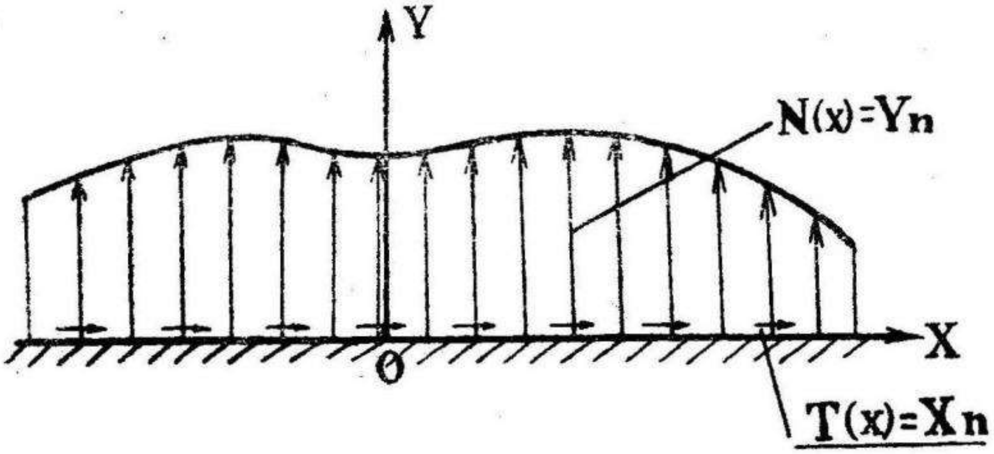
Наукові записки Львівського Державного Університету імені Ів. Франка
Том V Серія фізико-математична, вип. 2 1947

Г. М. САВІН
член-кор. АН УРСР, професор

ЗМІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ АНІЗОТРОПНОЇ ПІВПЛОЩИНИ

Припустимо, що на границі анізотропної півплощини (див. фіг. 1) прикладені зовнішні зусилля X_n, Y_n. Знайдемо картину пружного стану в цій півплощині.

Направимо вісь OX по границі півплощини, вісь OY — вгору й будемо розглядати „нижню" півплощину, тобто ту, для якої $Y \leqslant O$.



Фіг. 1.

Розв'язання поставленої задачі було зроблено нами в [1]* й зводиться до визначення двох функцій $\varphi(z_1)$ та $\psi(z_2)$ [2], які на контурі області, тобто на осі ox, мусять задовольняти умовам:

$$2\,Re[\varphi(x)+\psi(x)] = f_1 = -\int_0^s Y_n\,ds + c_1,$$

$$2\,Re[s_1\varphi(x)+s_2\psi(x)] = f_2 = \int_0^s X_n\,ds + c_2, \qquad (1)$$

* Цифри в квадратових дужках показують порядковий номер цитованої літератури, список якої наведено в кінці статті.

де: 1) Re — символ дійсної частини комплексної величини, наприклад: $Re\{w\} = u$, коли $w = u + iv$,

2) $s_1 = \alpha_1 + i\beta_1$; $s_2 = \alpha_2 + i\beta_2$ — корені характеристичного рівняння:

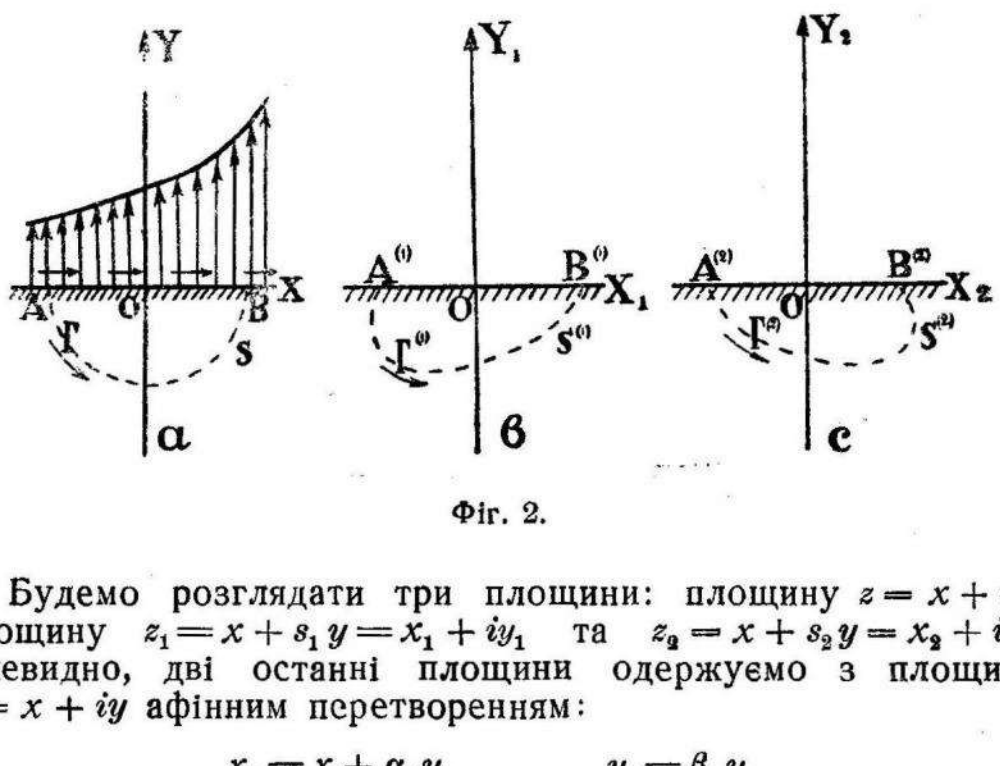
$$a_{11} s^4 - 2a_{16} s^3 + (2a_{12} + a_{66}) s^2 - 2a_{26} s + a_{22} = 0, \qquad (a)$$

в якому сталі a_{11}, a_{16}, a_{66}, a_{26} та a_{22} є пружні сталі, що входять до закону Гука, який для анізотропного середовища має вигляд:

$$\varepsilon_x = a_{11} \sigma_x + a_{12} \sigma_y + a_{16} \tau_{xy},$$
$$\varepsilon_y = a_{12} \sigma_x + a_{22} \sigma_y + a_{26} \tau_{xy},$$
$$\gamma_{xy} = a_{16} \sigma_x + a_{26} \sigma_y + a_{66} \tau_{xy}.$$

На контурі області, тобто на осі ox, $y = o$ і $z_1 = z_2 = x$. Інтеграли $\int_0^s Y_n\, ds$, $\int_0^s X_n\, ds$ беруться в напрямі так, щоб ця півплощина при обході по контуру залишалася ліворуч; звідси маємо:

$$f_1 = \int_0^x Y_n\, dx + c_1; \; f_2 = -\int_0^x X_n\, dx + c_2. \qquad (2)$$



Фіг. 2.

Будемо розглядати три площини: площину $z = x + iy$, площину $z_1 = x + s_1 y = x_1 + iy_1$ та $z_2 = x + s_2 y = x_2 + iy_2$. Очевидно, дві останні площини одержуємо з площини $z = x + iy$ афінним перетворенням:

$$x_1 = x + \alpha_1 y, \qquad y_1 = \beta_1 y,$$
$$x_2 = x + \alpha_2 y, \qquad y_2 = \beta_2 y. \qquad (3)$$

$$z_1 = x + s_1 y = x + \alpha_1 y + i\beta_1 y = x_1 + iy_1 ;$$

$$z_2 = x + s_2 y = x + \alpha_2 y + i\beta_2 y = x_2 + iy_2 .$$

При цьому перетворенні (3), точки дійсної осі OX площини z переходять в точки дійсних же осей OX_1 та OX_2 площин z_1 та z_2, причому $x_1 = x_2 = x$ (див. фіг. 2) для всіх точок, що лежать на цих осях $ox = ox_1 = ox_2$.

Припустимо, що зовнішні зусилля, прикладені до границі півплощини z, або займають конечні інтервали, або ці зусилля X_n, Y_n такі, що f_1 та f_2 (2) в достатньо віддалених точках дійсної осі мають вигляд:

$$f_1(x) = c_1 + O_1\left(\frac{1}{x}\right), \qquad f_2(x) = c_2 + O_2\left(\frac{1}{x}\right), \tag{4}$$

де c_1 та c_2 — дійсні сталі.

З останньої умови (4) відносно виду X_n та Y_n безпосередньо витікає, що:

а) Напруження σ_x, σ_y та τ_{xy} в півплощині будуть йти до нуля при віддаленні на безмежність.

З формул:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2\,Re\left[s_1^2\,\varphi'(z_1) + s_2^2\,\psi'(z_2)\right], \\ \sigma_y &= 2\,Re\left[\varphi'(z_1) + \psi'(z_2)\right], \\ \tau_{xy} &= -2\,Re\left(s_1\,\varphi'(z_1) + s_2\,\psi'(z_2)\right], \end{aligned} \tag{5}$$

які дають нам можливість визначати компоненти напруг в анізотропному тілі, якщо відомі функції $\varphi'(z_1)$ та $\psi'(z_2)$, робимо висновок, що функції $\varphi'(z_1)$ та $\psi'(z_2)$ мусять мати вигляд:

$$\varphi'(z_1) = \frac{a_1}{z_1} + \frac{a_2}{z_1^2} + \frac{a_3}{z_1^3} + \ldots + \frac{a_n}{z_1^n} + \ldots$$

$$\psi'(z_2) = \frac{a'_1}{z_2} + \frac{a'_2}{z_2^2} + \frac{a'_3}{z_2^3} + \ldots + \frac{a'_n}{z_2^n} + \ldots, \tag{6}$$

де $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ та $a'_1, a'_2, a'_3, \ldots a'_n$ — комплексні сталі.

Інтегруючи (6), знаходимо:

$$\varphi(z_1) = a_1 \ln z_1 + O_1\left(\frac{1}{z_1}\right) + \text{Const},$$

$$\psi(z_2) = a'_1 \ln z_2 + O_2\left(\frac{1}{z_2}\right) + \text{Const}, \tag{7}$$

де через $O_1\left(\frac{1}{z_1}\right)$ та $O_2\left(\frac{1}{z_2}\right)$ позначені функції, для яких

$$\lim_{z_1\to\infty}\left\{z_1\, O_1\left(\frac{1}{z_1}\right)\right\} = -\alpha_2$$

$$\lim_{z_2\to\infty}\left\{z_2\, O_2\left(\frac{1}{z_2}\right)\right\} = -\alpha'_2 .$$

б) Головний вектор зовнішніх зусиль X_n, Y_n, що прикладені до інтервалу AB (див. фіг. 2) границі півплощини, прямує до певного ліміту, коли кінці його уходять на нескінченність (точка A ліворуч, B праворуч).

Це твердження є наслідком наших припущень (див. формулу 2). Знайдемо цей головний вектор. Визначимо спочатку головний вектор $X+iY=\int_{AB}(X_n+iY_n)\,ds$ через функції $\varphi(z)$ та $\psi(z)$. На контурі області компоненти напружень σ_x, σ_y та τ_{xy} мусять задовольняти умовам:

$$\sigma_x \cos(n, x) + \tau_{xy}\cos(n, y) = X_n ,$$

$$\tau_{xy}\cos(n, x) + \sigma_y \cos(n, y) = Y_n .$$

Приймаючи до уваги, що $\cos(n, x) = \frac{dy}{ds}$; $\cos(n, y) = -\frac{dx}{ds}$ й підставляючи замість $\sigma_x = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\sigma_y = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, де $u(x, y)$ — функція, що задовольняє диференціальному рівнянню (3):

$$a_{22}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - 2a_{26}\frac{\partial^4 u}{\partial^3 x^3 \partial y} + 2(a_{12}+a_{66})\frac{\partial^4 u}{\partial^2 x^2 \partial y^2} - 2a_{16}\frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y^3} + $$
$$+ a_{11}\frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0, \qquad (9)$$

одержимо

$$X_n = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\frac{dx}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

$$Y_n = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial v}\frac{dy}{ds} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{dx}{ds} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

або

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\int_0^s Y_n\, ds + c_1\,; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \int_0^s X_n\, ds + c_2$$

Звідси маємо, що головний вектор через функцію $u(x, y)$ може бути виражений так:

$$X + i\,Y = \int_{AB} (X_n + iY_n)\, ds = -i\left\{\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y}\right\}_A^B, \tag{10}$$

де через $\left\{\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y}\right\}_A^B$ позначено приріст виразу, що стоїть в фігурних дужках при переміщенні по контуру області з точки A в точку B.

Загальний інтеграл рівняння (9) має вигляд:

$$u(x, y) = F_1(z_1) + \overline{F_1(z_1)} + F_2(z_2) + \overline{F_2(z_2)}, \tag{11}$$

де: 1) $z_1 = x + s_1 y$, $z_2 = x + s_2 y$, а $s_1 = \alpha_1 + i\beta_1$ $s_2 = \alpha_2 + i\beta_2$ (як показав С. Г. Лехницький [3]) є комплексні корені характеристичного рівняння.

2) Функція $\overline{F_1(z_1)}$ є функція спряжена до функції $F_1(z_1)$, тобто в якій знак перед i замінений з плюса на мінус.

Диференціюючи (11) перший раз по x, другий раз по y й позначаючи через

$$\varphi(z_1) = \frac{dF_1}{dz_1}, \quad \psi(z_2) = \frac{dF_2}{dz_2},$$

одержимо:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y} = (1 + is_1)\,\varphi(z_1) + (1 + i\bar{s}_2)\,\overline{\varphi(z_1)} + (1 + is_2)\,\psi(z_2) + \\ + (1 + i\bar{s}_2)\,\overline{\psi(z_2)}. \tag{12}$$

Підставляючи із (12) в (10) — маємо:

$$X + i\,Y = \int_{AB} (X_n + i\,Y_n)\, ds = -i\Big[(1 + is_1)\,\varphi(z_1) + (1 + i\bar{s}_1)\,\overline{\varphi(z_1)} + \\ + (1 + is_2)\,\psi(z_2) + (1 + is_2)\,\overline{\psi(z_2)}\Big]_A^B. \tag{13}$$

Приймаючи до уваги напрямок обходу нашої області, тобто півплощини, для головного вектора $X+iY$, матимемо вираз:

$$X+iY=i\Big[(1+is_1)\,\varphi(z_1)+(1+i\bar{s}_1)\,\overline{\varphi(z_1)}+(1+is_2)\,\psi(z_2)+$$

$$+(1+is_2)\,\overline{\psi(z_2)}\Big]_A^B. \tag{14}$$

Перехід від точки A до точки B в площині z може бути зроблений довільним шляхом, наприклад: по півколу Γ (див. фіг. 2 „a"). В площинах z_1 та z_2 будемо мати відповідно Γ шляхи $\Gamma^{(1)}$, та $\Gamma^{(2)}$ (див. фіг. 2 „в" та „с"). Але, як вище було зазначено, $OA=OA^{(1)}=OA^{(2)}$; $OB=OB^{(1)}=OB^{(2)}$; напрямок обходів по Γ, $\Gamma^{(1)}$ та $\Gamma^{(2)}$ буде один і той же (бо $\beta_1>o$; $\beta_2>o$).

Для функцій $\ln z_1$, та $\ln z_2$ треба вибрати якусь одну вітку цих багатозначних функцій; виберемо так, щоб:

$$\ln z_1=\ln|z_1|+i\vartheta_1$$
$$\ln z_2=\ln|z_2|+i\vartheta_2,$$

де аргументи ϑ_1 та ϑ_2 змінюються від $\vartheta_1=\vartheta_2=-\pi$ до до $\vartheta_1=\vartheta_2=o$ при переході за довільним шляхом в областях $S^{(1)}$ та $S^{(2)}$ від $A^{(1)}$, $A^{(2)}$ до $B^{(1)}$, $B^{(2)}$ (див. фіг. 2 „в" та „с").

Підставляючи із (7) функції $\varphi(z_1)$ та $\psi(z_2)$ в (14):

$$\Big[a_1(1+is_1)+\bar{a}_1(1+i\bar{s}_1)+a'_1(1+is_2)+\bar{a}'_1(1+i\bar{s}_2)\Big]\ln\frac{r_2}{r_1}+$$

$$+\Big[a_1(1+is_1)-\bar{a}_1(1+i\bar{s}_1)+a'_1(1+is_2)-\bar{a}'_1(1+i\bar{s}_2)\Big]\pi i-\varepsilon=$$

$$=-i(X+iY), \tag{15}$$

де: 1) ε — безконечно мала величина, що прагне до нуля при віддаленні точок $A^{(1)}$, $A^{(2)}$ та $B^{(1)}$, $B^{(2)}$ на безмежність.

2) $r_1=x_A=x_{1,A}=x_{2,A}$; $r_2=x_B=x_{1,B}=x_{2,B}$.

Для того, щоб головний вектор $X+iY$ не залежав від вибору початку координат й був величиною конечною, очевидно, мусить бути

$$a_1(1+is_1)+\bar{a}_1(1+i\bar{s}_1)+a'_1(1+is_2)+\bar{a}'_1(1+i\bar{s}_2)=o. \tag{16}$$

З (15) і (16) бачимо, що a_1 та a'_1 задовольняють таку систему рівнянь:

$$a_1(1+is_1)+\bar{a}_1(1+i\bar{s}_1)+a'_1(1+is_2)+\bar{a}'_1(1+i\bar{s}_2)=o,$$

$$a_1(1+is_1)-\bar{a}_1(1+i\bar{s}_1)+a'_1(1+is_2)-\bar{a}'_1(1+i\bar{s}_2)=-\frac{X+iY}{\pi},$$

$$a_1(1-is_1)+\bar{a}_1(1-i\bar{s}_1)+\bar{a}'_1(1-i\bar{s}_2)+a'_1(1-is_2)=o. \qquad (17)$$

$$\bar{a}_1(1-is_1)-a_1(1-i\bar{s}_1)+\bar{a}'_1(1-is_2)-a'_1(1-is_2)=-\frac{X-iY}{\pi}.$$

В системі (17) два останні рівняння є спряжені першим двом рівнянням. Розв'язуючи цю систему, маємо:

$$a_1=i\frac{X+s_2Y}{2\pi(s_1-s_2)};\ a'_1=-i\frac{X+s_1Y}{2\pi(s_1-s_2)}. \qquad (18)$$

Таким чином функції $\varphi(z_1)$ та $\psi(z_2)$ (7) мають вигляд:

$$\varphi(z_1)=i\frac{X+s_2Y}{2\pi(s_1-s_2)}\ln z_1+\varphi_0(z_1),$$
$$(19)$$
$$\psi(z_2)=-i\frac{X+s_1Y}{2\pi(s_1-s_2)}\ln z_2+\psi_0(z_2),$$

де $\varphi_0(z_1)$ та $\psi_0(z_2)$ — голоморфні функції у своїх областях $S^{(1)}$ та $S^{(2)}$.

Компоненти переміщень U та V опреділюються, якщо нам відомі функції $\varphi(z)$ та $\psi(z)$, по формулам [3]

$$U(x,y)=2Re[p_1\varphi(z_1)+p_2\psi(z_2)]-\gamma y+\alpha_0$$
$$V(x,y)=2Re[q_1\varphi(z_1)+q_2\psi(z_2)]+\gamma x+\beta_0, \qquad (20)$$

де введені такі позначення:

$$p_1=a_{11}s_1^2+a_{12}-a_{16}s_1, \qquad p_2=a_{11}s_2^2+a_{12}-a_{16}s_2,$$

$$q_1=\frac{a_{12}s_1^2+a_{22}-a_{26}s_1}{s_1}, \qquad q_2=\frac{a_{12}s_2^2+a_{22}-a_{26}s_2}{s_2}.$$

γ, α_0, β_0 — довільні дійсні сталі; члени $-\gamma y+\alpha_0$ та $\gamma x+\beta_0$ у (20) дають переміщення всього тіла як абсолютно твердого тіла й при розгляді пружної рівноваги можуть бути відкинуті.

Підставляючи з (19) у (20), одержимо:

$$U(x,y)=Re\left[ip_1\frac{X+s_2Y}{\pi(s_1-s_2)}\ln z_1-ip_2\frac{X+s_1Y}{\pi(s_1-s_2)}\ln z_2+\right.$$
$$\left.+p_1O_1\left(\frac{1}{z_1}\right)+p_2O_2\left(\frac{1}{z_2}\right)\right]+\text{Const}.$$

$$V(x, y) = Re\left[iq_1 \frac{X + s_2 Y}{\pi(s_1 - s_2)} \ln z_1 - iq_2 \frac{X + s_1 Y}{\pi(s_1 - s_2)} \ln(z_2) + \right.$$

$$\left. + q_1 O_1\left(\frac{1}{z_1}\right) + q_2 O_2\left(\frac{1}{z_2}\right)\right] + \text{Const.} \tag{21}$$

З (21) виходить, що переміщення U та V зі збільшенням $|z|$ будуть нескінченно зростати. Для того, щоб вони були обмежені на нескінченності, очевидно, необхідно, щоб $X \equiv Y \equiv O$, а тоді напруження, як це ми бачимо з (19) та (5) будуть величини порядку $O\left(\frac{1}{z^2}\right)$.

Для розв'язання поставленої задачі візьмемо формулу Шварца [4]

$$F(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} U(\Theta)\frac{\sigma + \xi}{\sigma - \xi}\frac{d\sigma}{\sigma} + i\alpha_0, \tag{22}$$

де: 1) $U(\Theta)$ — значення дійсної частини функції $F(\xi)$ на контурі γ кола, рівного одиниці,

2) α_0 — деяка дійсна стала.

Для наших цілей, так як областю у нас зараз є півплощина, зручніше перетворити формулу Шварца (22) безпосередньо до півплощини. Функції, що конформно відображають півплощини z, z_1 та z_2 на коло радіуса одиниця γ будуть:

$$\xi = -\frac{z + i}{z - i}; \quad \xi = -\frac{z_1 + i}{z_1 - i}; \quad \xi = -\frac{z_2 + i}{z_2 - i}. \tag{23}$$

Причому точкам A, $A^{(1)}$, $A^{(2)}$ (див. фіг. 2), що знаходяться в афінній відповідності, буде відповідати *одна* точка контура γ кола радіуса одиниця.

Ядро Шварца для цих півплощин буде:

$$\frac{\sigma + \xi}{\sigma - \xi}\frac{d\sigma}{\sigma} = \frac{1 + xz_1}{x - z_1}\frac{2\,dx}{1 + x^2}, \tag{24}$$

$$\frac{\sigma + \xi}{\sigma - \xi}\frac{d\sigma}{\sigma} = \frac{1 + xz_2}{x - z_2}\frac{2\,dx}{1 + x^2}. \tag{25}$$

Помножимо обидві частини першого рівняння (1) на $\frac{1}{2\pi i}\frac{1 + xz_1}{x - z_1}\frac{2\,dx}{1 + x^2}$, а другого рівняння (1) на $\frac{1}{2\pi i}\frac{1 + xz_2}{x - z_2}\frac{2\,dx}{1 + x^2}$

і проінтегруємо тепер по контуру цих областей і розв'яжемо одержані два рівняння відносно функцій $\varphi(z_1)$ та $\psi(z_2)$ — маємо:

$$\varphi(z_1) = \frac{i}{2\pi(s_1 - s_2)} \int_{-\infty}^{+\infty} [f_2 - s_2 f_1] \frac{1 + xz_1}{x - z_1} \frac{dx}{1+x^2} + \lambda_1$$

$$\psi(z_2) = -\frac{i}{2\pi(s_1 - s_2)} \int_{-\infty}^{+\infty} [f_2 - s_1 f_1] \frac{1 + xz_2}{x - z_2} \frac{dx}{1+x^2} + \lambda_2, \qquad (26)$$

де: λ_1 та λ_2 — довільні комплексні сталі, що залежать від двох довільних дійсних сталих α_0 та β_0

$$\lambda_1 = i\,\frac{\beta_0 - s_2\alpha_0}{s_1 - s_2} \qquad\qquad \lambda_2 = -i\,\frac{\beta_0 - s_1\alpha_0}{s_1 - s_2}.$$

Формули (26) можна значно спростити.

Дійсно, на границі півплощини, тобто на осі ox,

$$\sigma_y = N(x) \qquad\qquad \tau_{xy} = T(x),$$

де $N(x)$ та $T(x)$ — нормальні та дотичні зусилля, що прикладені до границі півплощини. Тому на границі півплощини останні дві формули (5) дають:

$$2Re\,[\varphi'(x) + \psi(x)] = N(x),$$

$$2Re\,[s_1\varphi'(x) + s_2\Psi'(x)] = -T(x). \qquad (27)$$

Повторюючи ті ж самі дії до цих рівнянь (27), що були застосовані до рівнянь (1), одержимо:

$$\varphi'(z_1) = -\frac{i}{2\pi(s_1 - s_2)} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[T(x) + s_2 N(x) \right] \frac{1 + xz_1}{x - z_1} \frac{dx}{1+x^2} + \lambda_1$$

$$(28)$$

$$\psi'(z_2) = \frac{i}{2\pi(s_1 - s_2)} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[T(x) + s_1 N(x) \right] \frac{1 + xz_2}{x - z_2} \frac{dx}{1+x^2} + \lambda_2.$$

Якщо підставити

$$\frac{1 - xz}{x - z}\,\frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{x - z} - \frac{x}{1+x^2}, \qquad (28)$$

одержимо:

$$\varphi'(z_1) = -\frac{i}{2\pi(s_1 - s_2)} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{T(x) + s_2 N(x)}{x - z_1} dx,$$

$$\psi'(z_2) = \frac{i}{2\pi(s_1 - s_2)} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{T(x) + s_1 N(x)}{x - z_2} dx, \qquad (29)$$

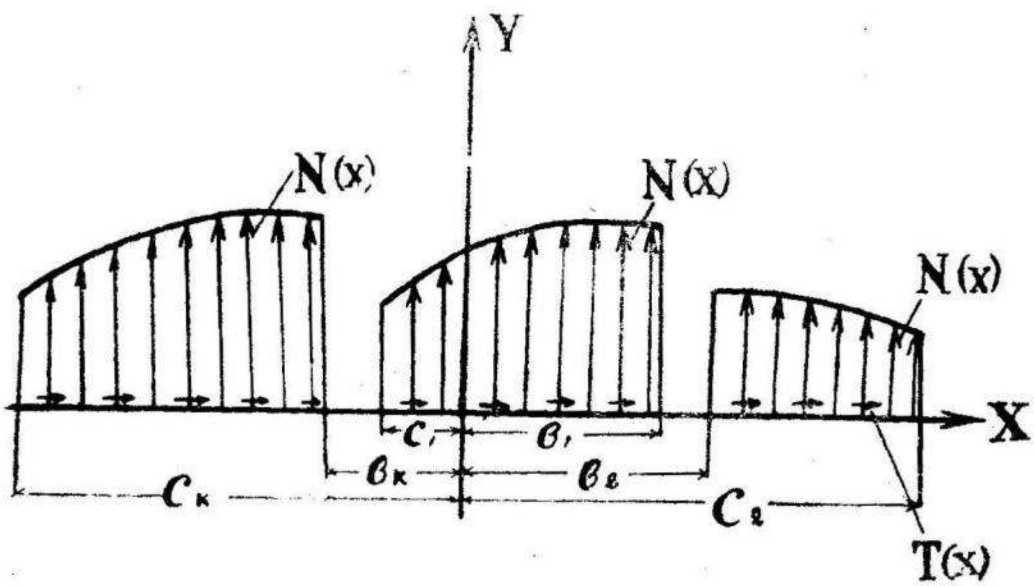
де сталі λ_1 та λ_2 у (28) вибрані так, щоб

$$\lambda_1 + \frac{i}{2\pi(s_1 - s_2)} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{T(x) + s_2 N(x)}{1 + x^2} x dx = o,$$

$$\lambda_2 - \frac{i}{2\pi(s_1 - s_2)} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{T(x) + s_1 N(x)}{1 + x^2} x dx = o,$$

а це завжди можливо зробити, для цього тільки треба покласти α_0 та β_0 рівними:

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} N(x) \frac{x}{1+x^2} dx, \qquad \beta_0 = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} T(x) \frac{x}{1+x^2} dx.$$



Фіг. 3.

По формулам (29) можемо легко знайти функції $\varphi'(z_1)$ та $\psi'(z_2)$, якщо по границі анізотропної півплощини на інтервалах $(b_k \dots c_k)$ $(k=1, 2, 3 \dots n)$ задані нормальні і тангенціальні зусилля.

Наприклад, якщо на інтервалі $(-a \dots +a)$ задане рівномірно-розподілене навантаження (тиск) з інтенсивністю $p=\text{const.}$, то функції $\varphi'(z_1)$ й $\psi'(z_2)$ (29), покладаючи $T(x)=o$ й $N(x)=-p$, будуть:

$$\varphi'(z_1)=\frac{is_2 p}{2\pi(s_1-s_2)}\ln\frac{z_1-a}{z_2+a},$$

$$\psi'(z_2)=-\frac{is_1 p}{2\pi(s_1-s_2)}\ln\frac{z_2-a}{z_2+a}.$$

Якщо функції $\varphi'(z_1)$ та $\psi'(z_2)$ відомі, то компоненти напруг в пружному анізотропному полі одержимо з рівнянь (5), а переміщення $U(x, y)$ та $V(x, y)$ з рівнянь (20).

Тепер ми можемо перейти до розв'язання такої задачі. Припустимо, що на інтервалі $(-a \dots +a)$ прикладений абсолютно твердий штамп (див. фіг. 4) й одночасно на інтервалах $(b_k \dots c_k)$ $k=1, 2, 3, \dots, n$ прикладене довільне навантаження з інтенсивністю зусиль $N_k(x)$ та $T_k(x)$, де: 1) $N_k(x)$ — нормальні, а $T_k(x)$ — тангенціальні зусилля, що прикладені на інтервалі $(b_k \dots c_k)$ (див. фіг. 3);

2) K — сила, що притискує абсолютно твердий штамп до півплощини.

Позначимо через $N(x)$ та $T(x)$ нормальні й тангенціальні зусилля, що передаються по підошві штампа на пружну анізотропну основу. Приймемо при розв'язанні цієї задачі такі припущення:

1) Сили тертя між штампом й пружною основою дорівнюють нулеві, тобто $T(x)=o$ на інтервалі $(-a \leqslant x \leqslant +a)$.

2) Вертикальні переміщення точок пружного середовища безпосередньо під підошвою штампа рівні переміщенням точок підошви штампа.

Під дією сили K вертикальні переміщення точок підошви штампа будуть

$$V(x)=g(x)+c, \tag{30}$$

де $g(x)$ — рівняння підошви штампа „c" — довільна стала.

Позначаючи зусилля під штампом (які зводяться тільки до нормальних зусиль) через мінус $P(x)$, де $P(x)$ — тиск, що передається по підошві штампа на пружне середовище; з формул (29) визначимо функції $\varphi'(z_1)$ та $\psi'(z)$:

$$\varphi'(z_1)=\frac{is_2}{2\pi(s_1-s_2)}\int\limits_{-a}^{+a}\frac{P(x)}{x-z_1}dx-\frac{i}{2\pi(s_1-s_2)}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{b_k}^{c_k}\frac{T_k(x)-s_2N_k(x)}{x-z_1}dx,$$

$$\psi'(z_2)=-\frac{is_1}{2\pi(s_1-s_2)}\int\limits_{-a}^{+a}\frac{P(x)}{x-z_2}dx-\frac{i}{2\pi(s_1-s_2)}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{b_k}^{c_k}\frac{T_k(x)-s_1N_k(x)}{x-z_2}dx. \quad (31)$$

Якби $P(x)$ було відоме, то формули (31) й розв'язували поставлену задачу, але цей тиск $P(x)$ нам невідомий.

Таким чином поставлена задача зводиться до визначення тиску $P(x)$, що передається по підошві абсолютно твердого штампа на пружну анізотропну основу.

Проінтегруємо (31); одержимо:

$$\varphi(z_1)=-\frac{is_2}{2\pi(s_1-s_2)}\int\limits_{-a}^{+a}P(x)\ln(x-z_1)\,dx+$$

$$+\frac{i}{2\pi(s_1-s_2)}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{b_k}^{c_k}\Big[\,T_k(x)+s_2N_k(x)\,\Big]\ln(x-z_1)\,dx+c_1,$$

$$\psi(z_2)=\frac{is_1}{2\pi(s_1-s_2)}\int\limits_{-a}^{+a}P(x)\ln(x-z_2)\,dx-$$

$$-\frac{i}{2\pi(s_1-s_2)}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{b_k}^{c_k}\Big[\,T_k(x)+s_1N_k(x)\,\Big]\ln(x-z_2)\,dx+c_2, \quad (32)$$

де c_1, c_2 — довільні комплексні сталі.

Спрямовуючи точку (x, y) із нижньої півплощини до точки x_0 контура, що лежить в інтервалі $(-a\leqslant x\leqslant +a)$, знайдемо з (32) значення функцій $\varphi(x_0)$ та $\psi(x_0)$:

$$\varphi(x_0)=-\frac{is_2}{2\pi(s_1-s_2)}\int\limits_{-a}^{+a}P(x)\ln|x-x_0|\,dx+\frac{i}{2\pi(s_1-s_2)}\Phi_1(s_2,\,x_0),$$

$$\psi(x_0)=\frac{is_1}{2\pi(s_1-s_2)}\int_{-a}^{+a}P(x)\ln|x-x_0|\,dx-\frac{i}{2\pi(s_1-s_2)}\Phi_2(s_1,x_0),\quad(33)$$

де

$$\Phi_1(s_2,\,x_0)=\lim_{z_1\to x_0}\left\{\sum_{k=1}^{n}\int_{b_k}^{c_k}\Big[T_k(x)+s_2N_k(x)\Big]\ln(x-z_1)\,dx\right\}+c_1,$$

$$\Phi_2(s_1,\,x_0)=\lim_{z_2\to x_0}\left\{\sum_{k=1}^{n}\int_{b_k}^{c_k}\Big[T_k(x)+s_1N_k(x)\Big]\ln(x-z_2)\,dx\right\}+c_2$$

Підставимо функції $\varphi(x_0)$ та $\psi(x_0)$ з (33) у друге рівняння (20) для переміщень і приймаючи до уваги (30), маємо:

$$Re\left\{i\frac{s_1q_2-s_2q_1}{\pi(s_1-s_2)}\right\}\int_{-a}^{+a}P(x)\ln|x-x_0|\,dx+$$

$$+Re\left\{\frac{q_1i}{\pi(s_1-s_2)}\Phi_1-\frac{q_2i}{\pi(s_1-s_2)}\Phi_2\right\}=q(x)+c$$

або:

$$\int_{-a}^{+a}P(x)\ln|x-x_0|\,dx=f(x_0)+\text{const},\quad(34)$$

де

$$m=Re\left\{i\frac{s_1q_2-s_2q_1}{\pi(s_1-s_2)}\right\}$$

$$f(x_0)=\frac{1}{m}\left[q(x_0)-Re\left\{\frac{iq_1}{\pi(s_1-s_2)}\Phi(x_0)-\frac{iq_2}{\pi(s_1-s_2)}\Phi_2(x_0)\right\}\right]$$

Таким чином, наша задача, як бачимо з (34), зводиться до визначення невідомого тиску $P(x)$ з інтегрального рівняння першого роду. Розв'язання рівняння (34) відоме; візьмемо розв'язання цього рівняння в формі, даній акад. М. І. Мусхелішвілі [4]. За цим методом невідомий тиск визначаємо по формулі:

$$P(x)=\frac{1}{\pi}Re\{iF'(z)\},$$

де: 1) Функція $F(z)$ є функція $F_0(\xi) = k \ln \xi - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{2Q}{\sigma - \xi} d\sigma +$ $+ \mathrm{const}$, якщо підставити сюди замість ξ її значення через z з формули:

$$\xi = \frac{z + \sqrt{z^2 - a^2}}{a}.$$

2) Функція $Q(\sigma)$ є значення правої частини рівняння (30), тобто функція $f(x_0) + \mathrm{const}$, де замість x підставлено його значення через σ по формулі $x = \frac{a}{2}\left(\sigma + \frac{1}{\sigma}\right)$.

3) K — сила, що притискує штамп до півплощини:

$$K = \int\limits_{-a}^{+a} P(x)\, dx.$$

Якщо до штампа прикладена пара M, то очевидно $K = 0$.

Рівняння (34) лінійно відносно $P(x)$; тому можна представити $P(x)$ у вигляді:

$$P(x) = \overset{(\text{осн.})}{P(x)} + \overset{(\text{дод})}{P(x)}, \tag{35}$$

де: 1) $\overset{(\text{осн.})}{P(x)}$ — основний тиск від сили K, коли на інтервалах $(b_k, \ldots, c_k)$ навантаження відсутнє, тобто $N_k(x) = T_k(x) = 0$ на всіх інтервалах $(b_k, \ldots c_k)$.

2) $P^{(\text{дод})}$ — додатковий тиск, викликаний завдяки прикладеним зусиллям $N_k(x)$ та $T_k(x)$ на інтервалах $(b_k, \ldots c_k)$. Із (31) і (30) бачимо, що:

$$\int\limits_{-a}^{+a} \overset{(\text{дод})}{P(x)} \ln|x - x_0|\, dx = -\frac{1}{m} Re\left\{\frac{iq_1}{\pi(s_1 - s_2)} \Phi_1(x_0) - \right.$$
$$\left. - \frac{iq_2}{\pi(s_1 - s_2)} \Phi_2(x_0)\right\}. \tag{36}$$

Права частина в (36) залежить виключно від навантаження по боках $N_k(x)$ та $T_k(x)$. Якщо це навантаження відсутнє, тобто $T_k(x) \equiv 0$, $N_k(x) \equiv 0$, то й $\overset{(\text{дод})}{P(x)} \equiv 0$, а звідси й розв'язання рівняння (31) може бути тільки $\overset{(\text{дод})}{P(x)} \equiv 0$.

Щоб переконатись у тому, що при $N_k(x) = T_k(x) = 0$ на всіх інтервалах $(b_k, \ldots c_k)$ розв'язком рівняння (36) може бути тільки нулеве рішення, можна так: припустимо, що $N_k(x) = T_k(x) \equiv 0$ на всіх інтервалах $(b_k, \ldots c_k)$, тоді рівняння (36) прийме вигляд:

$$\int_{-a}^{+a} \overset{(\text{дод})}{P}(x) \ln|x - x_0|\, dx = o \quad (\text{або const.}). \tag{37}$$

Розв'язуючи це рівняння вказаним вище методом одержимо:

$$\overset{(\text{дод})}{P}(x) = \frac{K^{(\text{дод})}}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}},$$

де

$$K^{(\text{дод})} = \int_{-a}^{+a} \overset{(\text{дод})}{P}(x)\, dx.$$

До абсолютно-твердого штампу ніяких нових додаткових сил не було прикладено, а тому $K^{(\text{дод})} \equiv o$, а звідси й $P^{(\text{дод})} \equiv o$.

Із цього, між іншим, виводимо, що дія навантаження $N_k(x)$, $T_k(x)$ на $(b_k, \ldots c_k)$ поблизу абсолютно-твердого штампу статично-еквівалентна парі M. Величину цього момента M, очевидно, визначимо за формулою:

$$M = \int_{-a}^{+a} \overset{(\text{дод})}{P}(x)\, x\, dx. \tag{38}$$

Розглянемо тепер випадок, коли в (3а) $g(x) = Ax + B$, тобто розглянемо абсолютно-твердий штамп з прямолінійною основою, прикладений до інтервала $(-a \ldots\ldots +a)$ (див. фіг. 4), на який діє ексцентрично сила K (ексцентриситет e), а на інтервалі $(b \ldots\ldots c)$ прикладене рівномірно розподілене навантаження (тиск) з інтенсивністю $p(x) =$ const.

Знайдемо тиск $P(x)$ під цим штампом. Весь тиск $P(x)$ ми розклали на дві частини $P^{(\text{осн})}$ і $P^{(\text{дод})}$,

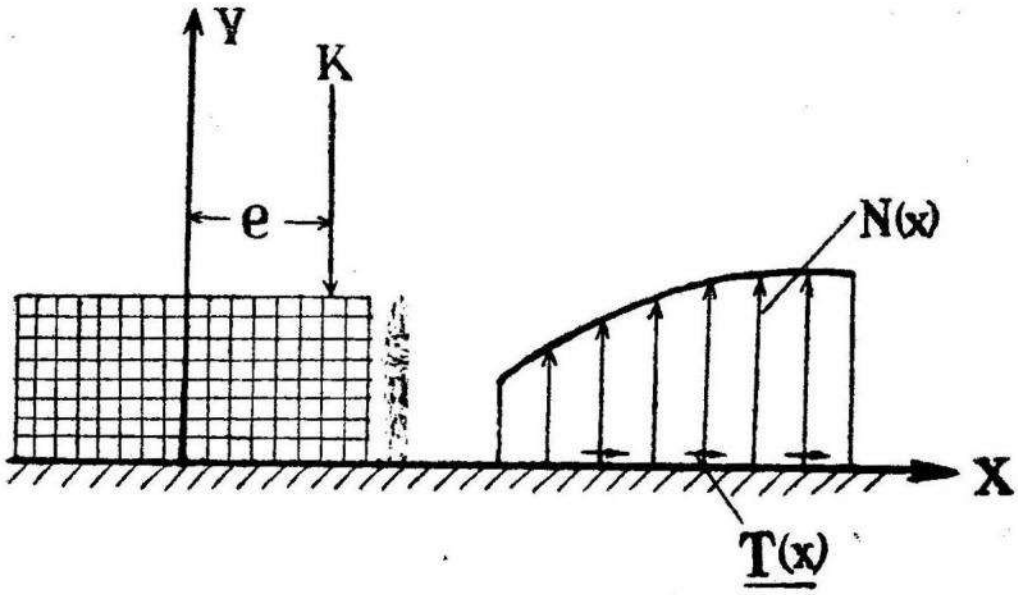
$$P(x) = \overset{(\text{осн})}{P}(x) + \overset{(\text{дод})}{P}(x),$$

які, як не важко бачити, визначаються з інтегральних рівнянь:

$$\int_{-a}^{+a} \overset{(\text{осн.})}{P(x)} \ln |x - x_0| \, dx = \frac{1}{m} [A x_0 + B] . \tag{39}$$

$$\int_{-a}^{+a} \overset{(\text{дод.})}{P(x)} \ln |x - x_0| \, dx = - \frac{1}{m} R \left[\frac{i q_1}{\pi (s_1 - s_2)} \Phi_1 (x_0) - \right.$$

$$\left. - \frac{i q_2}{\pi (s_1 - s_2)} \Phi_2 (x_0) \right] . \tag{40}$$



Фіг. 4.

Розглянемо спочатку рівняння (39).

Величини A та B — поки що невизначені дійсні сталі Очевидно, $Q(\sigma) = \frac{Aa}{2m}\left(\sigma + \frac{1}{\sigma}\right) + \text{const}$, функція $F(z)$ для нашого випадку буде мати вигляд

$$F(z) = K \ln (z + \sqrt{z^2 - a^2}) + \frac{A}{m} (z - \sqrt{z^2 - a^2}) + \text{const}.$$

Тиск $\overset{(\text{осн.})}{P(x)}$, коли ми знаємо функцію $F(z)$, буде:

$$P(x) = \frac{K - \frac{A}{m} x}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}} .$$

Сталу A визначимо з однієї з умов рівноваги штампу, а саме:

$$Ke = \int_{-a}^{+a} x \overset{(\text{осн.})}{P(x)}\, dx.$$

Звідси маємо, що

$$A = -\frac{2Kem}{a^2}.$$

Таким чином, остаточно основний тиск під цим штампом буде:

$$\overset{(\text{осн.})}{P(x)} = \frac{1 + 2\dfrac{ex}{a^2}}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}} K. \tag{41}$$

Знайдемо тепер $\overset{(\text{дод.})}{P(x)}$. Для цього розглянемо рівняння (40).

Для нашого випадку $\Phi_1(x_0)$ і $\Phi_2(x_0)$ будуть мати вигляд:

$$\Phi_1(s_2, x_0) = -qs_2[(c - x_0)\ln(c - x_0) - (b - x_0)\ln(b - x_0)] + \text{const},$$

$$\Phi_2(s_1, x_0) = -qs_1[(c - x_0)\ln(c - x_0) - (b - x_0)\ln(b - x_0)] + \text{const}.$$

Підставляючи ці значення Φ_1 та Φ_2 у (40) одержимо:

$$\int_{-a}^{+a} \overset{(\text{доп.})}{P(x)} \ln|x - x_0|\, dx = q[(b - x_0)\ln(b - x_0) - \\ - (c - x_0)\ln(c - x_0)] + \text{const}. \tag{42}$$

Опреділимо тепер $Q(\sigma)$. Для цього треба в праву частину (42) замість x підставити: $x = \frac{a}{2}\left(\sigma + \frac{1}{\sigma}\right)$ й ми матимемо:

$$Q(\sigma) = q[b\ln(\sigma - \lambda_2) - c\ln(\sigma - \delta_2) + \frac{a}{2}\sigma\ln(\sigma - \delta_2) - \frac{a}{2}\sigma\ln(\sigma - \lambda_2) + \\ + b\ln(\sigma - \lambda_1) - c\ln(\sigma - \delta_1) + \frac{a}{2}\sigma\ln(\sigma - \delta_1) - \frac{a}{2}\sigma\ln(\sigma - \lambda_1) + \\ + \frac{a}{2}\frac{1}{\sigma}\ln(\sigma - \delta_2) - \frac{a}{2}\frac{1}{\sigma}\ln(\sigma - \lambda_2) + \frac{a}{2}\frac{1}{\sigma}\ln(\sigma - \delta_1) - \\ - \frac{a}{2}\frac{1}{\sigma}\ln(\sigma - \lambda_1) + (c - b)\ln\sigma] + \text{const},$$

де: 1) $\lambda_2=\frac{b}{a}+\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-1}$ $\lambda_1=\frac{b}{a}-\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-1}$

$\delta_2=\frac{c}{a}+\sqrt{\frac{c^2}{a^2}-1}$ $\delta_1=\frac{c}{a}-\sqrt{\frac{c}{a^2}-1}$;

2) величина a, b і c характеризують розміри штампа й положення додаткової рівномірно-розподіленої нагрузки $q=\text{const.}$ (див. фіг. 4).

Якщо відома функція $Q(\sigma)$, то функцію $F(\xi)$ визначімо за формулою

$$F_0(\xi)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{2\,Q(\sigma)}{\sigma-\xi}\,d\sigma+\text{const.},$$

де ξ є точка поза одиничним колом γ.

Підставляючи замість ξ у функції $F_0(\xi)$ її значення через z по формулі

$$\xi=\frac{z+\sqrt{z^2-a^2}}{a},$$

знайдемо функцію $F(z)$.

Тиск $\overset{(\text{дод.})}{P(x)}$, якщо відома функція $F(z)$, визначимо за формулою

$$\overset{(\text{дод.})}{P(x)}=\frac{1}{\pi}\,Re\left\{\,i\,F'(z)\right\}.$$

Не приводячи всіх цих проміжних викладок $\overset{(\text{дод.})}{P(x)}$ буде:

$$\overset{(\text{дод.})}{P(x)}=\frac{-xq\ln\frac{\delta_2}{\lambda_2}+2(c-b)q+\frac{2(x-c)(a-x\delta_1)}{a-2\delta_1x+a\delta_1^{\,2}}q-\frac{2(x-b)(a-x\lambda_1)}{a-2\lambda_1x+a\lambda_1^{\,2}}q}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}+$$

$$+\frac{2q}{\pi}\left\{arc\;tg\,\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x-a\lambda_1}-arc\;tg\,\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x-a\delta_1}\right\}, \qquad (43)$$

де інтервал зміни $arc\;tg'$ - сів $(o\ldots\pi)$. Таким чином, додаючи $\overset{(\text{дод.})}{P(x)}$ (41) з $\overset{(\text{дод.})}{P(x)}$ (43) знайдемо повний тиск під цим штампом:

$$P(x)=\overset{(\text{дод})}{P(x)}+\overset{(\text{осн.})}{P(x)}. \qquad (44)$$

Як бачимо, тиск $P(x)$ (44) не залежить від пружних сталих анізотропного матеріалу півплощини, тобто такий же тиск $P(x)$ (44) будемо мати і у випадку ізотропної півплощини.

Підставляючи тепер з (44) знайдене значення $P(x)$ у формули (31), знайдемо функції $\varphi'(z_1)$ та $\psi(z_2)$. За допомогою цих функцій $\varphi'(z_1)$ та $\psi(z_2)$ по формулам (5) определімо компоненти напруг, а по формулам (20) компоненти переміщень в півплощині.

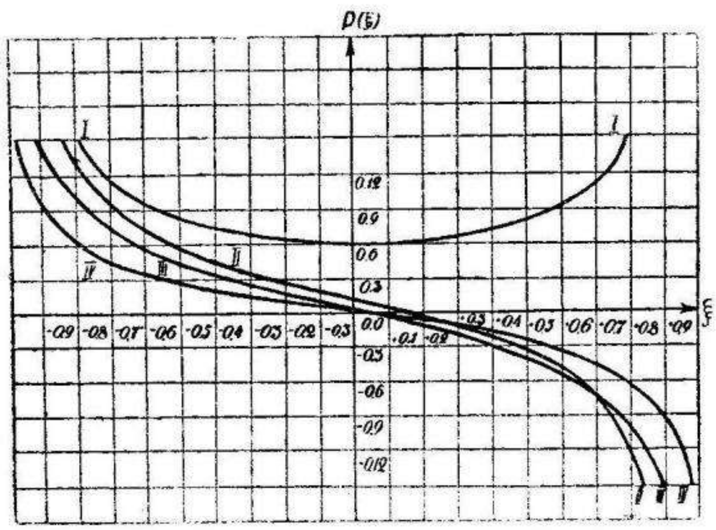
Тут ми розглянули змішану задачу для випадку одного абсолютно-твердого штампу.

Задача змішаною зветься тому, що на одному інтервалі $(-a \ldots\ldots +a)$ задані вертикальні переміщення $v(x)$ й головний вектор K, а на інших інтервалах $(b_k \ldots c_k)$ задані зовнішні зусилля $N_k(x)$ та $T_k(x)$.

В наступних повідомленнях будуть розглянуті випадки, коли до прямолінійної границі анізотропної півплощини одночасно діє декілька абсолютно-твердих штампів, а на інших інтервалах зовнішні зусилля $N_k(x)$ та $T_k(x)$.

Розгляньмо наприкінці декілька прикладів. На фіг. 5 наведені криві I, II, III та IV для $\overset{(\text{дод})}{P}(x)$ (43) для випадків:

$a = 3$ *м*	$b = 3$ *м*	$c = 23$ *м*	крива II
$a = 3$ *м*	$b = 5$ *м*	$c = 25$ *м*	крива III
$a = 3$ *м*	$b = 31$ *м*	$c = 51$ *м*	крива IV



Фіг. 5.

Крива I для $\overset{(\text{осн})}{P}(x)$ (41) при $e = o$. $\overset{(\text{дод})}{P}(x)$ на кривих II, III, IV представлені в частинах q, а $\overset{(\text{осн})}{P}(x)$ на кривій I у частинах $p = \dfrac{K}{2a}$.

З наведених графіків бачимо, що повний тиск абсолютно-твердого штампа на пружну основу праворуч і ліворуч від осі oy буде неоднаковий. При деяких значеннях p і q у правій половині штампа (ближче до кута) повний тиск $P(x) = \overset{(\text{осн})}{P}(x) + \overset{(\text{дод})}{P}(x)$ буде дорівнювати нулеві, або буде незначною величиною; у лівій же частині штампа як $\overset{(\text{осн})}{P}(x)$, так і $\overset{(\text{дод})}{P}(x)$ мають однакові знаки, тому в цій частині штампу $P(x) = \overset{(\text{осн})}{P}(x) + \overset{(\text{дод})}{P}(x)$ буде безмежно зростати.

Звідси ми бачимо, що треба сподіватись перенапруження матеріалу під штампом „ліворуч" (правильніше з протилежного боку від додаткової нагрузки q) і коли це перенапруження настане — штамп повернеться вліво (див. фіг. 4).

Не важко пересвідчитись у тому, що $\int\limits_{-a}^{+a} \overset{(\text{дод})}{P}(x)\, dx = o$,

$$\text{а} \quad M = \int\limits_{-a}^{+a} \overset{(\text{дод})}{P}(x)\, x dx = q \left| \frac{a^2}{4}(\delta_1{}^2 - \lambda_1{}^2) - a(c\delta_1 - b\lambda_1) - \frac{a^2}{2} \ln \frac{\delta_2}{\lambda_2} \right] ,$$

тобто $\overset{(\text{дод})}{P}(x)$ під абсолютно твердим штампом статистично-еквівалентно парі з моментом M.

ЛІТЕРАТУРА

1. Савін Г. М. Про додатковий тиск, який передається по підошві абсолютно твердого штампа на пружну анізотропну основу, викликаний прикладеним навантаженням поблизу абсолютно твердого штампа. Доповіді Академії наук УРСР, № 7, 1940.
2. Савин Г. Н. Некоторые задачи теории упругости анизотропной среды. Доклады Академии наук СССР, т. XXIII, № 3, 1939.
3. Лехницкий С. Г. К вопросу о влиянии сосредоточенных сил на распределение напряжений в анизотропной среде. Прикладная математика и механика, т. III, № 1, 1936.
4. Мусхелишвили Н. И. Некоторые задачи математической теории упругости. Издательство АН СССР, 1935, стр. 244.

Г. Н. САВИН. СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ АНИЗОТРОПНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Резюме

В работе рассмотрены решения двух классов задач:

1) Задача о напряжениях и перемещениях в анизотропной полуплоскости, если на границе ее заданы внешние усилия X_n и Y_n (см. фиг. 1). Решение задачи сведено к определению двух функций $\varphi(z_1)$ и $\psi(z_2)$ (29)[1].

2) Задача о напряжениях и перемещениях в упругой анизотропной полуплоскости, когда к границе этой полуплоскости на участках $(b_k \ldots c_k)$ приложены внешние усилия X_n и Y_n, а на участке $(-a \ldots + a)$ (см. фиг. 4) заданы вертикальные составляющие $v(x)$ перемещения, а также главный вектор K и главный момент M, вызвавшие эти перемещения. Задача также сведена к нахождению двух аналитических функций $\varphi(z_1)$ и $\psi(z_2)$ (31) комплексных переменных $z_1 = x + s_1 y$ и $z_2 = x + s_2 y$.

По найденным функциям $\varphi(z_1)$ и $\psi(z_2)$ (31) компоненты напряжений и перемещений определяются соответственно по формулам (5) и (20).

В заключение рассмотрены несколько примеров.

---

[1] Номера формул даны по основному тексту статьи.