsubset G_n$ і $(\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n, \alpha, \varkappa) = 1$.

По-перше, очевидно $(\alpha, \varkappa) = 1$.

Тоді рівняння (3) приводиться до вигляду

$$\sum_{i=1}^{n} \varkappa_i a_i + b = \varkappa c^*, \tag{4}$$

де $c^* \sqsubset H$, $h(H) = l_x$.

Дійсно, існують оператори $\lambda, \mu \subset K$, такі що $\lambda\alpha + \mu\varkappa = 1$. Приймаючи до уваги останнє з (3), одержуємо

$$\lambda \sum_{i=1}^{n} \varkappa_i a_i + (1 - \mu\varkappa) b = \lambda\varkappa c,$$

а це рівняння приводиться до (4), якщо покласти $\lambda c + \mu b = c^*$. Доведемо тепер сервантність допустимої підгрупи $\{G_n, c^*\} = G_{nc}$. Розглянемо рівняння:

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i a_i + \varphi c^* = \psi d, \tag{5}$$

де $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varphi, \psi \subset K$, $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varphi, \psi) = 1$ і, значить, згідно з попереднім $(\varphi, \psi) = 1$.

Хай $\lambda\varphi + \mu\varphi = 1$ і $\lambda\alpha + \mu c^* = d^*$, тоді з (5)

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda\varphi_i a_i + c^* = \psi d^*,$$

звідки за допомогою (4):

$$\sum_{i=1}^{n} (\varkappa\lambda\varphi_i + \varkappa_i)\, a_i + b = \varkappa\Psi\, d^*. \qquad (6)$$

Покажемо тепер, що $\varkappa\Psi$ є базисом ідеалу $\mathfrak{A}$, який складається зі всіх тих елементів $\varkappa \subset K$, для яких $\varkappa d^* \supset H$. Дійсно, хай b є базисом цього ідеалу, тоді $\varkappa\Psi = \varepsilon\delta$ і $\delta d^* = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i a_i + \gamma b$, тоді $(1-\varepsilon\gamma) b = \sum_{i=1}^{n} (\varepsilon\gamma_i - \varkappa\lambda\varphi_i - \varkappa_i)\, a_i \subset G_n$; тому що G_n сервантна і $b \overline{\subset} G_n$, то $1 - \varepsilon\gamma = 0$, значить, разом з δ і $\varkappa\Psi$ є базисом ідеалу $\mathfrak{A}$. За властивістю максимальності $\varkappa$ з (6) випливає, що Ψ є дільником одиниці i, значить, з (5) виникає, що $d \subset \{G_n, c^*\} = G_{n+1}$.

Очевидно, $G_{n+1} = G_n + \{c^*\}$. Цим лема 2 доведена повністю.

Лема 3. Операторна абелева група G без кручення з обчисленою системою твірних, у якої кожна допустима підгрупа зі скінченною кількістю твірних має скінченну висоту і зростаючу обчислену послідовність сервантних допустимих підгруп зі скінченною кількістю твірних, з'єднання яких зливається з самою групою G.

Доведення. Добре упорядкувавши систему твірних групи G за типом натурального ряду, дістаємо:

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \qquad (7)$$

1-й крок. Візьмемо елемент a_1 з ряду (7). За лемою 1 існує сервантна циклічна допустима підгрупа $G_1 = \{a_1\}$, яка містить a_1. 2-й крок. Хай тепер для довільного натурального числа n вже сконструйована сервантна підгрупа G_n, яка містить всі елементи $a_1, \ldots, a_m$ ряду (7) і існує в ряді (7) елемент a_k $(k > m)$, який не міститься в G_n. Тоді існує, за лемою 2, сервантна підгрупа G_{n+1}, яка містить підгрупу G_n і цей елемент a_k.

Продовжуючи цей процес, ми побудуємо зростаючу послідовність

$$G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G_n \subset \ldots$$

сервантних допустимих підгруп, з'єднання G' яких містить всі елементи послідовності (7). Дійсно, якщо б існував елемент a_s, який не міститься в G', то ми продовжували б цей процес. Очевидно, щоб охопити всі елементи послідовності (7), треба зробити не більш кроків, ніж потужність послідовності (7), тобто обчислену кількість кроків.

Таким чином це з'єднання G' містить всі елементи системи твірних даної групи G, тим самим містить і саму групу G. Очевидно, $G' \subseteq G$ і лема повністю доведена.

Теорема. Для того, щоб операторна абелева група G без кручення з обчисленою системою твірних і областю операторів K розкладалася в пряму суму циклічних допустимих підгруп, необхідно і досить, щоб кожна допустима її підгрупа зі скінченною кількістю твірних мала скінченну висоту.

1. Необхідність. Хай група G розкладається в пряму суму циклічних допустимих підгруп, тобто $G=\sum_{i=1}^{\infty}\{g_i\}$. Розглянемо довільну допустиму підгрупу $F\subset G$ зі скінченною кількістю твірних, лінійно-незалежних від K, наприклад $a_1,\ldots,a_n$. Хай $g\subset F$ є довільний елемент з G, для якого $\varkappa g\subset F$, причому $l_\varkappa$ мінімально для g.

Хай

$$\varkappa g=\sum_{j=1}^{n}\varkappa_j\, a_j \tag{8}$$

де, очевидно,

$$(\varkappa_1,\ldots,\varkappa_n,\varkappa)=1. \tag{9}$$

Покладемо

$$g=\sum_{t=1}^{m}\alpha_t\, g_{n_t}\quad \text{i}\quad a_j=\sum_{t=1}^{m}\beta_{jt}\, g_{n_t} \tag{10}$$

$$(j=1,2,\ldots,n).$$

Тому що $a_1,\ldots,a_n$ лінійно-незалежні, ранг матриці $\|\beta_{jt}\|$ дорівнює $n\leqslant m$.

З співвідношень (8) та (10) не важко одержати систему рівнянь:

$$\sum_{j=1}^{n}\beta_{jt}\varkappa_j=\varkappa\alpha_t\qquad (t=1,2,\ldots,m).$$

Розв'язуючи цю систему, одержуємо:

$$\varkappa_j\cdot D=\varkappa D_j\qquad (j=1,2,\ldots,n), \tag{11}$$

де $D=|\beta_{jt}|\neq 0,\quad D_j=\begin{vmatrix}\beta_{11}\ldots\beta_{1,j-1} & \alpha_1 & \beta_{1,j+1}\ldots\beta_{1n}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \beta_{n1},\ \beta_{n,j-1} & \alpha_n & \beta_{n,j+1}\quad \beta_{nn}\end{vmatrix}$

(зі спрощенням нумерації).

Хай $\varkappa=\bar\varkappa\mu,\quad D=\bar D\mu,$ де $(\bar\varkappa,\bar D)=1.$

Тоді з (11) виникає $x_j^1\bar D=\bar\varkappa D_j\qquad (j=1,2,\ldots n).$

Приймаючи до уваги (9), з останнього одержуємо $\bar\varkappa=1.$

Значить, $\varkappa$ є дільником постійного елементу $D\subset K.$

Тому кількість простих множників $\varkappa$ менша кількост простих множників постійного D.

Отже, для довільного елементу $g \subset F$, де $xg \subseteq F$ (причому зі всіх елементів з такою властивістю має мінімальну довжину розкладу l_x на прості множники), довжина розкладу l_x елементу x обмежена, значить, висота $h(F)$ допустимої підгрупи F скінченна, що й треба було довести.

Достатність. За лемою 3, з'єднання зростаючої послідовності сервантних допустимих підгруп $G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G_n \subset \ldots$ співпадає з групою G. Це з'єднання являється прямою сумою всіх циклічних допустимих підгруп $\{g_n\}$, які, з'єднуючись з сервантними допустимими підгрупами G_{n-1}, давали підгрупу G_n.

Дійсно, за лемою 3 має місце

$$\left\{ \{g_1\}, \ldots, \{g_{n-1}\} \right\} \cap \{g_n\} = G_{n-1} \cap \{g_n\} = 0 \qquad (n = 1, 2 \ldots).$$

Таким чином, група G співпадає з прямою сумою цих циклічних допустимих підгруп, тобто $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \{g_i\}$, що і було до доведення.

Зробимо в кінці ще кілька зауважень. Очевидно що скінченність висоти допустимої підгрупи F еквівалентна умові, щоб всі елементи фактор-групи G/F, які мають скінченний (операторний) порядок*, мали б порядки з обмеженою в сукупності довжиною розкладу на прості множники. Лема 3 дозволяє твердити більше для випадку груп, що можуть розкладатися в пряму суму циклічних підгруп. Саме в цьому випадку для допустимої підгрупи F зі скінченною кількістю твірних можна твердити, що (операторні) порядки всіх елементів фактор-групи G/F, які мають скінченний порядок, являються дільниками фіксованого елементу з K.

Відмітимо ще, що для розглядуваних груп не може мати місця теорема, яка була б повним аналогом відомої теореми Прюфера** для обчислених примірних груп. Нижче приводиться приклад, який показує, що вимога скінченності висоти всіх елементів абелевої групи без кручення (з обчисленою системою твірних) не є достатньою для того, щоб ці групи могли розкладатися в пряму систему циклічних підгруп.

Дійсно, розглянемо сукупність всіх елементів виду (α, β), де α і β — раціональні числа.

---

* Операторним порядком елементу a з G (визначеним з точністю до дільників одиниці) буде зватися базис ідеалу з К, що анулює a.

** Див. напр. А. П. Курош — „Теория групп", 1944, 227.

Ця сукупність утворює групу, якщо операції визначені слідуючим чином:

$$(\alpha, \beta) + (\gamma, \delta) = (\alpha + \gamma, \beta + \delta)$$

$$\lambda (\alpha, \beta) = (\lambda \alpha, \lambda \beta), \qquad (\lambda \text{ — ціле число}).$$

До вказаних груп належить група (другого рангу) з обчисленою системою твірних:

$$a_0 = (0; 1), \quad a_n = \left(\frac{1}{2^n}, \; - \frac{\sum\limits_{s=1}^{[\sqrt{n}]} 2^{s^2}}{2^n} \right) \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Очевидно, до групи G належать елементи $a_0 = (0; 1)$ і $a = 2a_0 + 2a_1 = (1; 0)$.

Тим самим група G має підгрупу G_1, яка складається зі всіх елементів виду (k, l), де k і l — цілі числа.

Висота підгрупи G_1 нескінченна, що видно з рівності

$$2^n a_n = a - \sum_{s=1}^{[\sqrt{n}]} 2^{s^2} \cdot a_0 \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Значить, за доведеною теоремою, G не може бути розкладена в пряму суму циклічних підгруп і в той же час можна довести, що всі елементи групи G мають скінченну висоту.

Р. М. СУЛТАНОВ. О РАЗЛОЖЕНИИ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП БЕЗ КРУЧЕНИЯ В ПРЯМУЮ СУММУ ЦИКЛИЧЕСКИХ ПОДГРУПП.

Резюме

Пусть g есть Абелева группа с кольцом операторов K, являющимся кольцом главных идеалов. Предположим, что группа g имеет счетный базис и, кроме того, что соотношение $\alpha a = a$ $\alpha \subset k_1$ $a \subset g$ влечет или $\alpha = 0$, или $a = 0$ (операторная группа без кручения).

Пусть N есть какая-либо допустимая подгруппа группы g, если $a \subset g$ пусть $\mathfrak{A}$ (a) означает множество всех тех элементов из К, что $\alpha \subset \mathfrak{A}$ (a) означает $\alpha a \subset N$.

Пусть, наконец, $l(\alpha)$ есть количество множителей в разложении α в произведение простых элементов. Назовем sup $\{\inf l(\alpha)\}$ высотою подгруппы N; высота циклической подгруппы $\{a\}$ будет называться также высотою элемента a.

В настоящей заметке мы доказываем для групп указанного типа следующую теорему:

Для того, чтобы группа g была разложима в прямую сумму циклических подгрупп, необходимо и достаточно, чтобы каждая допустимая подгруппа с конечным числом образующих имела конечную высоту.

Эта теорема близка к одной теореме R. E. Johnson'a, но введение понятия высоты подгруппы дает более ясную характеристику структуры разложимой группы.

В заключение мы приводим пример счетной группы, каждый элемент которой имеет конечную высоту и которая, тем не менее, не разложима в прямую сумму циклических подгрупп.