Наукові записки Львівського Державного Університету імені Ів. Франка
Том V Серія фізико-математична, вип. 2 1947

Б. В. ГНЄДЕНКО

ПРО ФУНКЦІЇ ВІД ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

1. ВСТУП. Ця стаття має переважно методичний інтерес і виникла в зв'язку з тим, що мені доводилось неодноразово за проханням інженерів та фізиків розв'язувати задачі, які в своїй математичній частині зводилися до відповіді на слідуюче питання: дані випадкові величини $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ та їх функція розподілу $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$; треба знайти функцію розподілу $\Phi(z)$ випадкової величини

$$\zeta = f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n),$$

де f — визначена функція.

Велика кількість окремих випадків цієї загальної задачі вирішена, і кожному спеціалістові в галузі теорії ймовірностей або математичної статистики відоме загальне її рішення. Формально записати це рішення дуже легко, а саме: $\Phi(z)$ рівняється n-кратному інтегралові

$$\Phi(z) = \int \underset{D(z)}{\ldots} \int d_n F(x_1, \ldots, x_n), \tag{1}$$

розповсюдженому на область $D(z)$, яка визначається нерівністю

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) < z.$$

В підручниках з теорії ймовірностей і відповідних монографіях це загальне рішення не приводиться, а звичайно викладається тільки в застосуванні до визначення функції розподілу суми двох незалежних випадкових величин. Ця обставина приводить до того, що нескладні задачі викликають непоборні труднощі навіть у осіб, знайомих з сучасними посібниками з теорії ймовірностей.

В цій статті я застосовую формулу (1) до рішення двох задач: одної, що виникла в зв'язку з рішенням гідрологічного питання про розподіл розміру *весняного паводку*, і другої, пов'язаної з рішенням задачі теорії помилок механізмів, що виникають від невірної *обточки* торців деталей механізмів.

Викладені задачі можуть бути використані як змістовні приклади при читанні курсу теорії ймовірностей.

2. ФУНКЦІЯ РОЗПОДІЛУ ЧАСТКИ. Хай $F(x, y)$—функція розподілу пари випадкових величин ξ і η.

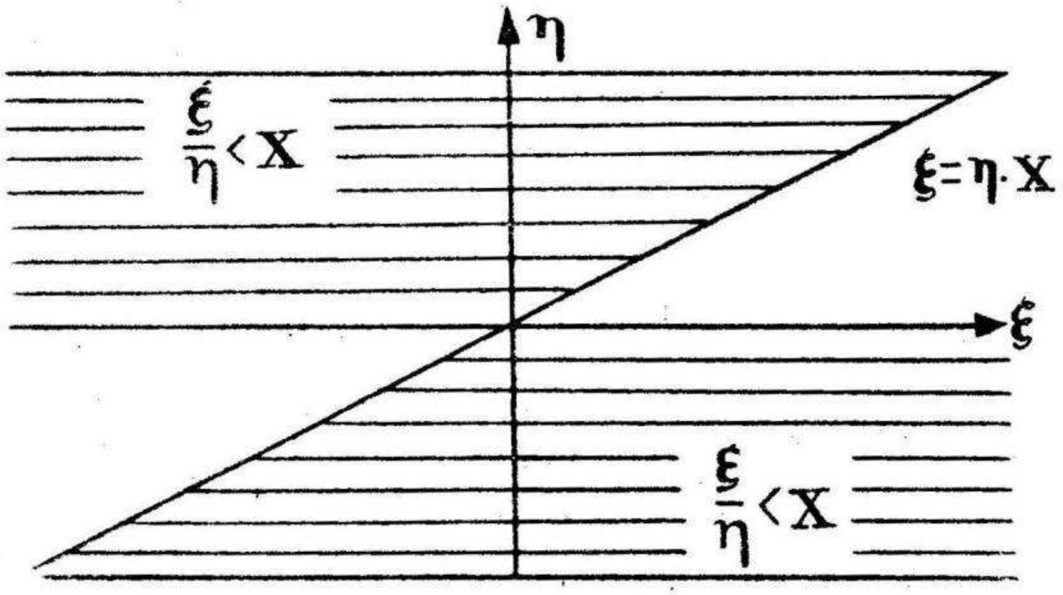

Рис. 1.

При припущенні, що $P\{\eta=0\}=0$, знайдемо функцію розподілу $\Phi(z)$ величини $\zeta=\frac{\xi}{\eta}$.

Область $D(z)$, в якій $\zeta<z$, на рис. 1 заштрихована (на рисунку зображений випадок $x>0$).

Згідно з загальною формулою (1)

$$\Phi(z)=\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{zy} d_2F(xy)+\int_{-\infty}^{0}\int_{zy}^{\infty} d_2F(xy). \qquad (2)$$

Зокрема, якщо величини ξ і η незалежні, то

$$F(x, y)=F_1(x)\cdot F_2(y),$$

де $F_1(x)$ і $F_2(y)$ — функції розподілу величин ξ і η.

В цьому випадку з формули (2) знаходимо, що

$$\Phi(z)=\int_0^{\infty} F_1(zy)\,dF_2(y)+\int_{-\infty}^{0}(1-F_1(zy))\,dF_2(y).$$

Якщо випадкові величини ξ і η такі, що існує щільність розподілу ймовірностей $p(x, y)$, то для величини ζ також існує щільність розподілу $p(z)$.

Згідно з формулою (2)

$$p(z) = \int_0^{\infty} yp(zy, y)\,dy - \int_{-\infty}^{0} yp(zy, y)\,dy. \qquad (3)$$

Зокрема для незалежних випадкових величин ξ і η ця формула приймає вигляд:

$$p(z) = \int_0^{\infty} yp_1(yz)\,p_2(y)\,dy - \int_{-\infty}^{0} yp_1(yz)\,p_2(y)\,dy.$$

8. ПРИКЛАД. Розглянемо важливий приклад.

Нехай випадкові величини ξ і η нормально розподілені. Тоді:

$$p(x,y) = \frac{1}{2\pi\,\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\, exp - \frac{1}{2(1-r^2)}\left\{\frac{(x-a)^2}{\sigma_1{}^2} - 2r\,\frac{(x-a)\,(y-b)}{\sigma_1\,\sigma_2} + \frac{(y-b)^2}{\sigma_2{}^2}\right\}.$$

Нескладні обчислення за формулою (3) показують, що щільність розподілу випадкової величини $\zeta = \frac{\xi}{\eta}$ дається формулою

$$p(z) = \frac{c}{\alpha^2}\left\{1 + \beta\,\Phi(\beta)\,e^{\frac{\beta^2}{2}}\right\}, \qquad (4)$$

де позначене

$$\alpha^2 = \sigma_1{}^2 - 2r\,\sigma_1\sigma_2\,z + \sigma_2{}^2 z^2,$$

$$\beta = \frac{1}{\alpha\sqrt{1-r^2}}\left[\left(a\,\frac{\sigma_2}{\sigma_1} - rb\right)z - \left(ra - b\,\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)\right],$$

$$c = \frac{\sigma_1\,\sigma_2\sqrt{1-r^2}}{\pi}\, exp - \frac{1}{z(1-r^2)}\left(\frac{a^2}{\sigma_1{}^2} - 2r\,\frac{ab}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{b^2}{\sigma_2{}^2}\right),$$

$$\Phi(\beta) = \int_0^{\beta} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz.$$

Якщо $a = b = 0$, то формула (4) приймає форму:

$$p(z) = \frac{\sigma_1\,\sigma_2\sqrt{1-r^2}}{\pi\,(\sigma_1{}^2 - 2r\,\sigma_1\sigma_2 z + \sigma_2{}^2 z^2)}. \qquad (4^1)$$

Цей результат словами може бути сформульований так: частка від ділення двох нормально розподілених випадкових величин ξ і η, для яких математичні сподівання рівні нулеві ($E\xi = E\eta = 0$), являє собою випадкову величину, розподілену за законом Коші.

Зазначимо, що в загальному випадку при $a^2 + b^2 \neq 0$ порядок спадання $p(x)$ при $x \to \pm\infty$ буде таким, як і для закона Коші.

4. ФУНКЦІЯ РОЗПОДІЛУ ВІДДАЛІ ТОЧКИ ВІД ПОЧАТКУ КООРДИНАТ В КОСОКУТНИХ КООРДИНАТАХ. Хай ξ і η — випадкові величини, розподілені за законом $F(x, y)$, і α — постійна величина (без обмеження загальності можна в дальшому вважати, що $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$). Треба знайти функцію розподілу $\Phi(z)$ випадкової величини

$$\zeta = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 - 2\xi\eta \cos \alpha}.$$

Згідно з (1)

$$\Phi(z) = \iint\limits_{D(z)} d_2 F(x, y),$$

де $D(z)$ (2) — внутрішня частина еліпсу

$$x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha = z^2.$$

Таким чином,

$$\Phi(z) = \int\limits_{-\frac{z}{\sin \alpha}}^{\frac{z}{\sin \alpha}} \int\limits_{x \cos \alpha - \sqrt{z^2 - x^2 \sin^2 \alpha}}^{x \cos \alpha + \sqrt{z^2 - x^2 \sin^2 \alpha}} d_2 F(x, y) \quad . \qquad (5)$$

Якщо випадкові величини ξ і η мають щільність розподілу $p(x, y)$, то ζ також має щільність розподілу $p(z)$, яка визначається формулою

$$p(z) = \int\limits_{-\frac{z}{\sin \alpha}}^{\frac{z}{\sin \alpha}} \Big[p(x, x\cos\alpha + \sqrt{z^2 - x^2 \sin^2 \alpha}) + p(x, x\cos\alpha - \sqrt{z^2 - x^2 \sin^2 \alpha}) \Big] \frac{z dx}{\sqrt{z^2 - x^2 \sin^2 \alpha}}. \qquad (5)$$

5. ЕЛІПСИ РОЗСІВАННЯ. Хай величини ξ і η розподілені за нормальним законом

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{1 - r^2}} exp - \frac{1}{2(1 - r^2)} \left[\frac{(x - a)^2}{\sigma_1{}^2} - 2r \frac{(x - a)\,(y - b)}{\sigma_1\, \sigma_2} + \frac{(y - b)^2}{\sigma_2{}^2} \right].$$

Треба знайти функцію розподілу випадкової величини ζ:

$$\zeta^2 = \frac{1}{1-r^2}\left[\frac{(\xi-a)^2}{\sigma_1{}^2} - 2r\frac{(\xi-a)(\eta-b)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(\eta-b)^2}{\sigma_2{}^2}\right]$$

Якщо покласти

$$\xi_1 = \frac{\xi-a}{\sigma_1\sqrt{1-r^2}}, \quad \eta_1 = \frac{\eta-b}{\sigma_2\sqrt{1-r^2}}, \quad r = \cos\alpha,$$

то приходимо до задачі $n^0 4$.

Щільність розподілу пари ξ_1, η_1 дорівнює

$$p_1(xy) = \frac{\sqrt{1-r^2}}{2\pi}\, exp - \frac{1}{2}\,[x^2 - 2rxy + y^2].$$

Легкі перетворення показують, що

$$p_1(x,\ x\cos\alpha + \sqrt{z^2 - x^2\sin^2\alpha}) = p_1(x, x\cos\alpha - \sqrt{z^2 - x^2\sin^2\alpha}) =$$
$$= \frac{\sqrt{1-r^2}}{2\pi}\, e^{-\frac{z^2}{2}}.$$

Таким чином, згідно (5)

$$p(z) = \int_{-\frac{z}{\sin\alpha}}^{\frac{z}{\sin\alpha}} \frac{\sqrt{1-r^2}}{\pi}\, e^{-\frac{z^2}{2}} \frac{z\,dx}{\sqrt{z^2 - x^2\sin^2\alpha}} =$$
$$= \frac{1}{\pi}\, z e^{-\frac{z^2}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\Theta = z e^{-\frac{z^2}{2}}$$

або ж

$$F(z) = \int_0^z p(z)\,dz = 1 - e^{-\frac{z^2}{2}}.$$

Одержаний результат добре відомий в теорії стрільби — $F(z)$ дорівнює ймовірності попадання в область, обмежену еліпсом

$$\frac{(x-a)^2}{\sigma_1{}^2} - 2r\frac{(x-a)\ (y-b)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-b)^2}{\sigma_2{}^2} = z^2(1-r^2),$$

де $(a,\ b)$ — центр мети, а $\frac{1}{\sigma_1}$ і $\frac{1}{\sigma_2}$ — міри точності по кожній з осей еліпсу.

6. ФУНКЦІЯ РОЗПОДІЛУ СТОРОНИ ТРИКУТНИКА. Формула (5) містить в собі рішення такої задачі: сторони ξ і η трикутника ABC — випадкові величини, α — кут при вершині; знайти функцію розподілу третьої сторони ζ. З цією задачею зустрілися при розробці теорії інструментальних помилок і допусків в частині помилок, що походять від торцового биття.

Зазначимо, що в нашій постановці задачі ξ і η повинні бути невід'ємними випадковими величинами і для них, значить,

$$F(x,y)=0 \quad \text{при } x\leqslant 0 \quad \text{або } y\leqslant 0,$$

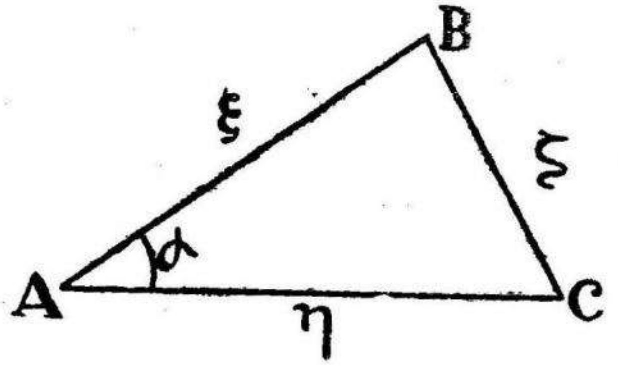

Рис. 2.

а якщо існує щільність розподілу, то

$$p(x,\ y)=0 \quad \text{при} \quad x\leqslant 0 \quad \text{або } y\leqslant 0.$$

Формули для $\Phi_\alpha(z)$ — функції розподілу ζ — приймають різний вигляд в залежності від того

$$0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2} \ \text{ або } \ \frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\pi.$$

Випадок $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$. Зазначимо, що в цьому припущенні $\cos\alpha\geqslant 0$ і $x\cos\alpha-\sqrt{z^2-x^2\sin^2\alpha}>0$ тільки при $x>z$.

З цього в силу (5) випливає, що

$$\Phi_\alpha(z)=\int_0^z\int_0^{x\cos\alpha+\sqrt{z^2-x^2\sin^2\alpha}} d_2F(x,y)+\int_z^{\frac{z}{\sin\alpha}}\int_{x\cos\alpha}^{x\cos\alpha+\sqrt{z^2-x^2\sin^2\alpha}} d_2F(x,\ y). \qquad (6)$$

З (5^1) знаходимо, що

$$p_\alpha(z) = \int_0^{\frac{z}{\sin\alpha}} p\left(x, x\cos\alpha + \sqrt{z^2 - x^2\sin^2\alpha}\right) \frac{z\,dx}{\sqrt{z^2 - x^2\sin^2\alpha}} +$$

$$+ \int_z^{\frac{z}{\sin\alpha}} p\left(x, x\cos\alpha - \sqrt{z^2 - x^2\sin^2\alpha}\right) \frac{z\,dx}{\sqrt{z^2 - x^2\sin^2\alpha}}. \qquad (6^1)$$

Випадок $\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \pi$. Тут $\cos\alpha \leqslant 0$. Величина $x\cos\alpha + \sqrt{z^2 - x^2\sin^2\alpha} \geqslant 0$ тільки при $x \leqslant z$. Таким чином,

$$\Phi_\alpha(z) = \int_0^z \int_0^{x\cos\alpha + \sqrt{z^2 - x^2\sin^2\alpha}} d_2 F(x, y). \qquad (7)$$

З (5^1) знаходимо, що

$$p_\alpha(z) = \int_0^z p\left(x, x\cos\alpha + \sqrt{z^2 - x^2\sin^2\alpha}\right) \frac{z\,dx}{\sqrt{z^2 - x^2\sin^2\alpha}}. \qquad (7^1)$$

В технічній задачі, про яку ми згадували вище, величина α рівномірно розподілена в інтервалі $(0, \pi)$ і не залежить від ξ і η.

Згідно з формулою повної ймовірності в цьому випадку безумовна густість розподілу ζ дається формулою

$$p(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi p_\alpha(z)\, d\alpha.$$

Нескладні перетворення приводять нас до формули

$$p(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{z}{\sin\alpha}} \Big[p\left(x, x\cos\alpha + \sqrt{z^2 - x^2\sin^2\alpha}\right) +$$

$$+ p\left(x, \left|x\cos\alpha - \sqrt{z^2 - x^2\sin^2\alpha}\right|\right) \Big] \frac{z\,dx}{\sqrt{z^2 - x^2\sin^2\alpha}}\, d\alpha.$$

Б. В. ГНЕДЕНКО. О ФУНКЦИЯХ ОТ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Резюме

Автор решает несколько частных задач определения функций распределения функций от случайных величин, возникших при решении различных физических и технических вопросов.

Среди полученных результатов отметим следующий:

Если ξ и η подчинены нормальному закону распределения, то частное $\frac{\xi}{\eta}$ распределено по закону Коши.