Наукові записки Львівського Державного Університету імені Ів. Франка
Том V Серія фізико-математична, вип. 2 1947

В. В. ГНЄДЕНКО

ПРО ЕЛІПСОЇДИ РОЗСІЮВАННЯ

Хай буде дана послідовність

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots \tag{1}$$

взаємно незалежних випадкових векторів в k-мірному евклідовому просторі, розподілених за одним і тим самим нормальним законом. Відомо, що щільність розподілу ймовірностей для k-мірного нормального закону має вигляд:

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_k) = ce^{-\frac{1}{2} Q(x_1, x_2, \ldots, x_k)}, \tag{2}$$

де

$$Q(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}(x_i - a_i)(x_j - a_j)$$

невід'ємна квадратична форма, c, a_{ij} і a_i — дійсні постійні.

Ми обмежимося надалі розглядом тільки невироджених розподілів, тобто таких, для яких ранг квадратичної форми Q дорівнює k. Для невироджених розподілів квадратична форма Q анулюється тільки в точці $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \ldots, x_k = a_k$. k-мірні еліпсоїди

$$\sum_{i,j=1}^{k} a_{ij}(x_i - a_i)(x_j - a_j) = R^2,$$

де R є дійсна постійна, мають назву еліпсоїдів розсіювання, які для скорочення будемо позначати через $G(R)$. На поверхні еліпсоїда $G(R)$ функція $p(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ зберігає постійне значення.

Ймовірність того, що кінець вектора ξ, розподіленого за законом (2), буде належати еліпсоїдові $G(R)$, дорівнює

$$P(R) = P\{\xi \subset G(R)\} = \int \ldots \int_{G(R)} p(x_1, x_2, \ldots, x_k)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_k.$$

Для обчислення цього інтегралу введемо сферичні координати

$$\left.\begin{aligned}
x_1-a_1&=r\cos\varphi_1\cos\varphi_2\ldots\cos\varphi_{k-1}\\
x_2-a_2&=r\cos\varphi_1\cos\varphi_2\ldots\sin\varphi_{k-1}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_i-a_i&=r\cos\varphi_1\cos\varphi_2\ldots\sin\varphi_{k-i+1}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_k-a_k&=r\sin\varphi_1.
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Маємо

$$P(R)=c\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\ldots\int_0^{2\pi}\int_0^{z}e^{-\frac{1}{2}r^2s}\left|\frac{d(x_1\ldots x_k)}{d(r\varphi_1\ldots\varphi_{k-1})}\right|dr\,d\varphi_1\ldots d\varphi_{k-1},$$

де позначено

$$s=\sum_{i,j=1}^{k}a_{ij}\,\frac{x_i-a_i}{r}\cdot\frac{x_j-a_j}{r}$$

і

$$z=\frac{R}{\sqrt{s}}.$$

Легко підрахувати, що

$$\left|\frac{d(x_1\,x_2,\ldots,x_k)}{d(r,\varphi_1,\ldots,\varphi_{k-1})}\right|=r^{k-1}I,$$

де величина I не залежить від r і дорівнює значенню якобіана перетворення (3) при $r=1$.

Заміною

$$t=r\sqrt{s}$$

зводимо $P(R)$ до виду

$$P(R)=A\int_0^{R}e^{-\frac{1}{2}t^2}\,t^{k-1}dt, \tag{4}$$

де

$$A=c\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\ldots\int_0^{2\pi}s^{-\frac{1}{2}k}\,I\,d\varphi_1\ldots d\varphi_{k-1}. \tag{5}$$

Для обчислення постійної A немає потреби вираховувати інтеграл (5), тому що її значення визначається з умови $P(+\infty)=1$.

Маємо

$$A = \frac{1}{\int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} t^{k-1} dt} = \frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^{k-2} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}. \tag{6}$$

Ця стаття присвячена доведенню слідуючого:

Теорема. Існує така послідовність постійних R_n, для якої при $n \to \infty$ мають місце такі співвідношення:

1. Ймовірність того, що вектори $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ приймуть значення, які знаходяться в середині еліпсоїда $G(R_n + \varepsilon)$, прямує до 1 при довільному $\varepsilon > 0$.

2. Ймовірність того, що значення принаймні одного вектора $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ вийде з еліпсоїду $G(R_n - \varepsilon)$ прямує до 1 при довільному $\varepsilon > 0$.

3. Ймовірність того, що значення принаймні одного вектора $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ вийде з еліпсоїду $G(R_n - \varepsilon)$ через сектор $(\varphi_1, \varphi_1 + \Theta_1; \varphi_2, \varphi_2 + \Theta_2; \ldots; \varphi_k, \varphi_k + \Theta_k)$ при довільних $\Theta_1 > 0$, $\Theta_2 > 0$ .. $\Theta_k > 0$ і $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$, і при довільному $\varepsilon > 0$, прямує до одиниці.

4. $R_n = \sqrt{2 lg n}$.

Доведення. З рівності

$$\int_R^\infty t^{k-1} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = R^{k-2} e^{-\frac{1}{2}R^2} + (k-2) \int_R^\infty t^{k-3} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

заключаємо, що при $R \to \infty$ має місце співвідношення

$$1 - P(R) = A \int_R^\infty t^{k-1} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = AR^{k-2} e^{-\frac{1}{2}R^2} (1 + o(1)). \tag{7}$$

За теоремою множення ймовірність того, що в середину еліпсоїда $G(R_n + \tau)$ попадуть значення всіх векторів, $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ дорівнює

$$P^n(R_n + \tau) = \left[1 - A(R_n + \tau)^{k-2} e^{-\frac{1}{2}(R_n+\tau)^2} (1 + o(1))\right]^n =$$

$$= \left[1 - \frac{a(n)}{n}\right]^n, \tag{8}$$

де (при $R_n = \sqrt{2lgn}$)

$$lg\, a(n) = -\sqrt{2lgn}\left(\frac{\tau}{2} - (-k-2)\frac{lg\sqrt{2lgn}}{\sqrt{2lgn}} + lgA(1 + o(1))\right).$$

Звідси виводимо, що при довільному $\tau = \varepsilon > 0$

$$\lim_{n \to \infty} lg\, \alpha(n) = -\infty$$

і при $\tau = -\varepsilon < 0$

$$\lim_{n \to \infty} lg\, \alpha(n) = +\infty .$$

З (8) ми, таким чином, знаходимо, що при довільному $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \to \infty} P^n(R_n + \varepsilon) = 1$$

і

$$\lim_{n \to \infty} P^n(R_n - \varepsilon) = 0.$$

Ці співвідношення, очевидно, завершують доведення двох перших частин теореми.

Позначимо через σ_n частину сектора (φ_1, $\varphi_1 + \Theta_1$; ... φ_{k-1}, $\varphi_{k-1} + \Theta_{k-1}$), зовнішню до еліпсоїду $G(R_n - \varepsilon)$. Ймовірність вектора ξ прийняти значення, що знаходиться в σ_n, дорівнює

$$P(\sigma_n) = \int\limits_{\sigma n} \dots \int p(x_1 \dots x_k)\, dx_1 \dots dx_k =$$

$$= \int_{\varphi_{k-1}}^{\varphi_{k-1} + \theta_{k-1}} \dots \int_{\varphi_1}^{\varphi_1 + \theta_1} \int_{\frac{R_n - \varepsilon}{\sqrt{s}}}^{\infty} c e^{-\frac{1}{2} r^2 s} r^{k-1} I dr d\varphi_1 \dots d\varphi_{k-1} =$$

$$= B \int_{R_n - \varepsilon}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} t^2} t^{k-1} dt, \qquad (9)$$

де величина

$$B = c \int_{\varphi_{k-1}}^{\varphi_{k-1} + \theta_{k-1}} \dots \int_{\varphi_1}^{\varphi_1 + \theta_1} s^{-\frac{1}{2} k} I d\varphi_1 \dots d\varphi_{k-1}$$

не залежить від R_n та ε. Тому що $P(\sigma_n) > 0$, якщо тільки $\prod_{i=1}^{k-1} \Theta_i > 0$, то також $B > 0$.

Ймовірність того, що в σ_n не попаде жодне значення векторів $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, дорівнює

$$(1 - P(\sigma_n))^n.$$

Згідно (9) і (7) знаходимо, що

$$(1 - P(\sigma_n))^n = \left[1 - \frac{1}{n} \beta(n)\right]^n,$$

де

$$lg\beta(n)=\sqrt{2\,lgn}\left(\frac{\varepsilon}{2}+(k-2)\frac{lg\sqrt{2\,lgn}}{\sqrt{2\,lgn}}\right)+lg\,B(1+o\,(1)).$$

Поскільки $lg\beta_n \to \infty$ при $n\to\infty$, то

$$\lim_{n\to\infty}(1-P(\sigma_n))^n=0,$$

що й треба було довести.

Б. В. ГНЕДЕНКО. ОБ ЭЛЛИПСОИДАХ РАССЕИВАНИЯ

Резюме

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ взаимно независимые случайные векторы в k-мерном пространстве, распределенные по одному и тому же невырожденному нормальному закону с плотностью распределения (2).

Обозначим через $G(R)$ гиперэллипсоид

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\,(x_i-a_i)\,(x_j-a_j)=R^2.$$

В статье доказана следующая теорема.

Теорема. Существует такая последовательность постоянных R_n, для которой при $n\to\infty$ имеют место следующие соотношения:

1) вероятность того, что все векторы $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ примут значения, находящиеся внутри эллипсоида $G(R_n+\varepsilon)$, стремится к 1 при любом ε;

2) вероятность того, что значение хотя бы одного вектора $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ окажется вне эллипсоида, $G(R_n-\varepsilon)$, стремится к 1 при любом $\varepsilon>0$;

3) вероятность того, что значение хотя бы одного вектора $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ выйдет из эллипсоида $G(R_n-\varepsilon)$ через сектор $(\varphi_1, \varphi_1+\theta_1; \varphi_2, \varphi_2+\theta_2; \ldots; \varphi_k, \varphi_k+\theta_k)$ при любых $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ и $\theta_1>0$, $\theta_2>0, \ldots, \theta_k>0$ и $\varepsilon>0$, стремится к 1;

4) $R_n=\sqrt{2\,lgn}$.